有限要素法による地下水流動解析における 流れの局所連続性に関する考察*

菱谷智幸**・鹿島浩之・櫻井英行***・白石知成***

A study on the continuity of velocity at element boundaries in groundwater analysis based on finite element method

Tomoyuki HISHIYA**, Hiroyuki KASHIMA, Hideyuki SAKURAI***
and Tomonari SHIRAISHI***

Abstract

In the conventional finite element method (FEM) for groundwater flow analysis, hydraulic head at each node is set as an unknown, and the Darcy velocity of each element is calculated from the nodal data separately. Therefore, discontinuity of the Darcy velocity at some element boundaries can occur. Several methods have been proposed to solve this problem. For example, a method, namely FE-CK, that divides each element into sub-elements depending on the preceding calculation by FEM can be used to meet the continuity of velocity at each element's boundary. Another method, namely HM, which utilizes hybrid finite elements for independently interpolating hydraulic head and the Darcy velocity is also considered to be applicable. Previous studies on validity of such correctional methods have been conducted mostly in 2-D problems. In this paper, we investigate application of the FE-CK to 3-D problems, and propose a path-line analysis method which uses velocity space obtained by the FE-CK and the zeroth order Raviart-Thomas interpolation (RT0). Benchmark calculation with the model including irregular-shaped elements showed the HM caused numerical error in cross-sectional flow rate, whereas the FE-CK gave good agreement with theoretical value. Path-line analysis of the both methods were found to be affected by irregularity in element shapes.

Key Words: groundwater flow, finite element method (FEM), velocity, continuity, path-line

要 旨

全水頭を未知数とする従来の有限要素法 (FEM) では、ダルシー流速を要素毎に計算するため、要素境界面で流速が連続しない場合がある。この問題を解決する手法として、例えば FEM の結果を基に有限要素を再分割して要素境界面の流速の連続性を得る手法 (FE-CK) や全水頭と流速を同時に近似する混合補間を用いた有限要素法 (HM) の研究成果が報告されている。既往の研究の多くは二

* 日本地下水学会2012年春季講演会にて一部発表

** (株)ダイヤコンサルタント ジオエンジニアリング事業本部 (〒331-0811 埼玉県さいたま市北区吉野町2-272-3) Headquarter of Geo-Engineering Business Affairs, Dia Consultants Co., Ltd.

*** 清水建設(株) 技術研究所

Institute of Technology, Shimizu Corporation

次元問題に関するものであるが、本報告ではFE-CKとRaviart-Thomas補間(RT0)を用いた流跡線解析手法を三次元に拡張し、HMとFE-CKの数値実験を行った。この数値実験結果からHMでは流動方向に対して要素が歪む場合、断面通過流量に誤差が生じたがFE-CKでは理論値に一致する値が得られた。一方、流跡線に関してはHM、FE-CKともに要素形状の歪みの影響を受ける結果となった。

キーワード：地下水流動、有限要素法(FEM)、流速、連続性、流跡線

1. はじめに

一般に地下水流動解析では差分法、有限体積法、有限要素法(FEM)といった離散化解析手法が用いられており、計算時間や要素形状の種類といった各手法の長所・短所を考慮しながら様々な地下水問題に適用されている。特に我が国のように多くの複雑な地質構造や地下構造物を考慮する場合、その幾何形状を精度良くモデル化することができるFEMは使用実績も多く、実用的な解析手法と言える。

このように地下水流動分野で広く用いられている節点全水頭を未知数とする一般的なFEMでは、求まった全水頭値から要素単位で流速を個別に計算するため、不透水境界面や透水性が大きく異なる要素間で連続な流速場が精度良く得られないという指摘(Cordes and Kinzelbach, 1992)があった。特に流跡線解析を用いて地下水流動の移行先や移行経路、移行時間を検討する際にはこの指摘が顕著に表れる場合があり、後述の流跡線解析例のように要素分割が粗い場合、難透水性領域に流跡線が入り込むような大きな誤差を生じることもある(図14(a)参照)。このため、1990年代からFEM要素間流速の局所連続性や局所連続性を考慮した流速場を用いた流跡線解析に関する研究が欧州を中心に行われた。

これらの研究では、①FEMの結果を基に有限要素を再分割して流量の局所連続性を得る手法(Cordes and Kinzelbach, 1992)や②全水頭と流速を同時に近似する混合補間法に基づく混合モデル(mixed finite element, 以下MFと呼ぶ)やハイブリッド・モデル(hybrid finite element, mixed hybrid finite element, 以下HMと呼ぶ)について研究成果が報告されている(例えば、Mosé et al., 1994; Matringe et al., 2006)。これらの研究成果の多くは②に関する二次元場を対象とした研究であり、流跡線解析手法も含めて高精度な解析事

例が示されている。また、国内でも放射性廃棄物処分施設検討における有用性を示す数値実験報告があり(青木ほか, 2011)、高精度な地下水流動解析手法に関心が高まってきた。

実務の地下水流動解析では三次元解析が多数実施されているが、これらの高精度な解析手法の三次元場に対する研究報告は少なく、実務への適用性が未知数であった。例えばMatringe(2008)では、一次の混合補間に関しては解析精度が良い六面体要素が示されているが、三角柱要素に関して同様の混合補間関数が見つからないことも示されており、有限要素法の長所であるメッシュ分割の柔軟性という観点からは三次元場に対する実用上の知見が十分得られていないと考えられる。

このような状況を受け、2010年末から任意の勉強会として「地下水流動解析手法の高度化勉強会」が開催され、これらの解析手法について比較検討がなされた(例えば、赤堀ほか, 2012; 森川ほか, 2012; 田中ほか, 2012)。また、三次元場特有の知見として②の手法に関しては二次元場では見られなかった最低次のRaviart-Thomas混合補間(以下RT0補間と呼ぶ)による六面体要素や三角柱要素の要素形状の歪みによる流量誤差について示された(櫻井ほか, 2013; 小野ほか, 2013)。

本報告では三次元場の①の手法に関する論文が国内では見られないことから、三次元の①の手法とその適用性について検討した。また、HMの特性を活かした高精度な二次元場の流跡線解析手法(Matringe, 2006)を三次元場に拡張し、その精度について報告する。

2. 有限要素解析結果を用いた局所流量連続性の検討

要素構成節点の全水頭もしくは流量を未知数とする一般的な有限要素法では、節点の全水頭連続

性と流量の釣り合いが満足されている。言い換えると要素を構成する各面（辺）の流量の積分値（要素表面上の流量の総和）として質量収支が保たれている。一方、流速は要素構成節点の全水頭を微分して要素ごとに独立計算するため、要素を構成する面（辺）単位でその面を通過する流速（流量）の連続性が満足されない場合がある。この流速場を用いた流跡線解析では不透水境界付近や透水性が異なる境界面付近での精度が低下することから、二次元問題に対して Cordes and Kinzelbach (1992) は要素を細分割したサブエレメントへの質量連続式と渦なし流れの式を適用することで要素を構成する面の流速の連続性を満足させる手法（以下、FE-CK と呼ぶ）を示し、流跡線解析の精度向上について報告している。

本検討ではこの FE-CK を三次元問題に拡張した。また、従来の FE-CK では解析領域の境界面（外形面）を含む要素に関して、その要素を構成する面の流量を計算することができなかったが、

解析領域の境界面に接続する仮想サブエレメントを設定することで、FEM の解析領域全体に対して FE-CK を適用できるように拡張した。

2.1 FE-CK の概要

FE-CK の概要を図 1 (a) に示すような 5 要素 9 節点で構成される二次元有限要素モデルを用いて説明する。各節点の流量 ($Q_1 \sim Q_9$) は節点毎にハッチングされた領域（図 1 (b)）の積分値として求まっており、定常場の場合、節点流量の合計はゼロとなる。また、要素単位で要素透水マトリクスに節点全水頭ベクトルを乗ずることで要素単位での節点流量を求めることができる（図 1 (c)）。要素単位で求めた要素節点流量の合計はゼロとなり、連続式として例えば E_4 では、 $q_{54} + q_{64} + q_{94} + q_{84} = 0$ となる。また、全領域と要素単位との関係では連続式として $Q_5 = q_{51} + q_{52} + q_{53} + q_{54} + q_{55} = 0$ となる。これらの節点流量を図 1 (d) のように要素構成辺上の流量 ($Q^{12} \sim Q^{51}$) として分

図 1 有限要素と節点流量概念図

離・再構成することができれば局所連続性を満足する流量（流速）分布を求めることができる。本検討では定常場としているが、非定常場では貯留項の流量を含めて収支がゼロとなることから、貯留項を除いた流量による連続式を用いることもできる。

(1) サブエレメント分割とパッチ通過流量

図2(a)で示すように四辺形要素4(E_4)を要素構成節点が支配する領域（節点の積分範囲）毎にサブエレメント（以下、サブ要素）として分割する。2次要素の場合、要素構成辺を辺の中点で分割し、要素重心を中心として各辺の中点を結ぶ辺で構成された四角形がサブ要素となる。ここで、四辺形要素重心を中心として、重心と辺の中点を端点とする辺をパッチとし、このパッチを通過する流量を用いて各サブ要素に対する流入・流出量の収支を考える。図2(b)に示すようにサブ要素 $E_{4\text{-sub1}}$ へのパッチ流量は流入量 Q_4^{ce} と流出量 Q_1^{ce} の合計となる。一方、このサブ要素の流量の積分値は節点流量 Q_1^e （図1(c)では q_{54} ）であることから、 $Q_4^{ce} - Q_1^{ce} = Q_1^e$ となり、各区サブ要素の流量収支は連続式として次式で表される。ここで、未知数はパッチ流量（ $Q_1^{ce} \sim Q_4^{ce}$ ）となる

$$\begin{cases} Q_4^{ce} - Q_1^{ce} = Q_1^e \\ Q_1^{ce} - Q_2^{ce} = Q_2^e \\ Q_2^{ce} - Q_3^{ce} = Q_3^e \\ Q_3^{ce} - Q_4^{ce} = Q_4^e \end{cases} \quad (1)$$

(a)

(b)

図2 サブ要素分割とパッチ流量概念図

これと同様に節点周りの流量収支を考えることで要素辺上の流量を求めることができる。

(2) 節点周りの要素辺流量

図3に節点5を中心として構成するサブ要素間の流量収支を考える。式(2)は連続式であり、各要素の節点流量として満足し、既知量である。

$$Q_1^e + Q_2^e + Q_3^e + Q_4^e + Q_5^e = 0 \quad (2)$$

また、各サブ要素の連続式から次式を得る。

$$\begin{cases} Q_5^{ce} - Q_1^{ce} = Q_1^e \\ Q_1^{ce} - Q_2^{ce} = Q_2^e \\ Q_2^{ce} - Q_3^{ce} = Q_3^e \\ Q_3^{ce} - Q_4^{ce} = Q_4^e \\ Q_4^{ce} - Q_5^{ce} = Q_5^e \end{cases} \quad (3)$$

式(3)の内、一つは線形・独立な式ではないため解くことができない。例えば、式(3)の最上段から順番に四つの式を変形して代入すると $Q_4^{ce} - Q_5^{ce} = -(Q_1^e + Q_2^e + Q_3^e + Q_4^e)$ となり、最下段の式と同じとなるため、未知数の数に対して式の本数が不足することとなる。

そこで、サブ要素1～5の周回ルートSに沿って考えると、ポテンシャル流では渦なし流れの条件として $\int_S \Delta h ds = 0$ が成り立つ（ここで、 Δh ：水頭差）。図4のようにサブ要素重心間の水頭差を考えると次式となる。

$$\Delta h_{12} + \Delta h_{23} + \Delta h_{34} + \Delta h_{45} + \Delta h_{51} = 0 \quad (4)$$

図 3 節点周りサブ要素連続式図

また、図中 sub4 と sub5 間を通過する流量を考えると次式となる。

$$Q_4^{ce} = -K_4 \left(\frac{h_4 - h_{45}}{\Delta S_4} \right) A_4 = -K_5 \left(\frac{h_{45} - h_5}{\Delta S_5} \right) A_5 \quad (5)$$

ここで、 K_i : i サブ要素の透水係数、 h : 全水頭、 ΔS : 離間距離、 A_i : サブ要素 i , $i+1$ 間のパッチ面積。

式 (5) を変形すると Δh_{45} は次式となる。

$$\Delta h_{45} = h_4 - h_5 = - \left[\left(\frac{\Delta S_4}{K_4 A_4} \right) + \left(\frac{\Delta S_5}{K_5 A_5} \right) \right] Q_4^{ce} \quad (6)$$

全サブ要素間の水頭差を同様に求め、式 (4) に代入し、節点を中心として構成するサブ要素数を n として一般化すると節点周りの渦なし条件は次式となる。

$$\sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\Delta S_i}{K_i A_i} \right) + \left(\frac{\Delta S_{i+1}}{K_{i+1} A_{i+1}} \right) \right] Q_i^{ce} = 0 \quad (7)$$

ただし、 $i+1 > n$ の場合は $i+1$ は 1 とする

式 (3) の内 4 式と式 (7) を連立一次方程式として解くことで、未知量であったサブ要素間の流量 Q_1^{ce} , Q_2^{ce} , Q_3^{ce} , Q_4^{ce} , Q_5^{ce} を求めることができる。この流量は有限要素の要素辺上の流量であり、この手法を領域内部の全ての節点に関して適用することで、領域内部の要素辺上の連続した流量を求めることができる。

2.3 外形サブ要素のパッチ流量計算

FE-CK では渦なし条件が計算上必要となる。

図 4 渦なし流れ条件説明図

図 5 外形サブ要素と内部サブ要素

このため、図 5 に示すように、従来の CK 法では解析領域の内部のサブ要素のみが FE-CK の対象となるため、渦なし条件が設定できない図中太線の解析領域の外形辺 (面) と一点破線の辺 (面) のパッチ流量を求めることができない。しかしながら、図中太線の辺 (面) については、FE-CK を使わずとも有限要素法の境界条件により、水頭既知境界では境界水頭値に対する節点流量が、流量既知境界では境界条件として節点流量が既知となるため、節点流量を節点の積分面積 (体積) に応じて要素構成辺に分配することでパッチ流量を求めることができる。

一方、一点破線の辺 (面) に対しては、図 6 に示すように、サブ要素 1, 2 に対して渦なし条件を設定するため、解析領域の外側にサブ要素 3, 4 を仮想すると渦なし条件式は式 (7) から次式

図6 仮想サブ要素

となる。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Delta S_1}{K_1 A_1} \right) Q_1^{ce} + \left(\frac{\Delta S_2}{K_2 A_1} \right) Q_2^{ce} + \left(\frac{\Delta S_2}{K_2 A_2} \right) Q_2^{ce} \\ & + \left(\frac{\Delta S_3}{K_3 A_2} \right) Q_3^{ce} + \left(\frac{\Delta S_3}{K_3 A_3} \right) Q_3^{ce} + \left(\frac{\Delta S_4}{K_4 A_3} \right) Q_4^{ce} \\ & + \left(\frac{\Delta S_4}{K_4 A_4} \right) Q_4^{ce} + \left(\frac{\Delta S_1}{K_1 A_4} \right) Q_1^{ce} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

本来、仮想サブ要素3と4の間を通過する流量はゼロでなくてはならない。渦なし条件では水頭差を基本としているので、仮想したサブ要素3と4の間で水頭差がゼロであれば通過流量がゼロとなる。ここで式(6)に戻ると、サブ要素間の水頭差をゼロにするためには水頭差を考える2つのサブ要素の透水係数を無限大とすることで水頭差

がゼロに近似される。このため、仮想サブ要素3, 4の透水係数を無限大とすると、式(8)の左边第4, 5, 6, 7項はゼロとなり、式(8)は次式で近似することができる。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Delta S_1}{K_1 A_1} \right) Q_1^{ce} + \left(\frac{\Delta S_2}{K_2 A_1} \right) Q_2^{ce} + \left(\frac{\Delta S_2}{K_2 A_2} \right) Q_2^{ce} \\ & + \left(\frac{\Delta S_1}{K_1 A_4} \right) Q_1^{ce} \approx 0 \end{aligned} \quad (9)$$

式(9)では仮想サブ要素に関する項が無くなり、サブ要素1, 2のみで渦なし条件を近似することができる。この近似式を渦なし条件の式として用いることで、従来のFE-CKでは求められなかった解析領域全体のパッチ流量を求めることができる。

2.2 三次元場への拡張

三次元場のFE-CKは基本的に前述の二次元場と同様である。図1の平面をX-Y平面としてZ軸上に押し出した三次元モデルを図7(a)に示す。六面体要素と三角柱要素を2段に組み上げ10個の三次要素とした。三次元でも同様に各要素の構成節点が支配する領域毎にサブ要素を分割する。六面体要素、三角柱要素ともにサブ要素は六面体となる。図7(b)にモデル中央節点周りのサブ要素を抽出して示す。この中央節点周りのパッチ通過流量を図8に示す。図では下段のサブ要素のみ示し、下段サブ要素のパッチ流量を示す。この場合、三次元場として上段のサブ要素に対する

図7 3次元サブ要素分割例

図8 3次元サブ要素連続式図

図9 渦なし条件中心線図

パッチ流量が追加され、上段と下段のサブ要素を合わせると連続式は次式となる。

$$Q_1^e + Q_2^e + Q_3^e + Q_4^e + Q_5^e + Q_6^e + Q_7^e + Q_8^e + Q_9^e + Q_{10}^e = 0 \quad (10)$$

$$\text{下段} \begin{cases} Q_5^{ce} - Q_1^{ce} - Q_6^{ce} = Q_1^e \\ Q_1^{ce} - Q_2^{ce} - Q_7^{ce} = Q_2^e \\ Q_2^{ce} - Q_3^{ce} - Q_8^{ce} = Q_3^e \\ Q_3^{ce} - Q_4^{ce} - Q_9^{ce} = Q_4^e \\ Q_4^{ce} - Q_5^{ce} - Q_{10}^{ce} = Q_5^e \end{cases}$$

$$\text{上段} \begin{cases} Q_{15}^{ce} - Q_{11}^{ce} + Q_6^{ce} = Q_6^e \\ Q_{11}^{ce} - Q_{12}^{ce} + Q_7^{ce} = Q_7^e \\ Q_{12}^{ce} - Q_{13}^{ce} + Q_8^{ce} = Q_8^e \\ Q_{13}^{ce} - Q_{14}^{ce} + Q_9^{ce} = Q_9^e \\ Q_{14}^{ce} - Q_{15}^{ce} + Q_{10}^{ce} = Q_{10}^e \end{cases} \quad (11)$$

式 (11) の内、一つは線形・独立の式とはならないため、渦なし条件を追加する。図9に中央節点を端点とする7本の要素辺を太破線で示す。この7本の要素辺を中心として接続するサブ要素に関して渦なし条件式を追加することができる。この図の場合、未知数15個に対して連続式が9式であるため、渦なし条件から線形・独立な6つの方程式を追加することで未知数全てを解くことができる。

本手法では渦なし条件を設定する際、サブ要素間で動水勾配を評価するための点としてサブ要素の重心を用いてサブ要素間を通過する流量をもと

としており、サブ要素間の面と両サブ要素間の重心を結んだ線分が直交していない場合に誤差を生じる。これは非構造格子の有限体積法の離散化でも同様の問題があり、その対策として交差拡散項として補正する手法が示されている (松下ほか, 2011)。このため、本手法においても交差拡散項による補正を行った。図10にその概念を示す。

図中、サブ要素1, 2のパッチ流量について考える。パッチ面を点 a_1, b_1, c_1 の三点で平面を定義し、線 a_1-c_1 を ζ 軸、平面内で ζ に直交する軸を η 、平面の法線方向を n 軸と考えると h_1h_2 間の動水勾配は次式となる。

図10 任意六面体での渦なし条件概念図

$$\begin{aligned} \text{grad}(h) &= \frac{\partial h}{\partial x} i + \frac{\partial h}{\partial y} j + \frac{\partial h}{\partial z} k \\ &= \frac{\partial h}{\partial n} e_n + \frac{\partial h}{\partial \eta} e_\eta + \frac{\partial h}{\partial \zeta} e_\zeta \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 $i, j, k, e_n, e_\eta, e_\zeta$ は各方向の単位ベクトル。次に h_1, h_2 を結ぶ線分を S 軸として n と S のなす角を θ_n 、 η と S のなす角を θ_η 、 ζ と S のなす角を θ_ζ とし、式(12)の右辺3ベクトルの S 方向への投影を考えると次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial n} e_n \cdot e_S &= \frac{\partial h}{\partial n} \cos \theta_n, \\ \frac{\partial h}{\partial \eta} e_\eta \cdot e_S &= \frac{\partial h}{\partial \eta} \cos \theta_\eta, \\ \frac{\partial h}{\partial \zeta} e_\zeta \cdot e_S &= \frac{\partial h}{\partial \zeta} \cos \theta_\zeta \end{aligned} \quad (13)$$

式(13)を式(12)に代入すると S 方向の動水勾配は次式となる。

$$\frac{\partial h}{\partial S} = \frac{\partial h}{\partial n} \cos \theta_n + \frac{\partial h}{\partial \eta} \cos \theta_\eta + \frac{\partial h}{\partial \zeta} \cos \theta_\zeta \quad (14)$$

ここで各方向の動水勾配を式(15)とし、式(14)に代入することで、交差拡散を考慮した動水勾配の式(16)が得られる。

$$\frac{\partial h}{\partial S} = \frac{h_1 - h_2}{\Delta S}, \frac{\partial h}{\partial \eta} = \frac{h_{b_1} - h_{a_1}}{\Delta \eta}, \frac{\partial h}{\partial \zeta} = \frac{h_{c_1} - h_{a_1}}{\Delta \zeta} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} n \cdot \text{grad}(h) &= \frac{\partial h}{\partial n} = \left(\frac{h_1 - h_2}{\Delta S} \right) \frac{1}{\cos \theta_n} \\ &\quad - \left(\frac{h_{b_1} - h_{a_1}}{\Delta \eta} \right) \frac{\cos \theta_\eta}{\cos \theta_n} - \left(\frac{h_{c_1} - h_{a_1}}{\Delta \zeta} \right) \frac{\cos \theta_\zeta}{\cos \theta_n} \end{aligned} \quad (16)$$

また、パッチ面の法線方向の通過流量は式(16)から次式で表される。

$$\begin{aligned} Q_1^{ce} &= -K_1 \left(\frac{h_1 - h_{12}}{\Delta S_1} \right) \frac{1}{\cos \theta_n} A_1 \\ &\quad + K_1 \left(\frac{h_{b_1} - h_{a_1}}{\Delta \eta} \right) \frac{\cos \theta_\eta}{\cos \theta_n} A_1 \\ &\quad + K_1 \left(\frac{h_{c_1} - h_{a_1}}{\Delta \zeta} \right) \frac{\cos \theta_\zeta}{\cos \theta_n} A_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -K_2 \left(\frac{h_{12} - h_2}{\Delta S_2} \right) \frac{1}{\cos \theta_n} A_1 \\ &\quad + K_2 \left(\frac{h_{b_1} - h_{a_1}}{\Delta \eta} \right) \frac{\cos \theta_\eta}{\cos \theta_n} A_1 \\ &\quad + K_2 \left(\frac{h_{c_1} - h_{a_1}}{\Delta \zeta} \right) \frac{\cos \theta_\zeta}{\cos \theta_n} A_1 \end{aligned} \quad (17)$$

式(17)に対して式(5)から式(7)と同様の展開を行うと、交差拡散項を考慮した渦なし条件の式が求まり、節点を中心として構成するサブ要素数を m として一般化すると次式となる。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \left\{ \left(\frac{\Delta S_i}{K_i A_i} + \frac{\Delta S_{i+1}}{K_{i+1} A_i} \right) \cos[(\theta_n)_i] Q_i^{ce} \right. \\ \left. + (\Delta S_i + \Delta S_{i+1}) \left(\frac{h_{b_1} - h_{a_1}}{\Delta \eta_i} \right) \cos[(\theta_\eta)_i] \right. \\ \left. + (\Delta S_i + \Delta S_{i+1}) \left(\frac{h_{c_1} - h_{a_1}}{\Delta \zeta_i} \right) \cos[(\theta_\zeta)_i] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

ただし、 $i+1 > m$ の場合は $i+1$ は1とする

これにより、形状の歪み補正を考慮した任意形状の6面体形状からなるサブ要素の渦なし条件を設定することができる。ただし、この交差拡散項を考慮していても、パッチ平面のねじれによる誤差が発生する場合があることに留意する必要がある。

3. RT0補間を用いた三次元流跡線解析手法

FEM解析結果による流跡線解析では、一般に有限要素重心で求められた流速からルンゲ・クッタ法のような数値積分手法を用いるため、流跡線は積分時における流速の空間分布密度や時間刻み間隔の影響を受ける。これに対して、例えばRT0補間を用いたHM(以下、RT-HMと呼ぶ)やFE-CKでは要素構成面で連続した流量(流速)が得られ、この面流量とRT0補間関数を組み合わせることで要素内の任意の場所の流速を一次の多項式で近似することができる。この流速の近似式を用いることで要素内の流跡線は数値積分ではなく、積分式として厳密に求めることができる。

図11に六面体要素のRT0局所座標系を示し、各面流量を定義すると、RT0局所座標系での流速

図 11 六面体要素局所座標系と面流量

は式 (19) に示す多項式で表すことができる (櫻井ほか, 2013)。

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{u}}^h(\xi) &= [\bar{\mathbf{P}}(\xi)]^T \{\alpha\} \equiv \sum_i^n \{\bar{\mathbf{P}}_i(\xi) \alpha_i\} \\ \bar{\mathbf{u}}^h(\xi) &= [\bar{\mathbf{N}}(\xi)]^T \{q\} \equiv \sum_i^n \{\bar{\mathbf{N}}_i(\xi) q_i\}\end{aligned}\quad (19)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{u}}^h(\xi)$: 局所座標系 ξ における流速の近似関数、 α_i : 未定係数、 n : 要素構成面数、 $\bar{\mathbf{P}}_i$: 1 次の多項式、 q_i : 各面の流量、 $\bar{\mathbf{N}}_i$: 局所座標系における流速近似の形状関数。

六面体の場合、 $n=6$ となり、多項式と流速近似の形状関数は式 (20) となる。また、局所座標系の流速は式 (21) で表される。また、櫻井ほか (2013) には三角柱 (五面体)、四面体の場合についても $\bar{\mathbf{P}}_i$ 、 $\bar{\mathbf{N}}_i$ が示されているので、同様に流速の近似関数を求めることができる。

$$\begin{aligned}[\bar{\mathbf{P}}(\xi)]^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \zeta \end{bmatrix} \\ [\bar{\mathbf{N}}(\xi)]^T &= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1+\xi & 0 & -1+\zeta \\ 0 & 0 & -1+\zeta & 0 & 1+\eta & 0 \\ -1+\eta & 1+\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (20)$$

$$\{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6\} =$$

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{array}{ccc} -\frac{1}{8}(q_6 - q_4) & -\frac{1}{8}(q_3 - q_5) & -\frac{1}{8}(q_1 - q_2) \\ \frac{1}{8}(q_6 + q_4) & \frac{1}{8}(q_3 + q_5) & \frac{1}{8}(q_1 + q_2) \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} u(\xi) = \alpha_1 + \alpha_4 \xi \\ u(\eta) = \alpha_2 + \alpha_5 \eta \\ u(\zeta) = \alpha_3 + \alpha_6 \zeta \end{array} \right\}\end{aligned}\quad (21)$$

3.1 RT0補間関数による三次元軌跡の式

既往文献では、二次元の RT0 補間関数に対して流れ関数を求めている (Matringe et al., 2006)。しかしながら、三次元場では流れ関数は定義できないため (日野, 1992)、本検討では軌跡の式として流跡線を求めた。式 (21) の $u(\xi)$ について軌跡の式を考えると $u(\xi) = \alpha_1 + \alpha_4 \xi$ で定義される流速は局所座標系内の時間 t を媒介変数として次式で表される。

$$u(\xi) = \frac{d\xi}{dt}\quad (22)$$

式 (21) と式 (22) は同じ流速成分であり、次式となる。

$$\frac{d\xi}{dt} = \alpha_1 + \alpha_4 \xi\quad (23)$$

式 (23) を変数分離して積分すると軌跡の式が得られ、 η と ζ に同様に展開すると時間 t における軌跡の式は次式となる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = C_1 \cdot e^{\alpha_4 t} - \frac{\alpha_1}{\alpha_4} \\ \eta = C_2 \cdot e^{\alpha_5 t} - \frac{\alpha_2}{\alpha_5} \\ \zeta = C_3 \cdot e^{\alpha_6 t} - \frac{\alpha_3}{\alpha_6} \end{array} \right.\quad (24)$$

ここで、式 (24) には積分定数 C_1 、 C_2 、 C_3 が残るが、 $t=0$ の ξ 、 η 、 ζ の初期値は既知であることから、式 (24) の積分定数はこの初期値から設定することができる。これにより、局所座標系内

の流跡線を軌跡の式として求めることができる。
この局所座標系内の流跡線の物理座標系の写像は要素の節点座標値を用いて式 (24) により行え、8 節点六面体でのアイソパラメトリック要素の形状関数は式 (25) となる (鷺津ほか, 1981)。

$$\mathbf{x}(\xi) = \{L_j(\xi)\}^T \{\mathbf{x}\} \equiv \sum_j^m L_j(\xi) \mathbf{x}_j \quad (j=1,2,\dots,8) \quad (24)$$

$$L_j = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_j)(1 + \eta \eta_j)(1 + \zeta \zeta_j) \quad (j=1,2,\dots,8) \quad (25)$$

ここで、 L_j ：図11で示した局所座標 ξ で表された形状関数、 m ：要素構成節点数、 ξ_j ：節点の局所座標値、 $\mathbf{x}_j$ ：要素の節点座標値。

また、流跡線の移行時間は次式を用いて変換した (Matringe et al., 2006)。

$$\tau = \int \frac{1}{|u(\omega)|} J(\xi) d\omega \quad (26)$$

ここで、 τ ：物理座標系での流跡線移行時間、

ω ：局所座標系での流跡線の移行経路、 J ：ヤコビ行列式。

4. 数値実験

4.1 一様流パッチテスト

櫻井ほか (2013) では、一様流パッチテストで六面体と三角柱要素で流れを横切る方向の節点に配置に乱れを与えて要素形状を歪めた場合、RT-HM では一様流を生成できないものがあった。このため、RT-HM で一様流を生成できなかった六面体と三角柱要素について同様のテストを行った。パッチテストは長さが10で、正方形の単位断面を有する均質媒体に対して流速が1となる全水頭値を両端に与えて、断面通過流量をFE-CKとRT-HMで比較した。図12にパッチテストに用いたメッシュを示す。断面通過流量を表1に示す。FE-CKはどちらの要素も理論通りの断面通過流量となった。一方、RT-HMは本テストの場合、六面体要素では理論値に対する差分は理

図12 一様流パッチテストモデル

表1 パッチテスト断面通過流量誤差比較

	FE-CK	RT-HM
六面体要素	0.00%	0.84%
三角柱要素	0.00%	3.14%

論値の0.84%，三角柱要素では3.14%の誤差が生じた。このRT-HMにおける誤差について小野ほか(2013)では、メッシュ形状の歪み方向を流動方向に対して誤差を生じない方向に分割する、もしくは全て四面体要素で分割する対処方法が示されているが、有限要素法が本来持つ長所であるメッシュ分割の柔軟性を活用できなくなることとなる。

これに対して、FE-CKでは任意の要素形状で一様流を生成することができるFEMの節点流量を基に局所連続性を満足した要素構成面上の流量を算出していることから、FEMの長所を引き継ぎ、要素の歪みの影響を受けずに一様流が生成できていると考えられる。

4.2 格子構造モデル1

前節でFE-CKの均一場における一様流の再現性について確認した。本節では、透水係数が大きく異なる場の数値実験として流跡線解析の移行経路の対称性から精度検証が可能なMoséほか(1994)のモデルを用いた。解析条件を図13に示す。本モデルでは格子構造メッシュに対して透水係数で5乗の差異がある難透水性領域を設定し、モデル上面から底面への定常流動場を求めた。この場合、上面で通過流量が同じになる点から開始した流跡線の終端の座標は上面と底面で対称となる。この対称性を用いてFE-CKとRT0補間による流跡線解析手法の再現性について確認した。Moséほか(1994)は二次元モデルによる数値実験であるが、本解析では、メッシュ分割を三次元要素の直方体とし、奥行き方向の流れ場をゼロとして二次元場とした。定常流動場はRT-HMと本FE-CKで求め、水平・鉛直方向を25, 400分割した場合についてRT0補間を用いた三次元流跡線解析(以下、RT-PLと呼ぶ)を行った。

図14に25分割モデルによる従来手法(FEMと

図13 格子構造モデル1 解析条件

ルンゲ・クッタ法の組み合わせ)とRT-HM, FE-CKのRT-PL流跡線図を示す。流跡線は流量が同じとなる50点から計算した。(a)の従来手法では、難透水性領域を一部通過する流跡線が生じ、また、一部対称性が乱れた流跡線が得られた。これに対して(b)のRT-HM, (c)のFE-CKでは両者ともに難透水性領域を迂回し、対称性が確保された流跡線が得られた。この両者の流跡線の精度は次式に示す指標で検討した。

$$E = \sum_{i=1}^{50} |X_{bottom}^a - X_{bottom}^b|_i$$

$$\bar{E} = E/50 \quad (27)$$

$$E_R = \sum_{i=1}^{50} (E_x)_i \left/ \sum_{i=1}^{50} D_i \right.$$

ここに、 E : 流出点誤差の合計、 X_{bottom}^a : 対称性から得られる流出点の X 座標、 X_{bottom}^b : 流跡線による流出点の X 座標、 $\bar{E}$: 流出点平均誤差、 D : 流跡線の移行距離、 E_R : 流出点相対誤差。

表2に25分割と400分割の各指標を示す。RT-HM, FE-CKともに分割数によらず平均移行距離180m程度に対して、メッシュ分割数によらず流出点平均誤差が0.0001m (0.1mm)程度、流出点相対誤差では1E-5オーダーのパーセンテージと対称な流跡線が得られていることから、本RT-PL

(a)FEM とルンゲ・クッタ法の組み合わせ

(b)H・FEM

(c)FEM+CK 法

図 14 格子構造モデル 1 (25 分割)

表 2 流出先の対称性による誤差評価

指標	25分割		400分割	
	RT-HM	FE-CK	RT-HM	FE-CK
流出点誤差の合計(m)	0.00575	0.00630	0.00417	0.00397
流出点平均誤差(m)	0.00011	0.00013	0.00008	0.00008
流出点相対誤差(%)	0.00006	0.00007	0.00005	0.00004
平均移行距離(m)	183.103	182.350	182.016	181.976
総移行距離(m)	9155.128	9117.503	9100.795	9098.778

手法の妥当性が確認できた。

また、RT-HM と FE-CK の誤差は同程度であり、両手法ともにメッシュ分割数を大きくすることで誤差が減少し、同じ総移行距離に収束する

傾向が示されたことから、格子構造モデルでは FE-CK も RT-HM と同様の解析精度が得られることが確認された。

4.3 格子構造モデル2

不均質場に対する FE-CK のテストとして、図15に示す Mosé ほか (1994) のモデルを用いた。境界条件は前節のモデルと同様であり、RT-HM と比較して FE-CK の場合○で囲った部分について流跡線の違いが指摘されている。モデルを水平、鉛直方向を10分割したメッシュを用い、本 FE-CK に RT-PL を適用した流跡線解析結果を図16に示す。この場合、Mosé ほか (1994) の指摘と同様に低透水性部から高透水性部へ流出する流跡線が得られた。これは低透水性部と高透水性部

の境界が点で区切られていることから、節点で評価する FEM の離散化を考えると、低透水と高透水の区分けを主眼とするモデル化ではメッシュ分割が不適切となる。このため、着目点の低透水と高透水の区分けを考慮し、図17に示すように透水性の区切りを点ではなく微小な面として適切にメッシュ分割 (11分割) することで高透水性領域へ流出しない結果が得られた (図18)。

図 15 不均質場モデル

図 16 FE-CK による流跡線図

図 17 修正メッシュ

図 18 修正メッシュによる流跡線図

図19 RT-PHによる歪んだ六面体要素一様流場流跡線図

4.4 一様流パッチテストに対するRT-PLの適用

FE-CKでは一様流パッチテストを満足する解析結果が得られた。この解析結果に対してRT-PLを適用して流跡線を検討した。図19に歪んだ六面体要素の流跡線図を示す。上流側の断面中心点と中心点からY, Z軸方向に ± 0.25 移動した4点の計5点を開始点として流跡線解析を行った。この場合、流出座標は一様流動場として求まる座標と一致した。しかしながら、一直線になるべき流跡線が本RT-PLによる流跡線では蛇行し、流跡線移行距離と理論移行距離との差は、平均で理論移行距離に対して1.5%程度の誤差となった。

FE-CKでは一様流れ場が得られており、RT-PLは局所座標系内で軌跡の式として厳密に積分しているものの、Matringeほか(2006)が指摘している要素内でヤコビアン一定として積分したことによる誤差と考えられる。このRT0補間の要素形状の歪に対してMatringeほか(2006)では、要素形状の歪に対する頑強性を持たせるため、流跡線の積分をRT0局所座標系で積分するのではなく、流速成分を物理座標系へ変換後、4次のルンゲ・クッタ法で数値積分することで一様流速場でも移行経路、移行距離、移行時間を正しく計算できることを示している。この場合、流跡線に数値積分を用いるため積分の時間刻みに積分精度が支配されることとなり、RT0局所座標系の軌跡を厳密解として得られる長所を生かせないとも言える。

5. おわりに

本報告ではCordes and Kinzelbach (1992)が示した有限要素法結果から要素間の局所流量連続性を満足させる手法(FE-CK)を三次元場に拡張した。また、RT0補間によるハイブリットモデル(RT-HM)で用いられているRT0補間を用いた積分式による流跡線解析手法を三次元に拡張(RT-PL)し、FE-CKとRT-HMで求めた流速場にRT-PLを用い、三次元場におけるFE-CKの基本性能について検討した。

FE-CKは従来計算できなかった外形面も含めて三次元解析領域全体の局所流量連続性を満足する要素間流量を求めることができた。

RT-PLを用いた流跡線解析では、Moseほか(1994)のモデルの内、移行経路の精度検証が可能なモデルを用い、FE-CKとRT-HMに適用した場合、両手法ともに相対誤差(%)が $1E-5$ のオーダーと精度良い結果が得られた。また、不均質場のモデルでは低透水と高透水の配置によりRT-HMと異なる流跡線となる場合があったが、FEMとして適切なメッシュ分割を該当箇所に行うことで同様の流跡線が得られた。

歪んだ要素形状による一様流パッチテストでは、RT-HMでは断面通過流量で誤差が生じたが、FE-CKでは理論通りの断面通過流量が得られた。ただし、この一様流パッチテストのFE-CKによる流跡線の移行先は理論通りであるものの、RT-HMと同様に流跡線の蛇行が見られ

た。

本検討により、FE-CKはRT-HMと同程度の精度でFEM解析結果から局所流量連続性を満足する要素間流量を求められることが示された。また、一様流パッチテストから断面通過流量に関して歪んだ要素形状に対しても理論通りの流量が得られた。この要素形状の歪みに対して、FE-CKはRT-HMと比較して堅牢性が高いと考えられる。

RT-HM手法は差分法や有限体積法のように直接要素間流量（流速）の連続性を満足させることができ、透水性のコントラストが大きい不均質場での流跡線解析では確実に流出先を求めるような要求に対して適した手法であるが、三次元場では要素形状の歪みの影響を受け、断面通過流量に誤差が生じるといった短所が見られた。

FE-CK手法はFEMのポスト処理として要素間流量（流速）の連続性を満足させることができ、断面通過流量に関しては要素形状の歪みの影響を受けないといった長所が確認された。また、格子構造に透水性の不均質性を配置したようなモデルでは、節点を境界として透水性のコントラストが大きく異なる箇所ではFEMの離散化の特性から問題に応じて適切なメッシュ分割で対処できることを示した。

FEM、FE-CK、RT-HMは差分法や有限体積法と同様に近似解法として特徴があり、また、扱う次元によっても特性が異なり、長所・短所が表裏一体となるような関係が見られる。

数値解析を行う実務者は各手法の特徴を知り、扱う問題に対して有利となる特徴を持つ手法を選択して問題に取り組む必要がある。また、問題によっては複数の数値解析手法を適用し、各解析手法の長所・短所を理解して、相互に解析結果を評価することが重要と考えられる。

謝 辞

本検討に際し、2010年末から2012年にわたり「地下水流動解析手法の高度化勉強会」にご参加頂きました皆様には、活発な論議や検証解析など、色々のご協力頂きました。ここに深く感謝致します。

参考文献

- 青木広臣・鈴木俊一・下村雅則・川上博人 (2011) : 混合化形式有限要素法による放射性廃棄物処分施設を対象とした地下水流動解析. 土木学会論文集 C, 67 (4), 453-463.
- 赤堀邦晃・山口耕平・小松 喬・櫻井英行・菱谷智幸 (2012) : Raviart-Thomas 補間を導入したハイブリッドFEMによる基本性能解析及び例題解析. 日本地下水学会2012年春季講演会講演要旨, 36-41.
- 小野 誠・八木啓介・鈴木俊一 (2013) : 浸透流解析における歪んだ六面体要素での Raviart-Thomas 補間によって生じる誤差に関する検討. 日本地下水学会2013年春季講演会講演要旨, 8-13.
- 櫻井英行・郷家光男・白石知成・菱谷智幸・山浦昌之・鹿島浩之 (2013) : Raviart-Thomas 混合補間を用いた有限要素の三次元浸透流問題における基本性能. 土木学会論文集 A2 (応用力学), 69 (1), 30-40.
- 田中達也・安藤賢一・山本修一・菱谷智幸・白石知成 (2012) : 複数の解析手法を用いた地下水流動の評価結果の比較検討. 日本地下水学会2012年春季講演会講演要旨, 46-51.
- 日野幹雄 (1992) : 流体力学. 朝倉書店, 80-83.
- 松下洋介・齋藤泰洋・青木秀之・三浦隆利共訳 (2011) : 数値流体力学 第2版. 森北出版株式会社, 341-345.
- 森川誠司・並川 正・川端淳一・羽根幸司・櫻井英行・白石知成・郷家光男・菱谷智幸 (2012) : 放射性廃棄物処分坑道を対象とした3次元地下水流動解析における各種解析手法の比較. 日本地下水学会2012年春季講演会講演要旨, 42-45.
- 鷺津久一郎・宮本 博・山田嘉昭・山本善之・川井忠彦編者 (1981) : 有限要素法ハンドブック I 基礎編. 株式会社培風館, 356-359.
- Cordes C. and W. Kinzelbach (1992): Continuous Groundwater Velocity Fields and Path Line in Linear, Bilinear, and Trilinear Finite Elements. Water Resources Research, 28, 11, 2903-2911.
- Mosé R., P. Siegel and P. Ackerer (1994): Application of mixed hybrid finite element approximation in a groundwater flow model: Luxury or necessity?. Water Resources Research, 30, 11, 3001-3012.
- Matringe, S.F., R. Juanes and H.A. Tchelepi (2006): Robust streamline tracing for the simulation of porous

media flow on general triangular and quadrilateral grids. *Journal of Computational Physics*, 219, 992–1012.

Matringe, S.F. (2008) : Mixed finite element methods for

discretization and streamline tracing. Ph.D. Stanford University, 1–123.

(受付：2015年3月18日, 受理：2015年5月30日)