電気アナログモデルによる地下水解析の技術的諸問題 I

——主として連続アナログモデルについて——

庄田正宏*

Technical Problems of Electric Analog Model for Ground Water Analysis Part I A continuous analog model

Masahiro SHODA

Abstract

The author made experiments on ground water flow with two type electric analog models: One is a continuous model and another is a discrete model.

It is the purpose of this paper to point out several technical problems of these analog models. Two dimensional horizontal flow is dealt with in continuous analog model. In this model, the analogy between fluid flow through porous media and flow of electricity through conductive materials is considered taking two factors into account. They are the form of boundary and the distribution of potentials.

An analog apparatus is comprised of a power supply, an analog analyser, a probe and a pantograph. Potential distribution is measured on analog model. An analog analyser which uses the principle of wheatstone's bridge, and a potential dividers which give several potentials separately to analog model were made by the author. A sheet of carbon paper is used as a conductive material. The electrode is made by bending wire plated by tin and is attached to model by conductive silver paint. Areal differences in permeability are expressed by carbon paint. The conductive paper having the same shape as the actual field with a scale of 1/50,000 is constructed and silver paint or carbon paint are painted so as to represent field condition such as flood plain, old river channel, etc.

Lastly, error or reliability of the continuous analog model are examined. Following problems are listed up.

- 1) When a electrode is small, the contact resistance between electrode and conductive paper became important and measured values become unstable.
- 2) The model can not express areal differences in permeability quantitatively.
- 3) In high voltage area of an analog model, sensibility of galvanometer is too high to measure a potential distribution.
- 4) The continuous electric analog with conductive paper is suitable of simple systems, for example, a seepage flow an earth dam and a channel.

* 東京教育大学

1. はじめに

システムの研究の一手法としてシミュレーションがある。この方法は、現象をよりわかりやすいシステムに置きかえて解析できる、実際の現象の時間を調節できる。また現象を記録できるものに置きかえられるなどの数多くの特徴を持っている。電気アナログ解析はこのうちの一つであって、水文学の分野にも応用され、欧米では多くの事例研究が発表されている。しかし日本においては、いまだ数例しかない。その原因は、一般にアナログ解析はハード部門とソフト部門の区別がはっきりせず、かつ実際の運用にあたっては、多くの電気技術的な問題を含んでいるためであると考えられる。

そこでこの論文では、電気アナログ解析の原理と、筆者が行ったアナログモデルを使った地下水解析についての基礎的な実験を通して把握した技術的な問題点について述べる。

2. 従来までの研究

Kirchhoff は、1845年に電導性物質を使ったアナログモデルの方法を最初に提唱した。その後この方法は、フィールド問題を解く有効な手段として、電子工学、電磁波、磁場、弾性波、熱伝導などに関する分野で研究された。

流体力学へ応用されたのは1920年代になってからで、その最初の研究は Puppini (1921) の浸透水の挙動に関する研究に電気アナログを使ったものである。

戦後は、コンピューターの発達とともに、シミュレーションの一つの手法として多くの研究がなされるようになった。しかし、これらの研究のほとんどは、土木工学や物理学の方面の研究者たちによって行なわれており、水文学に盛んに用いられるようになったのは最近のことである。

アナログモデルによる水文学に関する研究を方法とテーマによって分類すると次のようになる。方法としては、連続モデルと不連続モデルに分けられる。両者は原理的には同じもので、対象となるシステムのフィールドを、連続的に表現するか、不連続で表現するかの相違である。基礎方程式の性質から、一般に不連続モデルのほうが複雑な問題を取扱うことができる。

モデルで扱う次元は、二次元が圧倒的に多い。浸透流や土壌水分を扱った場合は、垂直断面の二次元であり、流域を扱った場合は水平二次元である。三次元モデルはふつうの場合はほとんど使われず、不連続モデルでは揚水井のモデル化など特殊な例に限られている。

テーマで分けると、単独の水理現象を解析したもの、流域の水の流動を水収支の立場から明らかにしたもの、井戸のモデル化などの技術的なものの三つに分けられる。

3. 電気アナログ解析の原理

実際の現象やシステムを電気のシステムに置きかえるには、自然界に内在するアナロジー（相似性）を利用する。たとえば物体の運動系と電気の運動系とのアナロジーが考えられる。物体と電気とでは、それぞれのファクターは異なるが、その運動を表わす方程式の形が同じであれば、アナロジーは成立する。水文現象にもこれがあてはまる。

つまり図1において、多孔質媒体中を流れる流体に関するDarcyの法則と、電導体を流れる電流に関するOhmの法則との対応である。Darcyの法則から

$$Q = K \Delta y \Delta z \left(-\frac{\Delta h}{\Delta x} \right) \cdots \cdots (1)$$

図1 多孔質媒体を流れる流体と電導体を流れる電流とのアナロジー

ただし、 Q ：流量、 k ：透水係数、 h ：水頭、一方Ohmの法則から

$$I = \frac{V}{R}$$

抵抗に関しては

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{A} = \frac{1}{\sigma} \frac{\Delta x}{\Delta y \cdot \Delta z}$$

だから

$$I = \sigma \Delta y \Delta z \left(\frac{\Delta V}{\Delta x} \right)$$

ただし、 I ：電流の強さ、 σ ：比電導度あるいは比抵抗の逆数、 V ：電位、 R ：抵抗、 l ：抵抗体の長さ、 A ：抵抗体の断面積。

(1)式と(2)式の対応は、二つの現象の間にアナロジーが成立し、流

体の流れが電気の流れによって模擬されることを示している。そして次のように同じオーダーにあるファクターどうしがそれぞれ対応関係にある。

地 下 水 系	電 気 系
流量： Q	電流の強さ： I
透水係数： k	比電導度： σ
水頭： h	電位： V

程式で表わされ

$$\frac{Q^2 h}{Q x^2} + \frac{Q^2 h}{Q y^2} = 0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

ここで図2のような帯水層を考え、その縦横の長さを Δy , Δx に細分すると、差分近似によって点0について(3)式の左辺はそれぞれ

$$\frac{Q^2 h}{Q x^2} = \frac{h_1 + h_2 - 2h_0}{\Delta x^2}$$

$$\frac{Q^2 h}{Q y^2} = \frac{h_3 + h_4 - 2h_0}{\Delta y^2}$$

さらに、帯水層が均質等方性であるとする

$$\Delta x = \Delta y = a$$

だから(3)式は

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 - 4h_0 = 0 \quad \dots\dots\dots(4)$$

さて、本研究で問題とした地下水の流れは、ポテンシャル方程式で示される定常流と、拡散方程式で表わされる非定常流で、いずれも二次元で取扱った。これらの式と電流に関する式とのアナロジーを差分近似を使って証明する。

湧出しも吸込みもない定常流は Laplace 方

図2 均質等方性二次元のフィールド

一方、図3aのような抵抗の回路を考えると、
Kirchhoff の法則によって点0に関して

全電流 = 0

つまり

$$\frac{V_1 - V_0}{R_1} + \frac{V_2 - V_0}{R_2} + \frac{V_3 - V_0}{R_3} + \frac{V_4 - V_0}{R_4} = 0$$

$R_1 = R_2 = R_3 = R_4$ とすると

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + 4 V_0 = 0 \quad \dots\dots\dots(5)$$

これで(4)式と(5)式が対応し、アナロジーが成立する。

同じ定常流でも、湧出しや吸込みがある場合はPoisson 方程式で表わされる。

$$\frac{Q^2 h}{Qx^2} + \frac{Q^2 h}{Qy^2} = E \quad \dots\dots\dots(6)$$

図 3a 不連続アナログモデルの基本回路

ただし、 E ：湧出しあるいは吸込みの量差分近似と均質等方性によって(6)式は、

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 - 4h_0 = E \quad \dots\dots\dots(7)$$

この場合は図3bのような回路を考え、点0に I ampereに相当する電流を流せば、

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4 V_0 = I \quad \dots\dots\dots(8)$$

(7)式と(8)式の間にアナロジーが成立する。

非定常流については、Jacob(1950)に定義した方程式で次の形をとる。

$$\frac{Q^2 h}{Qx^2} + \frac{Q^2 h}{Qy^2} = \frac{S}{T} \frac{Qh}{Qt} \quad \dots\dots\dots(9)$$

ただし、 S ：貯留係数、 T ：透水量係数、 t ：時間
差分近似によって(9)式は、

$$\frac{h_1 + h_2 - 2h_0}{\Delta x^2} + \frac{h_3 + h_4 - 2h_0}{\Delta y^2} = \frac{S}{T} \frac{Qh}{Qt} \quad \dots\dots(10)$$

帯水層が均質等方性で、細分した格子の間隔を
 a とすると、

$$T(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 - 4h_0) = a^2 S \frac{Qh}{Qt} \quad \dots\dots(11)$$

ここで、図3cのような抵抗とコンデンサーの
回路を考えると、点0についてKirchhoff の法
則から

$$\frac{V_1 - V_0}{R_1} + \frac{V_2 - V_0}{R_2} + \frac{V_3 - V_0}{R_3} + \frac{V_4 - V_0}{R_4} =$$

$$C \frac{QV}{Qt} \quad \dots\dots\dots(12)$$

ただし、 C ：電気容量

図 3b 不連続アナログモデルの基本回路

図 3c 不連続アナログモデルの基本回路

アナロジーは成立することになる。つまり、Laplace の式で表わされた定常流を模擬するアナログモデルでは、ポテンシャルの相似性と境界条件の配置が同じであればよいのであって、モデルの電導性、逆に言えば固有抵抗値は関係ないことになる。したがって求めた解は、あくまでポテンシャル分布のみであって、それから透水係数や流量の値を出して論じることができない。これらを問題にするときは、透水係数に対応する抵抗をもった材料でスケールモデルを作り、電流値も合わせなければならない。

1) 解析装置とモデルの材料

連続アナログモデルで問題とする流れは定常流なので、アナログモデルを通る電流は、ある電位をもった直流になる。したがってモデルに与える電流は直流で、モデルは抵抗体だけの構成となる。

アナログモデル内のポテンシャルの分布を解析するには、ホイートストンブリッジの原理を応用する。図4aのPとQが同じ電位であると、PQ間に電流は流れず、検流計Gはゼロを示す。

このとき

$$R_1 / R_2 = R_3 / R_4$$

$$R_1 R_4 = R_2 R_3$$

$$\therefore R_1 / R = R_2 / R_4$$

図4aの抵抗 R_2 , R_4 にあたる部分を一つの変可抵抗器にして、抵抗 R_1 と R_3 をアナログモデルの一つの抵抗に置きかえる。(図4b)

こうして、変可抵抗器のある値に対して、つねに検流計の指針がゼロを指すように、プローブでアナログモデル上を追っていけば、それによって等電位線、あるいはそれと直交する流線が描ける。それはつまり、変可抵抗器の R_1 と R_2 の比に、アナログモデルの抵抗を配分している

$R_1 = R_2 = R_3 = R_4$ とすると

$$\frac{1}{R} (V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4V_0) = C \frac{QV}{Qt} \dots\dots(12)$$

これで(11)式と(12)式が対応し、非定常な二次元の地下水流と、抵抗コンデンサー回路を流れる電流との間にもアナロジーが成立する。

本研究では、アナログモデルの材料の特性から、定常流については電導紙を使った連続モデル、非定常流については抵抗とコンデンサーを使ったいわゆるRC回路を用いて解析を行った。

4. 連続アナログモデルによる解析

この場合は、(4)式と(5)式とが対応することから、ポテンシャルに関するファクターだけでア

図 4a 連続アナログ解析の原理

ことになる。

また、より多くの条件を入れてフィールドを再現するためには、解析本来の電位とは別に電位が認定できるポテンシャルデバイダーが必要である。これは抵抗によって電源から直接取ることができる。

以上の原理にしたがって製作した解析装置の構成は、図5のようになっていて、電源、解析器、プローブ、パンタグラフ、アナログモデルなどからできている。

(a) 電源と解析器

電源は直流安定化電源で、家庭用の交流100ボルトを直流にする整流部と、入力電圧の変化にかかわらず電圧を一定に保つ電圧安定化部からできている。使用電流はわずかであるが、出力電圧はなるべく広範囲に、しかも連続的に変えられるものが便利である。安定した解析を行うためには、このような定電圧電源を使うことが望ましい。

解析器には、検流部にあたるポテンシオメーターと、別に境界条件を与えるポテンシャルデバイダーと一緒に納められていて、その回路は図6のようになっている。

ポテンシャルを選択するためのポテンシオメーターには、精密な可変抵抗器を使っている。これは軸が10回転するので、1/1000まで読み取ることができる。さらにパネルには、この抵抗器にバーニアダイヤルを取りつけて使いやすくしてある。等ポテンシャル線を描くときに、ポテンシオメーターとアナログモデル上の点とが同じ電位にあることを確認するのが検流計である。アナログモデルに与える電圧は、抵抗体の変化を避けるために、なるべく低いほうがよいが、検出するのに十分な高さでなければならない。

図5 連続アナログ解析装置の構成

図4b 連続アナログ解析の原理

図6 解析器の回路

ポテンシャルデバイダーでは、自由にポテンシャルを設定できるように、やはり可変抵抗器を使用した。コストの関係から普通の通信器型にした。これも前記の精密なものにすれば、もっと細かく設定できる。解析器には、入力電圧の確認、ポテンシャルの選択、設定などのときに電圧を読み取るために、直流電圧計も取りつけてある。

(b) プローブとパンタグラフ

プローブは、アナログモデルに直接触れて電位を探るので、測定精密の点から言えば、先端は細いほうが優れている。しかしあまり細いと、アナログモデルの抵抗体を破壊してしまう危険性がある。このため筆者は、市販のボールペンの先に、コードを取りつけて使用したが、なかなか具合が良かった。

得られた等ポテンシャル線を、アナログモデル上にプローブで押しつけて書いてしまうと抵抗が変化すると同時に、後の実験に使えなくなってしまう。そこで、パンタグラフを使って他の紙にトレースするようにした。ところが、パンタグラフの作り方が悪く少しガタがあったので、測定精度を欠く結果になってしまった。やむを得ず今回の実験では、なるべく軽く押すようにして、モデル上に等ポテンシャル線を描いた。

(c) アナログモデル

連続電気アナログで、問題の対象となるフィールドを形成しているのは、ある一定の抵抗を持った電導性の物質で、固体では電導紙、電導繊維、電導ゴム、電導プラスチックなどがあるが、最も使われているのは電導紙である。筆者が手に入れた電導紙は、次の二種類である。

一つは、「Teledeltos」という商品名で、1948年に米国Western Telegraph Companyによって開発されたもので、電信の記録紙として使われているようである。この紙の電導紙の本体はカーボンブラックで、製造過程で紙パルプにまぜて作られる。紙の一方の面はラッカーがコーティングされていて絶縁されており、他方の面は、アルミニウムが塗布されている。紙の両側は電導性はよくないが、アルミニウム層は1ミクロンの厚さなので、プローブや電極が簡単に貫くことができる。

Teledeltos Paper には大きく分けてLowとHighがあって、筆者が入手したのは、L-39という単位面積当りの抵抗が約 $2.2\text{K}\Omega$ のものと、H-62sという約 $11.5\text{K}\Omega$ のもの、それから製品番号は不明だがHighで約 $15\text{K}\Omega$ のものである。

製造過程において抵抗値の細かいコントロールができないので製品のバラツキは約 $\pm 10\%$ ある。また異方性がある、紙の縦方向（ロール方向）は、横方向に比べて約10%低い抵抗値である。また一般に抵抗体は温度によって抵抗値が変化し、Carbon の場合温度が上がれば抵抗値は下る。その割合は大体 $-0.2\%/^{\circ}\text{C}$ である。さらに紙が暖められたときに起る抵抗の変化の別の原因は、紙に含まれる水分による湿度の変化である。したがって、Teledeltos Paper を使って正確な解析を行うには、温度や湿度をコントロールした状態で行わなければならない。

もう一種類の電導紙は、米国で教材用に造られているInterpretation Systems Incorporated社のアナログ解析器「Field Plotter」に付属しているもので、紙の一方の側にカーボンブラックが塗布されているものである。単位面積当りの抵抗は約 $3.7\text{K}\Omega$ で、これもTeledeltos Paperと同じような傾向をもっている。しかしTeledeltos Paper よりも異方性は小さいし、温度や湿度の変化に対しても比較的安定しているもので、常温で使うかぎりには問題はないと思われる。

以上のようないくつかの欠点にもかかわらず電導紙がよく使われるのは、安価なことと、簡単に裁断できるので、自由にフィールドを再現できるという簡単性による。

筆者は性能のすぐれている後者の電導紙を使用した。

(d) 電極と Silver Paint, Carbon Paint

アナログモデルに一定のポテンシャルつまり電位を与えるには、モデルが紙なので、入力あるいは出力となる場所に電極を設ける。電極は電導紙に比べて抵抗が無視できるものでなければならないが、実験ではスズメッキ線を境界の形に折り曲げて作り、電導紙の上に電導性の塗料兼接着剤で取りつけた。この薬品は、米国Dupont社の Silver Paint No4817とNo4922というもので、その名のごとく銀粉が主成分であるらしく、これが電気を通す役目をしている。溶剤としては、アセトン、酢酸ブチルなどが使える。このSilver Paintを使ったのは、電極を電導紙に圧着したのでは接触抵抗が大きくなってしまい、また紙の電導体を破壊してしまって、その部分の抵抗値が変化してしまうからである。

基本的なモデルでは電導紙をそのまま使い、透水性はどこも等しいと仮定したが、後の実験では部分的に透水性を変えた。それに使われたのはカーボンブラックの粉末を溶したもので、米国Dyna-loy社の Conductive Carbon である。これは溶きかたによって濃くも薄くもなるので、自由に電導性を変えることができる。しかし、各々の濃度でどの程度抵抗が変わるかは実験していないのでわからない。また筆で塗るので塗りむらができたりして均等にはいかない。

2) フィールドの境界条件とそのモデル化

フィールドの境界条件としては、次のものが考えられる。

(a) フィールドの形

フィールドの形は、電導紙を鋭いナイフで切断することによって、自由に作り出すことができる。縮尺は、紙の大きさと測定精度から適当に決める。タンクモデルでは、電解液を入れる器をその境界に合わせてつくらなければならないのでかなり面倒である。

(b) 等ポテンシャル境界

等ポテンシャル境界は、その部分に Silver Paint を塗ったり、金属箔を貼ったりすればよく、電極もこのなかに含まれる。

(c) 流れを促進する条件、防げる条件

流れを促進させるものとしては、高い透水係数や水路などがある。この問題は、Carbon Paint で電導性を高めることによって解決される。その程度に応じて塗る回数を多くすればよい。逆に防げるものがあるときは、その部分に穴をあけたり、切断したりして電導性を下げる。

(d) 特別なポテンシャル

フィールド内に 特別なポテンシャルを作り出すには、直流電源とポテンシャルデバイダーを使って、いくつかの不連続な点電極で電位を与えればよい。しかし、もとのポテンシャル（電位）勾配と別に与えた電位とに大きな差があると、測定が不安定になりやすい。

(e) 特別な流れ

フィールド内に吸い込みや湧き出しがあるときは、前述のPoissonの方程式を考えた場合である。これを可能にする定電流電源は、高い電圧の定電圧電源と、アナログモデルに比べてはるかに大きな抵抗によって近似的につくり出されるが、簡単なことではない。スケールモデルをつくる場合にもこれが言える。

以上の方法によって、実際のフィールドの境界条件により忠実な連続アナログモデルを作成することができる。

3) 解析例

連続アナログモデルの解析例を第7図に示す。

これは富山県黒部川扇状地で、現沖積扇状地面について、地下水は扇頂から扇端へ一方的に流れ、他の地域からの出入りはないものとして、水頭10cmにつき1Vの割合で電位を与えた場合の等水頭線をメートルで表わしてある。なお透水性は河川や水路の部分で変えてある。

これは途中の段階の解析例なので、実測値とは違っている。

4) 連続アナログ解析の誤差

電導紙を使ったアナログモデルについて、得られた解析値が実測値と合うかどうかということではなく、解析値そのものの信頼性に関して、その問題点を述べる。

信頼性を危くするものとして、次の三つの問題点があげられる。

(a) 電極を取りつけたり等ポテンシャル地域をつくり出すために、Silver Paintを使うことについて前に述べたがこれは接触抵抗を小さくするためであった。

しかし小さな点電極の場合に、接触抵抗が表われて不安定な値を示すのもあった。これについては、緒形(1960)が指摘しているが、電導紙と電極の間に接着剤の薄い膜ができるためであるらしい。緒形はこの点に関して二三の解決法を行ったが、筆者の研究では電導紙が違うので、まだ完全に解決する方法が見つからず、今後に残された課題の一つである。

(b) 電導性(透水性)を部分的に変えるためにCarbon Paintを使用したか、この溶きかたによってCarbonの濃度が変わって、塗るごとに電導性が違う。

また筆で塗るため塗りむらができてしまう。

これらの欠点は、モデルの条件が均一に与えられていないことになる。

(c) 電位の低いところでは、検流計の感度はちょうどよくて、測定しやすい振れを示すが、電位の高いところではそれだけ流れる電流の強さも大きいので、振れすぎてしまい測定しにくく不安定な原因を起している。

図7 連続アナログモデルによる解析例