変形・多孔質媒体中における地下水流動の基礎理論

樋口 政 男*

Basic Theory of Ground-Water Flow in Deformable Porous Media

Masao HIGUCHI**

Abstract

One of the major problems facing ground-water hydrologists is to clarify the mechanism between ground-water flow and land subsidence.

A generalized equation governing the movement of water in saturated deformable porous media is derived, in the present study, from the equations of mass conservation, the equations of motion, and the equations of state. The equations of mass conservation are expressed in the Eulerian specification of the flow field. The equation for ground-water is approximated by a generalized Darcy's equation. The equation of motion for porous media is expressed by an equilibrium equation. The stress-strains are approximated by the well-known expressions of generalized Hooke's law for an isotropic elastic body.

It is assumed that densities of porous media do not change, that soil displacements occur only in the vertical direction, that the total stresses do not change, that the advective rate of change is neglected by comparison with the local rate of change, and that ground-water is an ideal liquid with small compressibility.

I はじめに

地下水流動のメカニズムを明らかにするためには、変形・多孔質媒体中における地下水の流れの場と応力の場との密接な関係を明らかにする必要がある。

多孔質媒体中における地下水の流れの方程式は Darcy (1856) により実験的に導かれた。

土質力学分野において、Terzaghi (1925) は土の変形に着目、有効応力概念を導入し、圧密理論を確立した¹⁾。一方、地下水学分野においても、Meinzer (1928) は被圧帯水層が水圧の増減に従い変形するという事実を認めた。

Theis (1935, 1938) は地下水流と熱拡散との相似性を用いて、被圧帯水層に穿った完全貫入井からの揚水時における非定常流に関して解析解を提出し、帯水層の透水量係数と貯留係数とを定義した。Jacob (1940, 1950) はTheis が用いた熱拡散理論との相似性を排し、等方・均質性多孔質媒体

* 水温調査会

** Research Institute for Water Temperature

について、連続の式と Darcy の法則とから、それぞれ 2 次元、3 次元地下水流動を物理的に定式化した。同様に野満・山下 (1943) も地下水の運動法則と連続の式とから、物理的に定式化し、その理論を実際の井戸揚水例と模型実験とによって検証も行なった。

Terzaghi & Fröhlich (1936) は等方・均質性多孔質媒体であること、Darcy の法則が成立すること、透水係数は圧密過程のすべての段階で一定であること、多孔質媒体の変形は垂直方向のみであること、応力-ヒズミ関係は線型であること、ヒズミは微小量であることなどの条件を仮定し、1 次元圧密方程式を導入し、その解析解を得た²⁾。

日本における地盤沈下現象は関東大震災後、東京、大阪などにおいて、観測され始めた。広野・和達 (1939)、和達 (1940) は種々の観測結果から、沈下の主原因が地下水の水圧減少によるものであり、地下水の水圧変化と沈下速度とが比例関係にあることを見出した。さらに、和達・広野 (1942) は上記の比例関係から粘性項を導入し、Terzaghi 理論の拡張を試みた。

Biot (1941) は等方性媒体について、地下水の流れの場と応力の場とを物理的に関連づける 3 次元圧密方程式を導いた。その後、Biot (1955) は非等方性媒体にもこの理論を拡張した。

Hantush (1960) は比貯留係数の定義を与え、貯留係数は比貯留係数と帯水層の厚さとの積であるとした。

De Wiest (1966)、Cooper (1966)、及び Madsen (1969) により、Jacob (1950) の定式化や比貯留係数の定義式について論争がなされた。その結果、De Wiest による Darcy の法則の適用と比貯留係数の定義式に誤りがあること、水平 2 次元化すると De Wiest の式も Jacob の式と同一の式となることが判明した。

Verruijt (1969) は Biot (1941) の理論を基礎に、地下水の流れの場と応力の場とを明確に関連づけ、地下水学と土質力学とを結びつける理論の体系化を行なった。

吉国 (1972) は線型弾性体についての 3 次元圧密理論の基礎概念を明確化し、体系化を試みた。

1960 年代後半ごろから、電子計算機の発達に伴い数値シミュレーション手法を活用し、地下水・地盤沈下解析が行なわれるようになった。

イタリアのベニスの地盤沈下について、Gambolati & Freeze (1973, 1974) は地下水流動理論と圧密理論を論じると共に、two-step model を用い数値シミュレーションを行なった。Lewis et al. (1978) は Gambolati & Freeze の two-step model を統合した fully coupled model を用いて計算を行なった。その結果、Gambolati & Freeze の結果よりも実測値に近い計算結果を得た。

日本における地盤沈下について、榎根 (1973)、水収支研究グループ (1976) は水平 2 次元モデル、準 3 次元モデル、及び断面 2 次元モデルを用い数値シミュレーションを行ない、地下水域の保全を定量的に評価することを試みた。なお、建設省土木研究所資料 (1977) として、上記のモデルを含めた地下水シミュレーションモデルについて評価・検討されたものが発表されている (榎根・樋口；鎌田・原田；島津)。

II 基礎方程式

多孔質媒体や地下水はその物質構造を分子のスケールまで細かく見れば、その物理的諸性質は物体の各点で極めて複雑に変化する。しかし、内部の 1 点 P における物理的性質として、点 P を含む微小な体積 (微小体積要素) についての平均値をとることにとすると、物理的性質は点の連続関数となる。

このような連続的な物理的性質をもつ仮想的な物体（連続物体あるいは連続体）として、多孔質媒体や地下水を取り扱う。

物体の物理的性質を示す均質性、一様性、及び等方性という用語の定義を明確にする。ある物理量の確率的性質が空間あるいは時間について、その座標の原点をずらしても不変である、すなわち平行移動を行なってもその性質が変化しない場合、均質 (homogeneous) あるいは一様 (uniform) であるという。そうでない場合、不均質 (nonhomogeneous) あるいは非一様 (nonuniform) であるという。この定義は地球物理学や確率論においても、一般的に用いられているものである（大久保, 1970 ; 今村, 1976 ; Bahr, et al., 1978)³⁾。次に、ある物理量の確率的性質が空間座標について回転を行なっても変化しない場合、等方 (isotropic) であるという。そうでない場合、非等方 (anisotropic) であるという。

定式化の前提条件として、多孔質媒体は地下水で完全に飽和されているものとし、温度傾度や浸透圧傾度はないものとする。

1 連続方程式

〔地下水〕 カーテシアン座標系中における点A (x, y, z) の近傍に、空間に固定された任意の体積 $dx \, dy \, dz$ なる微小体積要素を通過する地下水の質量収支を考える (図1)。点Aでの地下水の速度を $\mathbf{V}_w$ [$L \, T^{-1}$]、 $\mathbf{V}_w = (V_{wx}, V_{wy}, V_{wz})$ 、地下水の密度を ρ_w [ML^{-3}]、多孔質媒体の間隙率を n とする。

ABCD面を通りこの微小体積要素に入る単位時間当りの地下水の質量は $(\rho_w n V_{wx}) dy \, dz$ となる。また、EFGH面を通過し、この微小体積要素から出る地下水の質量は $\{(\rho_w n V_{wx}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_w n V_{wx}) dx\} dy \, dz$ となる。よって、この微小体積要素に入る正味の流入量は $-\frac{\partial}{\partial x}(\rho_w n V_{wx}) dx \, dy \, dz$ とな

図一 1 微小体積要素を通る地下水の流れの成分

る。同様に、 y 軸と z 軸に垂直な面についても、それぞれの正味の流入量を求めることができる。

ところで、この微小体積要素中に地下水の質量が蓄積される速度(蓄積量の時間変化)は $\frac{\partial}{\partial t}(\rho_w n)$ $dx dy dz$ で表わされるので、次の地下水の質量保存式(連続方程式)が成立する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_w n) dx dy dz = & \left[(\rho_w n V_{wx}) - \left\{ (\rho_w n V_{wx}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_w n V_{wx}) dx \right\} \right] dy dz \\ & + \left[(\rho_w n V_{wy}) - \left\{ (\rho_w n V_{wy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_w n V_{wy}) dy \right\} \right] dz dx \\ & + \left[(\rho_w n V_{wz}) - \left\{ (\rho_w n V_{wz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_w n V_{wz}) dz \right\} \right] dx dy \\ & + L dx dy dz \dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\partial}{\partial t}(\rho_w n) dx dy dz = & - \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(\rho_w n V_{wx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_w n V_{wy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_w n V_{wz}) \right\} dx dy dz \\ & + L dx dy dz \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

ここで、この微小体積要素中での単位体積当りの生成速度を $L [ML^{-3}T^{-1}]$ とする。

微小体積要素 $dx dy dz$ は任意にとられるので、(2)式は

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_w n) = - \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(\rho_w n V_{wx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_w n V_{wy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_w n V_{wz}) \right\} + L \dots\dots\dots(3)$$

となり、ベクトル表示すると、(3)式は

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_w n) = -(\nabla \cdot \rho_w n \mathbf{V}_w) + L \dots\dots\dots(4)$$

と表わされる。ここで、 ∇ はナブラ記号で、 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right)$ 、 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ は x , y , z 座標の単位ベクトルである。

〔多孔質媒体〕 〔地下水〕の頃と同様に、多孔質媒体の質量保存式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \rho_s (1-n) \} = - \{ \nabla \cdot \rho_s (1-n) \mathbf{V}_s \} \dots\dots\dots(5)$$

で表わされる。ここで、 ρ_s は多孔質媒体の密度 $[ML^{-3}]$ 、 $\mathbf{V}_s$ は多孔質媒体の速度 $[LT^{-1}]$ で、 $\mathbf{V}_s = (V_{sx}, V_{sy}, V_{sz})$ である。

2 運動方程式

〔地下水〕 地下水の流れは非定常的であっても、速度の時間的变化は極めて緩慢で、近似的に擬似定常流と見なされ、Darcy の法則で表わされる。すなわち、

$$\mathbf{V} = -K_{ij} \nabla \phi \dots\dots\dots(6)$$

と表わされる。ここで、 $\mathbf{V}$ は Darcy 速度あるいは比流束 $[LT^{-1}]$ で、 $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$ である。変形・多孔質媒体に Darcy の法則を適用する場合、Darcy 速度は地下水の速度 $\mathbf{V}_w$ から多孔質媒体の速度 $\mathbf{V}_s$ を減じた相対的な速度と考えられる。よって、(6)式は

$$\mathbf{V} = n(\mathbf{V}_w - \mathbf{V}_s) = -K_{ij} \nabla \phi \dots\dots\dots(7)$$

と表わされる。Florin (1961) によると、(7)式は Gersevanov (1934) により初めて提案され、Darcy-Gersevanov の式と名づけられている⁴⁾が、本論では Darcy の一般式と名づけることにする。

(6)式、(7)式の ϕ は Hubbert (1940) の流体ポテンシャルで、

$$\varphi = z + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho_w g} \dots\dots\dots(8)$$

と表わされる。ここで、 p は地下水の水圧 [FL^{-2}], p_0 は標準大気圧, g は重力の加速度 [LT^{-2}] である。

また, (6)式, (7)式の K_{ij} は透水係数 [LT^{-1}] で, テンソル量である。(7)式を行列表示すると,

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(9)$$

となる。ところで, K_{ij} の行列が対称で, ある特定の座標 (主軸) に対して回転すると, (9)式は

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(10)$$

と表わされる。さらに, 等方性媒体ならば, 透水係数はスカラー量 (K) となる。

ところで, Darcy の法則からのずれは Darcy 速度あるいは比流束が大きい領域 (上限領域) と小さい領域 (下限領域) とで生じる可能性がある。

比流束が大きくなり, 慣性項が無視できなくなる流れになる場合, Darcy の法則が適用できなくなる上限動水勾配が存在する。Darcy の法則で表わされる線型関係からずれ始める上限は, レイノルズ数が 1~10 になる時であることが知られ, この領域では例えば Forchheimer の法則⁵⁾ が成立することが知られている。

逆に, 超過圧密粘性土中において, 比流束が小さくなると, 土粒子の表面に引きつけられる吸着水により微小間隙が満たされ, 自由水の浸透を阻止するような場合が考えられる。Kutilek (1972) は下限領域について, 12種類の非 Darcy 流を論じると共に, その原因及び実験誤差についても総合的な報告を行なっている。

なお, Terzaghi の圧密理論では圧密過程のすべての段階で透水係数が一定とされるが, Taylor (1948), 三笠 (1963), 沢田・鳥山 (1965), Helm (1976), Narasimhan & Witherspoon (1977) によると, 一定ではなく数オーダー減少する。例えば,

$$K = K_0 \cdot 10^{\left(\frac{e-e_0}{C_k}\right)} \dots\dots\dots(11)$$

などと表わされる。ここで, e は間隙比で, 間隙率との関係は $e = n/(1-n)$ である。 e_0 と K_0 は初期の間隙比と透水係数, C_k は係数である。

〔多孔質媒体〕 多孔質媒体が一定の荷重を受けると, 過剰間隙水圧が生じ, 時間と共に徐々に脱水しその体積を減少する。

土の圧縮は弾性的なものと塑性的なものとが認められている。弾性的な圧縮は荷重を除けば, 元に戻る土の弾性変形による可逆的圧縮であり, 塑性的な圧縮は荷重を除いても, 元に戻らない土の塑性

変形による非可逆的圧縮である。

Terzaghi により確立された圧密理論で説明できる圧密を1次圧密, 説明できない圧密を2次圧密という。1次圧密は一定の荷重を加えると, 過剰間隙水圧が生じ, 時間と共にゆっくりと脱水し, 体積が減少する現象である。媒体の変形は線型の弾性理論で説明される。圧縮されきって, 過剰間隙水圧が0になれば, 圧密沈下は終了する。一方, 2次圧密は1次圧密のように, 圧密されきって, 過剰間隙水圧が0になれば, 圧密沈下が終了するのではなく, その後も引き続く長時間のクリープ的沈下である。媒体の変形は粘弾性理論で説明される。

ところで, 土粒子の実質部分の圧縮率は約 $2 \times 10^{-12} \text{cm}^2 \text{dyne}^{-1}$ であり (Skempton, 1961⁶⁾), 水の圧縮率の約 $5 \times 10^{-11} \text{cm}^2 \text{dyne}^{-1}$ と比較しても次数が低い。そこで, 土粒子の実質部分の圧縮性は良い近似で省略することができる。

図2のような微小体積要素A B C D E F G Hにおいて, 運動方程式を考慮する。圧密現象はその変形の変位が微小であるので, 慣性力は無視される。

図—2 微小体積要素に使用する応力成分

面E F G Hを通して, 面E F G Hに働く単位面積当りの力, すなわち応力 (法線の正の側が負の側に及ぼす場合を正とする) を考え, T_x とする。 T_x の各成分を (T_{xx}, T_{yx}, T_{zx}) とする。 T_{xx} は面E F G Hに垂直に働く応力 x の成分, T_{yx} と T_{zx} は面E F G Hに平行に働くずりの応力の成分を表わす。同様にして, y 軸, z 軸に垂直な面についてもそれぞれ (T_{xy}, T_{yy}, T_{zy}) , (T_{xz}, T_{yz}, T_{zz}) の成分をもつ応力が定義される。

面E F G Hと面A B C Dに働く応力の成分の和は $\left\{ T_{xx} - \left(T_{xx} - \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} dx \right) \right\} dy dz = \frac{\partial}{\partial x} T_{xx} dx dy dz$ となる。同様に, 面B C G Fと面A D H Eに働く応力の成分の和, 面D H G Cと面A E F Bに働く応力の x 成分の和は, それぞれ $\frac{\partial}{\partial y} T_{xy} dx dy dz$, $\frac{\partial}{\partial z} T_{xz} dx dy dz$ となり, この微小体積要素に働く x

成分は

$$\left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \right) dx dy dz$$

となる。同様に、 y 成分と z 成分はそれぞれ

$$\left(\frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} \right) dx dy dz$$

$$\left(\frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right) dx dy dz$$

となる。故に、この微小体積要素に働く応力の各成分のつりあいの関係から、この微小体積要素の運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} + \rho_s F_x &= 0 \\ \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} + \rho_s F_y &= 0 \\ \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \rho_s F_z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

と表わされる。ここで、 F_x (FM^{-1})、 F_y 、 F_z はこの微小体積要素に働く体積力の x 、 y 、 z 成分である。

次に、圧密理論では媒体に加わる全応力 (T) は有効応力 (τ) と中立応力 (p) とから成ると考えられる。有効応力は媒体の荷重による応力で、媒体の力学的性質に直接影響を与える。一方、中立応力 (間隙水圧) は地下水の圧力で、媒体の力学的性質に影響を与えない。

初期の状態はつりあい状態 (肩文字 0 で表わす) にあり、それからのずれだけを考慮すると、重力による体積力は省略され、(12) 式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= -\frac{\partial p_e}{\partial x} \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= -\frac{\partial p_e}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= -\frac{\partial p_e}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

と表わされる。ただし、

$$\left. \begin{aligned} T_{xx} &= \tau_{xx} - p, & T_{yy} &= \tau_{yy}, & T_{zy} &= \tau_{zy} \\ T_{yy} &= \tau_{yy} - p, & T_{zx} &= \tau_{zx}, & T_{xz} &= \tau_{xz} \\ T_{zz} &= \tau_{zz} - p, & T_{xy} &= \tau_{xy}, & T_{yx} &= \tau_{yx} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

と表わし、

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx} &= \tau_{xx}^0 + \sigma_{xx}, & \tau_{yy} &= \tau_{yy}^0 + \sigma_{yy}, & \tau_{zz} &= \tau_{zz}^0 + \sigma_{zz}, \\ \tau_{yz} &= \tau_{yz}^0 + \sigma_{yz}, & \tau_{zx} &= \tau_{zx}^0 + \sigma_{zx}, & \tau_{xy} &= \tau_{xy}^0 + \sigma_{xy}, \\ p &= p^0 + p_e \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

で表わした。

一般に、有効応力 σ_{ij} とヒズミ ε_{ij} との関係は弾性係数を C_{ij} [FL^{-2}] で表わすと、

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (16)$$

となる。また、ヒズミ ε_{ij} と変位 $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ との関係は

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, & \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

で表わされる。

さらに、変位と変形速度との関係は

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_s = \nabla \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \nabla \cdot \mathbf{u} \dots\dots\dots (18)$$

となる。また、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon \dots\dots\dots (19)$$

である。ここで、 ε は体積ヒズミである。(18)式と(19)式とから、

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_s = \frac{D\varepsilon}{Dt} \dots\dots\dots (20)$$

と表わされる。

3 状態方程式

〔地下水〕 地下水を等温条件下における理想液体と見なすと、

$$\beta = \frac{1}{\rho_w} \frac{d\rho_w}{dp} = \text{一定} \dots\dots\dots (21)$$

で表わされる。ここで、 β は地下水の圧縮率 $[L^3 F^{-1}]$ である。

次に、 β は一定数であるから、(21)式を積分すると、

$$\rho_w = \rho_0 \exp\{\beta(p - p_0)\} \dots\dots\dots (22)$$

となる。ここで、 ρ_0 は p_0 条件下での地下水の密度 $[ML^{-3}]$ で、定数値である。

〔多孔質媒体〕 多孔質媒体の密度は圧密過程で不変と見なす。すなわち、多孔質媒体の状態方程式は

$$\rho_s = \text{一定} \dots\dots\dots (23)$$

と表わされる。

Ⅲ 基礎方程式の展開

多孔質媒体の連続方程式、つまり(5)式と多孔質媒体の状態方程式、つまり(23)式とから、

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla \cdot (1 - n) \mathbf{V}_s \dots\dots\dots (24)$$

が導かれる。

Darcy の一般式, つまり(7)式は

$$n\mathbf{V}_w = \mathbf{V} + n\mathbf{V}_s \dots\dots\dots (25)$$

に変形される。

地下水の連続方程式, つまり(4)式は変形すると,

$$\rho_w \frac{\partial n}{\partial t} + n \frac{\partial \rho_w}{\partial t} = -(\nabla \cdot \rho_w n \mathbf{V}_w) + L$$

となる。そこで, (24)式と(25)式を代入, 変形すると,

$$\rho_w \{\nabla \cdot (1-n) \mathbf{V}_s\} + n \frac{\partial \rho_w}{\partial t} = -\{\nabla \cdot (\rho_w \mathbf{V} + \rho_w n \mathbf{V}_s)\} + L$$

$$\therefore n \frac{D\rho_w}{Dt} + \rho_w \nabla \cdot \mathbf{V}_s = -(\nabla \cdot \rho_w \mathbf{V}) + L \dots\dots\dots (26)$$

となる。

次に, 地下水の状態方程式, つまり(22)式は

$$\frac{D\rho_w}{Dt} = \rho_w \beta \frac{Dp}{Dt} \dots\dots\dots (27)$$

となる。よって, (26)式に(27)式を代入すると,

$$\rho_w \beta n \frac{Dp}{Dt} + \rho_w \nabla \cdot \mathbf{V}_s = -(\nabla \cdot \rho_w \mathbf{V}) + L \dots\dots\dots (28)$$

となる。さらに, Darcy の一般式, つまり(6)式を代入すると, (28)式は

$$\rho_w \beta n \frac{Dp}{Dt} + \rho_w \nabla \cdot \mathbf{V}_s = \nabla \cdot (\rho_w K_{ij} \nabla \varphi) + L \dots\dots\dots (29)$$

と表わされる。

従って, (13)式と(29)式の4個の方程式の未知変数は φ と $\mathbf{V}_s$ の3成分の合計4個となり, 解が得られるはずである⁷⁾。しかしながら, 解を得るためには, 透水係数 K_{ij} の6個, 弾性係数 C_{ij} の21個, 及び間隙率 n の合計28個のパラメーターが必要となる。(10)式で表わされるように, 透水係数や弾性係数が主成分だけで規定される場合, 上記のパラメーターは8個となる。現状ではこれらのパラメーターを完全に求めることは容易でなく, さらに数値的に求めようとしても計算機の制約もある。そこで, 地下水流動を解明しようとする場合は多孔質媒体の変形や地下水の圧縮性について以下のような近似を行なう。

IV 基礎方程式の近似

〔近似1〕 等方性媒体の場合, その対称性も考慮し, 一般化されたフックの法則から, (16)式は

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (30)$$

と表わされる。ここで, μ と λ は Lamé の定数であり, それぞれ

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \lambda &= \frac{\nu E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

と表わされる。ここで、 E はヤング率 $[FL^{-2}]$ 、 ν はポワソン比である。

一般に基礎地盤上に構造物がのる時などの多孔質媒体の変形は垂直方向にも、水平方向にも生じるが、水平方向に一樣な荷重がかかる場合の多孔質媒体の変形は垂直方向のみと考えられる。そこで、地下水流動を問題とする場合、多孔質媒体の変形は垂直方向のみと仮定する。つまり、変位 $\mathbf{u}$ は $\mathbf{u} = (0, 0, u_z)$ 、変形速度 $\mathbf{V}_z$ は $\mathbf{V}_z = (0, 0, V_{zz})$ 、体積ヒズミ ϵ は $\epsilon = \epsilon_{zz}$ になる。よって、(30)式は

$$\sigma_{zz} = (2\mu + \lambda)\epsilon_{zz} = (2\mu + \lambda)\epsilon \dots\dots\dots (32)$$

となる。

さらに、全応力は不変であると仮定すると、(13)式は

$$\sigma_{zz} = p_e \dots\dots\dots (33)$$

となる。よって、(20)式、(32)式、及び(33)式から

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_z = \frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{1}{(2\mu + \lambda)} \frac{Dp_e}{Dt} = \frac{1}{(2\mu + \lambda)} \frac{Dp}{Dt} \dots\dots\dots (34)$$

となる。ここで、

$$\alpha = \frac{1}{(2\mu + \lambda)} \dots\dots\dots (35)$$

で表わす。 α は多孔質媒体の圧縮率（垂直方向） $[L^2F^{-1}]$ である。

〔近似 2〕 多孔質媒体の変形速度が地下水の速度に比較して微小であり、移流的变化は局所的变化に比べて小さく無視できるとすると、

$$\frac{\partial p}{\partial t} \gg \mathbf{V}_z \cdot \nabla p, \quad \frac{Dp}{Dt} \doteq \frac{\partial p}{\partial t} \dots\dots\dots (36)$$

となる。

〔近似 3〕 地下水の圧縮性が小さい場合、(22)式を Taylor 展開し、2 次の項以下を省略すると、(22)式は

$$\rho_w = \rho_0 \{1 + \beta(p - p_0)\} \dots\dots\dots (37)$$

となる。よって、(8)式は

$$\varphi = z + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho_0 g \{1 + \beta(p - p_0)\}} \dots\dots\dots (38)$$

となるので、 t で微分すると、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{\rho_w g} \frac{\partial p}{\partial t} \dots\dots\dots (39)$$

と表わされる。

従って、以上の近似から(29)式に(34)式、(36)式、及び(39)式を代入すると、(29)式は

$$\left\{ \rho_w (\alpha' + n\beta') \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho_w K_{ij} \nabla \varphi) + L \dots\dots\dots (40)$$

となる。ここで、 $\alpha' [L^{-1}]$ 、 $\beta' [L^{-1}]$ はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= \rho_w g \alpha \\ \beta' &= \rho_w g \beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

である。さらに、(40)式は

$$\rho_w S_s \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho_w K_{ij} \nabla \varphi) + L \dots\dots\dots (42)$$

とも表わされる。ここで、 S_s は比貯留導数 $[L^{-1}]$ で、

$$S_s = \alpha' + n\beta' \dots\dots\dots (43)$$

で与えられ、単位水頭変化によって単位体積の多孔質媒体から放出される地下水の量と定義される。

(40)式は Gambolati & Freze (1973) の式よりも一般的な式であり、Freeze (1971) の式と本質的に同一の式である。

V おわりに

多孔質媒体中の地下水流動の基礎方程式を地下水と多孔質媒体に関する質量保存式、運動方程式、及び状態方程式とから導いた。

質量保存式はオイラー的に記述される。地下水の運動方程式は Darcy の一般式で記述される。多孔質媒体の運動方程式はつりあいの式で記述される。地下水は理想液体として、多孔質媒体の密度は圧密過程において不変であるとして扱われる。

多孔質媒体は等方性であると仮定され、応力とヒズミの関係は一般化されたフックの法則で近似される。さらに、多孔質媒体の変形は垂直方向のみであり、全応力は不変であると仮定される。移流的変化は局所的変化に比較して小さく、無視できると仮定される。地下水の圧縮性は小さいとされる。

本論文を筑波大学・東京教育大学を停年御退官された山本荘毅先生に献呈いたします。

注

- 1) テルツァギ・ペック (1969) による。
- 2) テルツァギ・ペック (1969), 吉国 (1972) による。
- 3) Greenkorn & Kessler (1969) は均質性と一様性とを区別している。
- 4) 大草重康 (1971) による。
- 5) $J = aq + bq^2$ あるいは $J = aq + bq^2 + cq^3$ と表わされる。ここで、 J は動水勾配、 q は比流束、 a , b , c は係数である。
- 6) 赤井 (1974) による。
- 7) 「近似」を使うと、(29)式は φ と $\mathbf{V}_s$ についての式となる。

記 号

単位の次元は次のとおりである。ただし、 $[L]$ は長さ (cm), $[M]$ は質量 (g), $[T]$ は時間 (sec), $[F]$ は力 (dyne) である。

C_{ij} ; 多孔質媒体の弾性係数 $[FL^{-2}]$

C_k ; 係数 (11)式)

E ; ヤング率 $[FL^{-2}]$

- e ; 多孔質媒体の間隙比, 無次元
 e_0 ; 初期の多孔質媒体の間隙比, 無次元
 $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$; 体積力 $[FM^{-1}]$
 g ; 重力の加速度 $[LT^{-2}]$
 K_{ij} ; 透水係数 $[LT^{-1}]$ テンソル量
 K ; 透水係数 $[LT^{-1}]$ スカラー量
 K_0 ; 初期の透水係数 (11)式
 L ; 単位体積, 単位時間当りの生成速度 $[M^3L^{-3}T^{-1}]$
 n ; 多孔質媒体の間隙率, 無次元
 p ; 地下水の水圧 $[FL^{-2}]$
 p_0 ; 標準大気圧 $[FL^{-2}]$
 p^0 ; つくあい状態での間隙水圧 $[FL^{-2}]$
 p_s ; 過剰間隙水圧 $[FL^{-2}]$
 $S_s = (\alpha' + n\beta')$; 比貯留係数 $[L^{-1}]$
 T_{ij} ; 全応力 $[FL^{-2}]$
 $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$; 多孔質媒体の変位 $[L]$
 $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$; Darcy 速度あるいは比流束 $[LT^{-1}]$
 $\mathbf{V}_s = (V_{sx}, V_{sy}, V_{sz})$; 多孔質媒体の速度 $[LT^{-1}]$
 $\mathbf{V}_w = (V_{wx}, V_{wy}, V_{wz})$; 地下水の速度 $[LT^{-1}]$

- α ; 多孔質媒体の圧縮率 $[L^2F^{-1}]$
 $\alpha' = \rho_w g \alpha$ $[L^{-1}]$
 β ; 地下水の圧縮率 $[L^2F^{-1}]$
 $\beta' = \rho_w g \beta$ $[L^{-1}]$
 ε_{ij} ; 多孔質媒体のヒズミ, 無次元
 ε ; 多孔質媒体の体積ヒズミ, 無次元
 λ ; lamé の定数 $[FL^{-2}]$
 μ ; lamé の定数 $[FL^{-2}]$
 ν ; ポワソン比, 無次元
 ρ_s ; 多孔質媒体の密度 $[ML^{-3}]$
 ρ_w ; 地下水の密度 $[ML^{-3}]$
 σ_{ij} ; 過剰有効応力 $[FL^{-2}]$
 τ_{ij} ; 有効応力 $[FL^{-2}]$
 τ^0_{ij} ; つりあい状態での有効応力 $[FL^{-2}]$
 φ ; 流体ポテンシャル $[L]$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_s \cdot \nabla ; \text{実質時間微分}$$

文 献

- 赤井浩一 (1974) : 土質力学特論, 森北出版.
- 広野卓蔵・和達清夫 (1939) : 西大阪の地盤沈下について (第一報), 災害科学研究所報告, 第2号, 1—57.
- 今村 勤 (1976) : 確率場の数学, 岩波書店
- 鎌田 烈・原田和彦 (1977) : 水収支シミュレーションの問題点, 建設省土木研究所資料, 第1191号, 75—80.
- 榎根 勇 (1973) : 地下水資源の開発と保全, 水利科学研究所.
- 榎根 勇・樋口政男 (1977) : 過去に開発された地下水シミュレーションの調査研究, 建設省土木研究所資料, 第1191号, 58—74.
- 三笠正人 (1963) : 軟弱粘土の圧密〈新圧密理論とその応用〉, 鹿島出版会.
- 水収支研究グループ (1976) : 地下水盆の管理—理論と実際—, 東海大学出版会.
- 野満隆治・山下 馨 (1943) : 井戸理論の一進展, 第2報, 地球物理, 7, 21—40.
- 大草重康 (1971) : フローリンの土質力学II, 森北出版.
- 大久保 明 (1970) : 海洋乱流・拡散, 海洋物理I, 265—381, 東海大学出版会.
- 沢田敏男・鳥山暁司 (1965) : 圧密諸係数に関する一考察, 土と基礎, 13, 19—22.
- 島津暉之 (1977) : 地下水シミュレーションの問題点, 建設省土木研究所資料, 第1191号, 87—99.
- テルツァギ・ペック (1969) : 土質力学—基礎編—, 丸善.
- 和達清夫 (1940) : 西大阪の地盤沈下について (第二報), 災害科学研究所報告, 第3号, 1—41.
- 和達清夫・広野卓蔵 (1942) : 西大阪の地盤沈下について (第三報), 災害科学研究所報告, 第6号, 1—33.
- Bakr, A. A., L. W. Gelhar, A. L. Gutjahr, and J. R. MacMillan (1978) : Stochastic analysis of spatial variability in subsurface flows, 1. Comparison of one- and three-dimensional flows, Water Resour. Res., 14, 263—271.
- Biot, M. A. (1941) : General theory of three-dimensional consolidation, J. Appl. Phys., 12, 155—164.
- Biot, M. A. (1955) : Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid, J. Appl. Phys., 26, 182—185.
- Cooper, H. H., Jr. (1966) : The equation of groundwater flow in fixed and deforming coordinates, J. Geophys. Res., 71, 4785—4790.
- Darcy, H. (1856) : Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon, in The Theory of Ground-Water Motion and Related Papers, by M. King Hubbert, 301—331, Hafner publishing Company, 1969.
- De Wiest, R. J. M. (1966) : On the storage coefficient and the equations of groundwater flow, J. Geophys. Res., 71, 1117—1122.
- Florin, V. A. (1961) : Fundamentals of Soil Mechanics, Moskow.
- Freeze, R. A. (1971) : Three-dimensional, transient, saturated-unsaturated flow in a groundwater basin, Water Resour. Res., 7, 347—366.
- Gambolati, C. and R. A. Freeze (1973) : Mathematical simulation of the subsidence of Venice, 1. Theory, Water Resour. Res., 9, 721—733.

- Gambolati, G., P. Gatto, and R. A. Freeze (1974) : Mathematical simulation of the subsidence of Venice, 2. Results, *Water Resour. Res.*, 10, 563—577.
- Greenkorn, R. A., and D. P. Kessler (1969) : Dispersion in heterogeneous nonuniform anisotropic porous media, *Ind. Eng. Chem.*, 61, 14—32.
- Hantush, M. S. (1960) : Modification of the the theory of leaky aquifers, *J. Geophys. Res.*, 65, 3713—3725.
- Helm, D. C. (1976) : One-dimensional simulation of aquifer system comparison near Pixley, California, 2. Stress-dependent parameters, *Water Resour. Res.*, 12, 375—391.
- Hubbert, M. K. (1940) : The theory of ground-water motion, *J. Geol.*, 48, 785—944.
- Jacob, C. E. (1940) : The flow of water in an elastic artesian aquifer, *Trans. AGU*, 21, 574—586.
- Jacob, C. E. (1950) : Flow of groundwater, in *Engineering Hydraulics*, edited by H. Rouse, 321—386, John Wiley.
- Kutilek, M. (1972) : Non-darcian flow of water in soils, —laminar region—, in *Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media*, IAHR, 327—340, Elsevier Publishing company.
- Lewis, R. W., and B. Schrefler (1978) : A fully coupled consolidation model of the subsidence of Venice, *Water Resour. Res.*, 14, 223—230.
- Madsen, O. S. (1969) : A note on the equation of groundwater flow, *Water Resour. Res.*, 5, 1157—1158.
- Meinzer, O. E. (1928) : compressibility and elasticity of artesian aquifers, *Econ. Geol.*, 23, 263—291.
- Narasimhan, T. N., and P. A. Witherspoon (1977) : Numerical model for saturated-unsaturated flow in deformable media, *Water Resour. Res.*, 13, 657—664.
- Skemton, A. W. (1961) : Effective stress in soils, concrete, and rocks, in *Pore Pressure and Suction in Soils*, Butterworths.
- Taylor, D. W. (1948) : *Foundamentals of Soil Mechanics*, John Wiley.
- Terzaghi, K. (1925) : *Erdbaumechanik auf Bodenphysikalischer Grundlage*, Franz Deuticke.
- Terzaghi, K., and O. K. Frohlich (1936) : *Theorie der ser setzung von Tonschichten* (Theory of settlement of the clay layers), Deuticke.
- Theis, C. V. (1935) : The relation between the lowering of the piezometric surface and the rate and duration of a well using groundwater storage, *Trans. AGU*, 16, 519—524.
- Theis, C. V. (1938) : The significance and nature of the cone of depression in ground-water bodies, *Econ. Geol.*, 33, 889—902.
- Verruijt, A. (1969) : Elastic storage of aquifers, in *Flow Through Porous Media*, edited by R. J. M. De Wiest, 331—376, Academic Press.

(受付 1978年12月11日

受理 1979年1月16日)