カルマンフィルター理論による平面2次元透水量係数の 推定法の検討

平野 文昭*・上田 年比古**・神野 健二**

Estimation of Two-Dimensional Distribution of Transmissivity by Kalman Filtering Theory

Fumiaki HIRANO*, Toshihiko UEDA**, and Kenji JINNO**

Hydrological transmissivity is one of the important parameters for the analysis of groundwater flow. However, it is seldom that we can get exact and detailed distribution of transmissivity and hence we can not help extrapolating it, especially when there are only a few observed values.

In the previous report (Ueda *et al.*, 1983c), we proposed the method in which the optimal estimation of the spatial distribution of the transmissivity can be obtained through the Kalman Filtering Theory. In the present report, we discuss the method of generating the anisotropic random field of transmissivity and that of calculating the auto-correlation coefficient which represents the spatial structure of transmissivity. Also, we show the examples on how the anisotropic distribution of transmissivity can be obtained through the filtering theory.

I まえがき

透水係数あるいは透水量係数は、広域地下水流動の解析において、その精度を左右する重要なパラメータである。領域に透水量係数を与える方法としては、観測値から最小2乗法によってえられる式による値を与えたり、観測位置を中心としたブロックをその観測値で代表させる方法などが考えられる

が、これらの方法を用いても、領域全体の透水量係数の空間構造分布は適切に表しえないと考えられる。したがって、地下水流動の解析結果として算定される地下水頭は、透水量係数の不確定性から誤差を含んだ値となっている。

上田ほか(1983a, b, c)は、さきに透水量係数に関する空間分布式を仮定し、カルマンフィルター理論を用いて限られた個数の透水量係数と地下水頭の観

*清水建設(株)技術研究所 The Research Institute of Technology, Shimizu Construction Co., Ltd.

**九州大学工学部 Faculty of Engineering, Kyushu University

測値から透水量係数の最適な空間分布を推定する方法を提示した。

本報では、まず前報で与えた透水量係数の空間分布式の係数の検討のため、この係数を変えて、透水量係数の場を模擬発生させ、これから各節点の透水量係数相互の相関係数と積分特性距離を算定し、これにより浸透領域の透水量係数の空間分布式の係数と透水量係数の場所的相関の強さとの間の関連性を考察した。

次に、模擬発生させた全節点の透水量係数を真値とし、このうちいくつかを選び、この節点に真値に雑音を加えた観測値を設定し、この観測値のみが与えられたとした現実の場合を想定して、カルマンフィルター理論により、全節点の透水量係数の推定値を算定し、これとさきに求めている真値とを比較し、本推定法の検討を行ったものである。

II 透水量係数に関する空間分布式と確率場の発生

1. 透水量係数に関する空間分布式

Freeze(1975)は、透水(量)係数の対数値が正規分布をするのべているが、これに従って統計的取扱いに有利なように、ここでも透水量係数はその対数値を取扱うことにする。

さて、透水量係数の真値を T_0 、その対数値を Y_0 、透水量係数の空間分布のトレンドを T_0' 、その対数値を Y_0' 、また $Y_0 - Y_0'$ を Y とする。すなわち、

$$Y_0 = Y_0' + Y \quad (1)$$

ここに、 Y は隣接の透水量係数の自己回帰に依存する分と雑音分との和を表すものである。次に、観測値を T_m 、その対数値を Y_m 、 Y_m の空間分布のトレンドを Y_m' とする。ここでは Y_m' には、 Y_m から最小2乗法によって求められる式の値を用いる。また $Y_m - Y_m'$ を Y' とする。すなわち、

$$Y_m = Y_m' + Y' \quad (2)$$

ここに、 Y' は式(1)の Y に相当し、観測値によって与えられる自己回帰分と雑音分の和である。また、

$$Y_m = Y_0 + \epsilon \quad (3)$$

ここに、 ϵ は観測雑音(対数値)である。

さて、透水量係数の観測値 Y_m から真値 Y_0 の最適推定値を求める場合を考える。 Y_m が与えられれば、最小2乗法の計算によって Y_m' は求められる。本報では、これを式(1)のトレンド Y_0' として、式(2)から求められる Y' を式(1)の Y の観測値として、 Y の空間分布式(状態方程式)を与えて、カルマンフィルター理論により Y の最適推定値を求め、これをトレンド Y_m' に加えて、 Y_0 の最適推定値を求めようとするものである。したがって、 Y の空間分布式が問題となる。

さきに、Freeze(1975)とSmith & Freeze(1979 a, b)は、1次元、2次元の浸透領域を1次元あるいは2次元のブロックで切り、この離散点でトレンドを除いた透水量係数 Y について自己回帰式を適用し、2次元の場合の自己回帰式としては、

$$Y_{i,j} = \alpha_x(Y_{i+1,j} + Y_{i-1,j}) + \alpha_y(Y_{i,j+1} + Y_{i,j-1}) + \epsilon_{i,j} \quad (4)$$

を与えている。ここに、 i, j は長方形ブロックの x 座標および y 座標の離散点番号である。また、 α_x, α_y は隣接する二つのブロックの値の $Y_{i,j}$ に対する重みを表す自己回帰パラメータ、 $\epsilon_{i,j}$ は (i, j) ブロック点における正規性の白色雑音(対数値)である。

式(4)は、従来画像解析の分野で一般に用いられているモデルであり、 α_x, α_y と $Y_{i,j}$ の自己相関係数との関係、 $\epsilon_{i,j}$ の分散と $Y_{i,j}$ の分散との関係などが検討されている(出口・森下, 1982; 川添, 1982; Woods, 1972; Jain, 1977)。この型の自己回帰モデルとは別に、ローゼンフェルド・カク(1981)や砂原(1982)は、種々のモデルについて解説を加えている

が、これらのモデルは、いずれも画像処理を対象にしたものであり、本報のような透水量係数の対数値に対してそれぞれのモデルがどのような推定値を与えるのか、また風化の程度、堆積過程の相違などとモデルとの関係について、ほとんど検討されていないのが現状である。

本報では、式(4)が次のような楕円型の2階偏微分方程式に正規性白色雑音 ϵ を加えた式、

$$a_x \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + a_y \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \epsilon = 0 \quad (5)$$

の差分式になっていること(上田ほか, 1983c)から、トレンドを除いた透水量係数 Y の空間分布式として、式(5)を用いることにする。ここに、 a_x 、 a_y は式(4)の α_x 、 α_y に対応するもので、それぞれ x 方向、 y 方向の Y の相関の程度を示し、したがって透水量係数の場の構造を表す係数である。式(5)を用いることにより、透水量係数を連続量として取扱えることおよび有限要素法を適用でき任意の形状の境界に有利に取扱えることができると考える。なお、以下において Y あるいは Y (または Y_1, Y_2) は、すべてトレンドを除いた透水量係数(対数値)の意味である。

2. 透水量係数の場の発生

いま、領域を三角形要素に分割し、式(5)に重み付残差法を適用すれば、各節点の透水量係数の対数値 Y_i を未知数とする連立方程式がえられる。これをマトリックス表示すれば、

$$B Y + \epsilon = 0 \quad (6)$$

ここに、 B は a_x 、 a_y と節点座標を含む係数行列、 Y は節点の透水量係数(対数値)ベクトル、 ϵ は平均値 0、分散 $\sigma^2 I$ の節点の正規性白色雑音ベクトルである。透水量係数 Y (対数値) を分割して、 Y_1 を領域内任意節点の透水量係数、 Y_2 を境界節点の透水量係数(境界条件として設定する)とし、式(6)を小

行列に分割すれば、

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

すなわち、

$$B_{11} Y_1 + B_{12} Y_2 + \epsilon_1 = 0 \quad (8)$$

$$B_{21} Y_1 + B_{22} Y_2 + \epsilon_2 = 0 \quad (9)$$

透水量係数の場の方程式は、式(8)で表され、

$$Y_1 = -B_{11}^{-1} B_{12} Y_2 - B_{11}^{-1} \epsilon_1 \quad (10)$$

式(10)から、各節点の Y_1 を算定して、透水量係数の空間分布を模擬発生できる。この計算にあたっては、まず図-1に示すように領域を127個の要素(総節点数79)に分割し、領域内任意節点に1~50、境界節点に51~79の番号をつける。次に、係数 a_x 、 a_y を与えて式(10)の B_{11} 、 B_{12} を算定し、また ϵ_1 と境界条件 Y_2 には平均 0、分散 $\sigma^2 I$ ($\sigma=1.0$) の乱数を与え、式(10)から領域内の各節点の値 Y_1 を算定する。この模擬発生させた透水量係数の空間分布を ϵ_1 と Y_2 の乱数の設定を変えて、30回計算しその算術平均値を

図-1 計算領域の要素分割図

(図中の数字は節点番号で、・印は観測節点(大数字))

Fig. 1 Finite element mesh of analytical area
(Numbers in the figure are the ones of nodal point. Mark “・” is nodal point with observation [Large characters].)

各節点の Y_1 とした。次に、式(1)のように真値(対数値) Y_0 は、えられた Y_1 に場のトレンド Y_{0t} を加える。 Y_{0t} としてここでは簡単に一定値 -5 を与えた。この値によってここで取扱う透水量係数をほぼ実際のオーダーにした。こうしてえられる Y_0 を指数変換すれば、模擬発生による透水量係数 T_0 がえられる。

図-2 模擬発生させた透水量係数(真値)の等値線図
($a_x=1.2, a_y=0.1$, 単位: $\times 10^{-3} \text{m}^2/\text{s}$)

Fig. 2 Contour map of actual transmissivity
($a_x=1.2, a_y=0.1$, Unit: $\times 10^{-3} \text{m}^2/\text{s}$)

図-3 模擬発生させた透水量係数の等値線図
($a_x=0.1, a_y=1.2$, 単位: $\times 10^{-3} \text{m}^2/\text{s}$)

Fig. 3 Contour map of transmissivity
($a_x=0.1, a_y=1.2$, Unit: $\times 10^{-3} \text{m}^2/\text{s}$)

ここでは、式(5)の a_x, a_y が模擬発生させた透水量係数の場の x と y 方向の自己相関係数に与える影響をみるため、 a_x と a_y とを互いに变えて $a_x=1.2, a_y=0.1$ およびこれと逆に $a_x=0.1, a_y=1.2$ として模擬発生させた。その T_0 の等値線図をそれぞれ図-2 および図-3 に示す。

次に、このように発生させた透水量係数 T_0 の場の自己相関係数を次のように計算する。図-4 に示すように節点 a の透水量係数(対数値) $Y_1(a)$ と節点 b の $Y_1(b)$ との積をとるとき、節点 b が節点 a からの距離 ξ および η を中心とする辺長 $\Delta\xi$ と $\Delta\eta$ (ここでは $\Delta\xi=\Delta\eta=1,200\text{m}$) の斜線で示す長方形領域内に入っていれば、

$$Y_1(a)Y_1(b)=Y_1(x,y)Y_1(x+\xi,y+\eta) \quad (11)$$

のようにみなした。したがって、例えば、

$$R(0,\eta)=\frac{E[Y_1(x,y)Y_1(x,y+\eta)]}{\sigma_y^2} \quad (12)$$

図-4 $R(\xi, \eta)$ の計算

Fig. 4 Diagram of calculation for $R(\xi, \eta)$

図-5 (a) 自己相関係数(x方向)

Fig. 5(a) Auto-correlation coefficient (in the direction of x)

図-5 (b) 自己相関係数(y方向)

Fig. 5(b) Auto-correlation coefficient (in the direction of y)

の値を求める場合には、 a 点と b 点との x 座標の差が $|x(a) - x(b)| \leq \Delta \xi / 2$ および y 座標の差が $|y(a) - y(b) - \eta| \leq \Delta \eta / 2$ である組合せを求め式(11)の積を計算し、これらの算術平均をとる。大きな ξ あるいは η に対しては算術平均をとる個数

が少なくなるので、仮定の領域を現在の領域外に広げこの領域の節点には後述の最小2乗法による式(28)の値を与えて相関係数を計算した(神野ほか, 1983)。図-2、3に対してえられた相関係数 $R(\xi, 0)$ 、 $R(0, \eta)$ をそれぞれ図-5(a)、(b)の点線に示す。

さて、式(4)のモデルは、 x と y 方向に分離可能な指数減衰形の自己相関係数を持つことが知られている(ローゼンフェルド・カク, 1981)。すなわち、 x 方向および y 方向の積分特性距離をそれぞれ ℓ_x 、 ℓ_y とすれば、

$$R(\xi, \eta) = \exp \left(-\frac{|\xi|}{\ell_x} - \frac{|\eta|}{\ell_y} \right) \quad (13)$$

したがって、

$$R(\xi, 0) = \exp \left(-\frac{|\xi|}{\ell_x} \right) \quad (14)$$

$$R(0, \eta) = \exp \left(-\frac{|\eta|}{\ell_y} \right) \quad (15)$$

図-5(a)、(b)の実線は、式(14)、(15)の ℓ_x 、 ℓ_y を種々変えた場合の指数減衰形曲線を示している。この曲線と破線とを比較して、図-5(a)では白丸破線はほぼ d 線、 $\times$ 印破線は a 線に近似し、また図-5(b)では白丸破線はほぼ b 線、 $\times$ 印破線は c 線に近似しているとみなせば、 $a_x = 1.2$ 、 $a_y = 0.1$ のもとで発生させた場の自己相関係数(白丸破線)の積分特性距離は、 $\ell_x \approx 4.8$ km、 $\ell_y \approx 2.4$ kmであり、 $a_x = 0.1$ 、 $a_y = 1.2$ に対しては、 $\ell_x \approx 1.2$ km、 $\ell_y \approx 3.6$ kmといえる。このように、 ℓ_x 、 ℓ_y は a_x 、 b_y の値により変化する。なお、自己相関係数の積分特性距離以内にある節点同志は、十分影響を及ぼし合い、透水量係数の空間構造をよく表すことができると考えられるので、透水量係数の推定計算を行う際には、

要素の一边を積分特性距離以内の長さにとり、要素分割を行う必要があると考えられる。本報で透水量係数の計算に用いた三角形要素の一边は、図-1のように約1kmであり、上述の ℓ_x 、 ℓ_y より小さい。したがって、上記の a_x 、 a_y を用いた本報の計算では空間構造の特性を十分表すことができると考えられる。次に、図-2、3および図-5(a)、(b)および前述の ℓ_x と ℓ_y との大小関係から、 $a_x > a_y$ のときは x 方向が y 方向よりも相関が強い場(この場合 $\ell_x > \ell_y$)、 $a_x < a_y$ のときは x 方向よりも y 方向に相関が強い場(この場合 $\ell_x < \ell_y$)が発生するといえる。換言すれば、 x 方向に相関が強い場合は $a_x > a_y$ 、 y 方向に相関が強い場合は $a_x < a_y$ といえる。

Ⅲ カルマンフィルター理論による定式化とその算定式

1. 定式化

カルマンフィルター理論の計算で、時間ステップごとに透水量係数の推定値を算定して漸次その最適値に収束する計算が行えるように、便宜上式(5)の右辺の0を $\partial Y / \partial t$ におきかえれば、

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = a_x \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + a_y \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \epsilon \quad (16)$$

これがカルマンフィルター理論の計算における状態方程式である。式(16)を有限要素法で離散化し、マトリックス表示すれば、

$$A \dot{Y} + B Y + \epsilon = 0 \quad (17)$$

(・印は時間微分を示す)

ここに、 A は容量行列、 B は a_x 、 a_y と節点座標を含む係数行列、 Y は節点の透水量係数(対数値)ベクトル、 ϵ は平均値0、分散 $\sigma^2 I$ の節点の正規性白色雑音ベクトルである。

式(7)と同様にして式(17)を小行列に分割すると、

透水量係数に関する方程式は次式で示される。

$$A_{11} \dot{Y}_1 + A_{12} \dot{Y}_2 = -(B_{11} Y_1 + B_{12} Y_2) - \epsilon_1 \quad (18)$$

式(18)をimplicit法で差分化すれば、

$$Y_1^{\nu+1} = F Y_1^{\nu} + G_1 Y_2^{\nu+1} + G_2 Y_2^{\nu} + R \epsilon_1 \quad (19)$$

ここに、 $F = [A_{11} + \Delta t B_{11}]^{-1} A_{11}$ 、 $G_1 = -[A_{11} + \Delta t B_{11}]^{-1} (\Delta t B_{12} + A_{12})$ 、 $G_2 = [A_{11} + \Delta t B_{11}]^{-1} A_{12}$ 、 $R = -[A_{11} + \Delta t B_{11}]^{-1} \cdot \Delta t$

いま式(19)の期待値をとり、 $E[Y_1^{\nu+1}]$ を $Y(\nu+1)$ と表示し、新たにシステム雑音 w を導入すれば、状態方程式は次のようになる。

$$Y(\nu+1) = \Phi(\nu) Y(\nu) + \Psi(\nu) + w(\nu) \quad (20)$$

ここに、 Y は真の状態量(対数値)、 $\Phi = F$ 、 $\Psi = G_1 Y_2^{\nu+1} + G_2 Y_2^{\nu}$ 、 w は平均値0、分散 $\sigma_w^2 I$ の正規性白色雑音(対数値)である。

次に、観測方程式は、状態量に観測雑音 v を加えて、

$$y(\nu) = M(\nu) Y(\nu) + v(\nu) \quad (21)$$

ここに、 $y(\nu)$ は ν ステップでの $Y(\nu)$ に対する観測値(対数値)、 $M(\nu)$ は観測行列で、ここでは単位行列、 $v(\nu)$ は平均値0、分散 $\sigma_v^2 I$ の正規性白色雑音(対数値)である。

2. 算定式

カルマンフィルター理論による算定過程を要約する(例えば、日野, 1973)。なお、前報(上田ほか, 1983c)では、地下水頭と透水量係数の二つの状態量の算定であったが、ここでは透水量係数のみの算定であり算定式もやや異なることから以下に簡単に算定式を挙げる。記号については前報を参照されたい。透水量係数(対数値)に関して、

$$\hat{Y}(\nu+1 | \nu) = \Phi(\nu) \hat{Y}(\nu | \nu) + \Psi(\nu) \quad (22)$$

その推定誤差 $\tilde{Y}(\nu+1 | \nu) = Y(\nu+1) - \hat{Y}(\nu+1 | \nu)$ の共分散行列は、

$$P(\nu+1 | \nu) = E[\hat{Y}(\nu+1 | \nu) \hat{Y}^T(\nu+1 | \nu)] \\ = \Phi P(\nu | \nu) \Phi^T + W \quad (23)$$

上付き τ は転置を示す。また、

$$\hat{Y}(\nu+1 | \nu+1) = \hat{Y}(\nu+1 | \nu) + K(\nu+1) \\ \times [y(\nu+1) - M(\nu+1) \hat{Y}(\nu+1 | \nu)] \quad (24)$$

ここに、 $K(\nu+1) = P(\nu+1 | \nu) M^T(\nu+1) \\ [M(\nu+1) P(\nu+1 | \nu) M^T(\nu+1) \\ + V(\nu+1)]^{-1}$ (25)
 $\hat{Y}(\nu+1 | \nu+1)$ の推定誤差 $\tilde{Y}(\nu+1 | \nu+1) = Y(\nu+1) - \hat{Y}(\nu+1 | \nu+1)$ の共分散行列は、

$$P(\nu+1 | \nu+1) = [I - K(\nu+1) M(\nu+1)] \\ \times P(\nu+1 | \nu) \quad (26)$$

計算の出発点として、式(24)からえられる

$$\hat{Y}(0 | 0) = \hat{Y}(0 | -1) + K(0) [y(0) - M(0) \hat{Y}(0 | -1)] \quad (27)$$

に対して、先験情報として、平均値 $\hat{Y}(0 | -1)$ 、分散 $P(0 | -1)$ の正規分布を与えて、 $\hat{Y}(0 | 0)$ を求め、その後は式(22)、(23)、(25)、(24)、(26)の順に $\nu = 0$ から計算すれば、各時間ステップにおける推定値 $\hat{Y}(\nu+1 | \nu)$ および $\hat{Y}(\nu+1 | \nu+1)$ 、ならびにそれらの推定誤差の共分散行列 $P(\nu+1 | \nu)$ および $P(\nu+1 | \nu+1)$ が求まってゆく。

IV 透水量係数の空間分布の推定とその検討

ここでは、模擬発生させた透水量係数(真値とする)の場で、これからいくつか選んだ点でその真値に雑音を加えた観測値を算出し、この観測値のみが与えられているとして、これからカルマンフィルター理論により全節点の透水量係数を推定し、この推定値と前述の模擬発生でえられている真値とを比

較する。次いで、従来から行われている観測値から最小2乗法でえられる値と真値とを比較することにする。

1. 観測値の設定

ここでは、式(5)の係数を $a_x = 1.2$ 、 $a_y = 0.1$ として模擬発生させた透水量係数(図-2に示す)を真値とし、この真値(図-1の全節点についてえられている)のうち適当に選んだ図-1の節点番号1~19(図中●印)の節点を観測節点にとって、式(3)に従って、その節点の真値(対数値)に平均値0、分散 $\sigma_o^2 I$ ($\sigma_o = 0.01$) の観測雑音(正規性白色雑音)(対数値)を加えた値をその節点の観測値(対数値) Y_m とした。この一部を後掲図-10、11の観測値として示している。

2. 透水量係数の推定結果

いま領域内で、前節で設定した観測値のみが与えられているとして、これから全節点の透水量係数の推定値を算定する過程をのべる。まず、観測値(対数値)から最小2乗法によりトレンド Y_{mt} を算定すれば次式をえる。

$$Y_{mt} = -4.95 - 0.13 \times 10^{-4} x + 0.38 \times 10^{-4} y \quad (28) \\ (x, y: \text{単位 m})$$

計算に用いる Y の観測値すなわち式(21)の $y(\nu)$ には上記の $Y_m - Y_{mt} = Y'$ を用いた。境界条件は、境界節点(番号51~79)に式(28)からえられる値を与えた。すなわち、 Y がトレンドからとった値であることから、 Y の境界条件を0とした。システム雑音 W には $\sigma_s^2 I$ ($\sigma_s = 0.02$)、観測雑音 V には $\sigma_o^2 I$ ($\sigma_o = 0.01$) を与え、初期条件には $\hat{Y}(0 | -1)$ として領域内のすべての節点について $Y=0$ を与え、 $P(0 | -1)$ については対角要素を10.0、非対角要素を1.0として与えた。

これらの値を用いて、式(22)~(26)からえられる対数値 $\hat{Y}$ に式(28)の最小2乗法による式の値(トレンド)を加え、この指数変換値として全節点の透水量係数の推定値が算定される。この推定値(19ステッ

プでの値)の等値線図を図-6、7に示す。次に、式(23)と(26)を交互に用いて透水量係数の推定誤差共分散行列のトレース(P の対角成分の和すなわち各節点の推定誤差の2乗和)の時間的推移を算定した結果を図-8に示している。この図のようにトレースはその計算過程からみて時間ステップの進みにつれ漸次小さくなって一定値に収束するが、このように収束することは、推定計算が最適に行われていることを示すものであるとカルマンフィルター理論でのべられている(Şen, 1980)。

図-6 透水量係数の推定値の等値線図(19ステップ)
($a_x=1.2$, $a_y=0.1$, 単位; $\times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$)

Fig. 6 Contour map of filtered transmissivity
(at the 19th step, $a_x=1.2$, $a_y=0.1$, Unit; $\times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$)

次に、従来、領域の透水量係数には、観測値から算定される最小2乗法による値(ここではこれをトレンドとしている)を与えることが多い。したがって、参考のためこのような最小2乗法による式(28)からえられる値の指数変換値の等値線図を図-9に示す。

図-10、11は、図-1の節点68から77にかけてほぼ x 方向に並ぶ節点および節点53から60にかけてほぼ y 方向に並ぶ節点の透水量係数を示したものである。図-10、11において、その実線は図-2、一点鎖

図-7 透水量係数の推定値の等値線図(19ステップ)
($a_x=0.1$, $a_y=1.2$, 単位; $\times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$)

Fig. 7 Contour map of filtered transmissivity
(at the 19th step, $a_x=0.1$, $a_y=1.2$, Unit; $\times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$)

図-8 推定誤差共分散行列 $P(\nu | \nu)$ のトレース

Fig. 8 Trace of the estimation error covariance matrix $P(\nu | \nu)$

図-9 最小2乗法による式(28)からえられた透水量係数の等値線図
(単位: $\times 10^{-3} \text{m}^2/\text{s}$)

Fig. 9 Contour map of transmissivity obtained from regression equation (Unit: $\times 10^{-3} \text{m}^2/\text{s}$)

図-10 透水量係数の断面分布(ほぼx方向)
(横軸の丸で囲んだ節点は観測節点、節点番号は図-1を参照)

Fig. 10 Distribution of cross section for transmissivity (in the direction of x)
(Circled number of nodal point shows observed point. Nodal point numbers are referred to Fig. 1.)

図-11 透水量係数の断面分布(ほぼy方向)
(横軸の丸で囲んだ節点は観測節点、節点番号は図-1を参照)

Fig. 11 Distribution of cross section for transmissivity (in the direction of y)
(Circled number of nodal point shows observed point. Nodal point numbers are referred to Fig. 1.)

線は図-9、白丸破線は図-6、×印破線は図-7に対する値である。白丸破線は、模擬発生させた透水量係数(真値)の場合と同じ空間分布構造を与えたもの、すなわち透水量係数の空間分布式の係数 a_x 、 a_y に模擬発生するときと同じ値を与えたもので、図-10、11の×印破線は真値の場合とは異なった a_x 、 a_y を与えたものである。図-12に非観測節点(No. 39)における推定値の時間ステップの推移を示す。図-8、12から透水量係数の推定値は、10ステップ程度でほぼ収束しているようである。

3. 考察

さて、カルマンフィルター理論の計算では、状態方程式(すなわちYの空間分布式(16)または(20))と観測方程式(21)の両者をできるだけ満足するような値が最適推定値として算出される。そして、観測節点の推定値は、観測方程式(21)の方に強く影響され

図-12 No. 39における透水量係数の推定値の時間変化
(非観測節点 No. 39)

Fig. 12 Transition of filtered values for transmissivity
at No. 39
(No. 39 is the point without measuring.)

観測値に接近する。なお、観測値は真値に近いはずであるから(この接近の度合いは観測雑音の大きさによって異なる)、結局観測節点の推定値は真値に近くなる。これらのことから、図-10、11の観測節点における真値、観測値、および推定値が接近してえられている。

次に、非観測節点の推定値は状態方程式(16)の方に強く影響されて算出されるものと考えられる。いま状態方程式(16)を考えると、 $\partial Y / \partial t$ は最終的には0に収束することからこれを除き、また平均的に考えることにして、雑音 ϵ を除いた次の式(29)について考察する。

$$a_x \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + a_y \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0 \quad (29)$$

この式は前述のように2次元の自己回帰式(4)で ϵ を除いた式となり、この式により隣接する節点の透水量係数が相関をもって算定される。すなわち、図-10、11で観測節点に隣接する非観測節点の推定値は、観測節点の推定値に引きずられて算出されていることがわかる。この場合 x 方向と y 方向の相関の強さが係数 a_x 、 a_y によって示され、この係数の値の大きい方

が引きずられる程度がより強いと考えられる。図-10において節点30で破線の白丸が×印より観測節点の推定値に強く引きずられているのは、破線白丸の a_x が×印の a_x より大きいためと考えられる。

次に、式(29)において、領域内に平面を考え、その平面の境界上の値を境界条件とし、また領域内部で観測値がないとした場合には、式(29)の解はその平面となる。すなわち、ここでは平面の式(28)による境界値を境界条件としていることから、領域内部で観測値がない場合は、式(29)の解は式(28)の平面となる。

したがって、非観測節点の推定値は状態方程式(16)に影響されることから考えて、式(29)の解、ここでは式(28)の値すなわちトレンドに近づこうとすると想定される。これが図-10の非観測節点30、39、38の推定値が、前述のように観測節点14、8の推定値に引きずられながらも、式(28)の値すなわち一点鎖線の値に近づくようになり、結局14と8の間は凹型に推定値が並んでいるものと考えられる。なお、図-11で非観測節点29、30の破線白丸が逆に一点鎖線より離れているのは、 $a_x = 1.2 > a_y = 0.1$ で、 a_x が大きいため x 方向の相関が強く図-10の節点30が観測節点14に引きずられて大きい値となったためと考えられる。すなわち、2次元の場合は非観測節点の推定値は x 方向と y 方向の相関の強さにも影響されて算出される。このように x 方向、 y 方向の相関の強さを示す a_x 、 a_y は場の相関構造を示すもので、とくに非観測節点の推定値に大きな影響を及ぼす。図-10、11から、模擬発生させた真値のときと同じ a_x 、 a_y を用いた場合は、これと異なる a_x 、 a_y を用いた場合より、非観測節点の推定値は真値に近いといえる。したがって、透水量係数の観測値の空間分布を検討して、場の相関構造に適合する a_x 、 a_y を用いることが推定値の精度の向上に必要であると考えられる。なお、 a_x 、 a_y の値については今後検討したいと考えている。次に、 a_x 、 a_y がたとえ適切な値でなくても、

観測節点では観測値に接近し、また非観測節点では観測節点と式(28)の値(トレンド)とに引きずられながら推定値が算出される傾向は保持され、したがって従来の最小2乗法による値よりはよいことが、図-10,11の一点鎖線と破線×印とを真値の実線黒丸と比較して見える。

V むすび

本報は、まず相関構造の異なる透水量係数の場を模擬発生させ、その構造の特性についてのべ、次いで限られた個数の観測値からカルマンフィルター理論を用いて最適な透水量係数の空間分布を推定し、さらに観測値から最小2乗法を用いてえられる値とを比較し検討を行ったものである。

えられた結果は次のようである。

- (1) 透水量係数の場の相関の程度は、空間分布式の係数の値で表され、その値が大きい程強い相関構造を示す。
- (2) 空間分布式の係数が実際の透水量係数場の相関構造をほぼ表していれば、満足な透水量係数の空間分布の推定が行えると考えられる。
- (3) 本報の方法でえられる推定値は、最小2乗法によってえられる値よりも同じ個数の観測値で真値に近い分布をえることができる。

参考文献

- 上田年比古・平野文昭・神野健二(1983a)：非定常確率過程における地下水頭の予測と透水(量)係数の空間分布の推定。第27回水理講演会論文集，467～474。
- 上田年比古・平野文昭・神野健二(1983b)：2次元地下水流動場における水頭の予測と透水(量)係数の推定に及ぼ

す雑音の影響。九州大学工学集報，56，101～110。

上田年比古・平野文昭・神野健二(1983c)：非定常地下水変動場における透水(量)係数の推定。日本地下水学会誌，25，81～92。

川添容宏(1982)：階層形推定法による画像復元。電気学会論文誌(c)，102-10，9～14。

神野健二・平野文昭・上田年比古(1983)：室見川流域の水文地質パラメータの空間分布について。九州大学工学集報，56，421～428。

砂原善文編(1982)：『確率システム理論』朝倉書店，55～77。

出口光一郎・森下敏(1982)：2次元自己回帰モデル—画像の生成モデル表現—。計測自動制御学会論文集，18-2，15～21。

日野幹雄(1973)：Kalmanの予測推定理論の平易な誘導について。東工大土木工学科研究報告，15，91～99。

ローゼンフェルド、カク[長尾真監訳](1981)：『デジタル画像処理』近代科学社，481p。

Freeze, R. A. (1975)：A stochastic-conceptual analysis of one-dimensional groundwater flow in nonuniform homogeneous media. *Water Resour. Res.*, 11, 725～741.

Jain, A. K. (1977)：Partial differential equations and finite-difference methods in image processing, part 1; Image representations. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 23-1, 65～91.

Smith, L. and R. A. Freeze(1979a)：Stochastic analysis of steady state groundwater flow in a bounded domain, 1. One-dimensional simulations. *Water Resour. Res.*, 15, 521～528.

Smith, L. and R. A. Freeze(1979b)：Stochastic analysis of steady state groundwater flow in a bounded domain, 2. Two-dimensional simulations. *Water Resour. Res.*, 15, 1543～1559.

Şen, Z. (1980)：Adaptive fourier analysis of periodic stochastic hydrologic sequences. *J. Hydrol.*, 46, 239～249.

Woods, J. C. (1972)：Two-dimensional discrete Markovian fields. *IEEE Trans. Inform. Theory*, IT-18-2, 232～240.

(受付：1983年10月22日、受理：1984年1月21日)