空間分布構造を有する透水係数の統計的推定法*

藤間 聡**・中田満洋***

A Statistical Method for Estimating the Spatial Distributions of Hydraulic Conductivity

Satoshi TOHMA** and Mitsuhiro NAKATA***

The complex spatial distributions of hydraulic conductivity within a natural aquifer represented as a statistical homogeneous random process which is characterized by a new function, called the variogram. This variogram is related to the stationary covariance of the hydraulic conductivity difference between two points separated by the distance d . Using variogram and actual field data at the sample points, a statistical linearization technique is developed to estimate the spatial distributions of hydraulic conductivity.

A case study is presented in order to illustrate the statistical methodology. Once the variogram is determined throughout an aquifer, this estimation method has proven to be adapted solving groundwater system's behavior.

I まえがき

地下水の自然的・人為的要因による状態変化は、直接観測することができないため、一般に、流動モデルを設定し直接問題(direct problem)として解明されている。モデルの適用に当たっては、最適なパラメータを推定するため帯水層の地質構成、成層構造、かん養量および揚水量等多数の地質学的、水文

学的情報を必要とする。しかし、地下水調査の実施に際しては種々の理由により観測域はごく一部分に限られ、また、観測は地下水位のみの場合が多い。

一方、透水量係数、貯留係数等の帯水層定数は自然状態においては空間分布を呈することが知られており、現行の観測法による広域分布構造の把握は困難と思われる。

帯水層定数が空間分布する場合の浸透流解析に関しては、透水係数の空間変動が地下水流動に及ぼす影響をモンテカルロ法により解析した Freeze (1975) および Smith & Freeze (1979a, 1979b) の研究、同じくスペクトル法による Bakr *et al.* (1978) および Gutjahr *et al.* (1978) の研究、透水量係数そのも

* 昭和60年度土木学会水理講演会にて一部発表

** 室蘭工業大学土木工学科 Department of Civil Engineering, Muroran Institute of Technology

*** 北海道開発局旭川開発建設部 Asahikawa Local Head Office, Hokkaido Development Bureau

の分布構造を推定するため、観測値をもとに楕円型確率微分方程式を適用した神野ほか(1985)の研究が挙げられ、基本的な水理特性の解明、空間分布推定式の確立に努力が払われている。

本研究は、地下水位の測定データのみを用いて帯水層定数の空間分布構造を推定する方法を示すものである。本法は次の二つの最適同定問題から構成されており、事例的解析によりその妥当性を検討する。

- (1) 逆問題 (inverse problem) として地下水位測定値から各観測点における帯水層定数の最適同定化。
- (2) 地点帯水層定数の統計的性質の把握と統計的線形化手法による空間分布構造の最良近似式の確立。

II 解析対象箇所及び調査概要

対象域は北海道中央部の旭川市街を貫流する石狩川水系牛朱別川の下流部左岸の東西約1.5km、南北約0.46kmの不圧帯水層である。この地域の地質は第四紀沖積世の氾濫原で構成されており、その主体は砂礫層で地表面下1m以深に分布し、牛朱別川からの浸出水により十分の地下水かん養がなされている。

地下水位は図-1に示す16箇所の井戸で1日1回定時観測を行い、その観測期間は1984年3月(一部1984年10月)から現在に至るまで継続されている。帯水層定数を決定するため No. 5観測井付近において直径 $\phi=150\text{mm}$ 、ストレーナ長 $L=3.50\text{m}$ の井戸を掘削し、揚水量 220 l/min で7時間にわたり揚水試験を行った。No. 5観測井における地下水位の経時変動を図-2に示す。この観測値を用いて次式で示される Jacob の直線解析法により透水量係数を求める。

$$T=0.183Q/\Delta s \quad (1)$$

ここに、 T : 透水量係数、 Δs : 1対数サイクル間

図-1 解析対象領域の地下水位観測井配置

Fig. 1 Location of observation wells in the alluvial aquifer near Ushubetsu.

図-2 揚水試験による No. 5観測井の地下水位の経時変動

Fig. 2 Semilogarithmic plot of drawdown and recovery versus time in No. 5 observation well.

の水位降下量、 Q : 揚水量を示す。

(1) 式から水位降下期では $T=1.35 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ が得られる。また、揚水停止後の回復期においては、回復水量が揚水量に等しいと仮定すると (1) 式が降下期と同様に使用でき、 $T=1.54 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ を得る。両者の平均は $\bar{T}=1.45 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ となり、この値から平均透水量係数は $K=4.13 \times 10^{-4} \text{ m/s}$ と推定される。

III 地下水位観測点における帯水層定数の同定

帯水層定数を決定するための揚水試験は一地点でのみ行われたので、この結果から空間的分布構造を把握することはできない。従って、本章においては水収支則に基づく数値モデルを考え、地下水位観測データを用いて逆問題として各観測地点における帯水層定数を推定する。

1. 水収支の基本式

本解析のモデル化に必要な水収支式を定式化するため、Tyson and Weber (1964)の解法を採用した。解析対象域を図-3に示すような各観測井を中心とする Thiessen 多角形領域に分割すると、任意の多角形領域の水収支は次式で与えられる。

図-3 ティーセン多角形領域区分と水収支モデル

Fig. 3 Thiessen nodal network and groundwater simulation model.

$$S_n A_n \Delta h_{tn} / \Delta t = q + \sum_n K_{nm} D_{nm} W_{nm} \cdot (h_{tm} - h_{tn}) / L_{nm} \quad (2)$$

ここに、 t ：時刻、 Δt ：時間増分、 n ：節点番号、 S_n ：節点 n の貯留係数、 A_n ：節点 n の多角形領域の面積、 h_n ：節点 n における地下水位、 h_m ：隣接節点 m の地下水位、 L_{nm} ：節点 n と m とを結ぶリンク ℓ_{nm} の長さ、 K_{nm} ：リンク ℓ_{nm} 上の透水係数、 W_{nm} ：リンク ℓ_{nm} の中央点で直交する多角形の辺長、 D_{nm} ：リンク ℓ_{nm} 上の平均水深、 q ：領域表面に作用するかん養量および揚水量をそれぞれ示す。

2. 帯水層定数の同定

各観測点における帯水層定数の最適値は、観測地

下水位に対する計算地下水位の誤差を最小にするものと考えられる。従って、最適値の決定は関数の最小化問題に変換される。最小化問題の解法には、非線形計画法の分野において探索効率のすぐれた手法が多数開発されているが、本解析では理論展開および計算処理が最も容易な最小二乗法を用いる。

この手法は観測値に対する計算値の近似度を絶対誤差の平方和 I で測るので、帯水層定数の最適値を探索するための評価基準として次式を採用する。

$$I(P_i, t) = \sum_n [h_{tn}^* - \bar{h}_{tn}(P_i)]^2 \rightarrow \min. \quad i=1, 2 \quad (3)$$

ここに、 I ：評価基準、 h_{tn}^* ：時刻 t における観測地下水位、 $\bar{h}_{tn}$ ：計算地下水位、 P_i ：同定すべき係数に対応する変数であり、 P_1 ：透水係数、 P_2 ：貯留係数を示す。

この I を最小にする帯水層定数は次式を満足する。

$$\frac{\partial I}{\partial P_i} = \sum_n J^T [h_{tn}^* - \bar{h}_{tn}(P_i)] = 0 \quad (4)$$

ここに、 J は次式で示される Jacobian マトリックスであり、添字 T は転置を示す。

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{h}_{t1}}{\partial P_{11}} \cdot \frac{\partial \bar{h}_{t1}}{\partial P_{1L}} & \frac{\partial \bar{h}_{t1}}{\partial P_{21}} \cdot \frac{\partial \bar{h}_{t1}}{\partial P_{2N}} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \bar{h}_{tN}}{\partial P_{11}} \cdot \frac{\partial \bar{h}_{tN}}{\partial P_{1L}} & \frac{\partial \bar{h}_{tN}}{\partial P_{21}} \cdot \frac{\partial \bar{h}_{tN}}{\partial P_{2N}} \end{bmatrix} \quad (5)$$

上式中、 L はリンク総数、 N は観測点総数を示す。地下水位は透水係数、貯留係数の関数であるので、(3)式は非線形となり帯水層定数を直接求めることは困難となる。非線形問題の解法には、Taylor 展開による線形化手法と Marquardt 法等の最大傾斜法が一般に使用されているが、本解析では計算処理時間の短い前者を採用する。

最適値の探索過程で帯水層定数が微小量 ΔP_i 変化した場合の地下水位変動量を次の線形化で近似する。

$$\bar{h}_{tn}(P_i + \Delta P_i) = \bar{h}_{tn}(P_i) + J \Delta P_i \quad (6)$$

上式を(3)式に代入すると修正量 ΔP_i は、

$$J^T J \Delta P_i = J^T [h_{tn}^* - \bar{h}_{tn}(P_i)] \quad (7)$$

で与えられる。

以上の展開で定式化された最適値同定の計算手順は次の通りである。

- (i) 揚水試験結果から各観測点における帯水層定数を推定し、初期地下水位には観測値を割当てる。
- (ii) ある観測時刻 t を固定し、推定した帯水層定数を使用して(5)式でマトリックス $[J]$ を計算し、(7)式から定数修正量 ΔP_i を求める。
- (iii) 帯水層定数を修正した後、(6)式に代入して地下水位を求め、再び観測値との誤差を求める。
- (iv) 誤差が許容値以内であれば定数は同定されたものとし、次の観測時刻 $t + \Delta t$ における計算に移る。誤差が大きな場合には(ii)に戻り収束計算を繰返す。

以上の計算手順で一連の観測時刻における(3)式を満足する帯水層定数が同定される。各時刻で得られた値の総和を観測回数で除すと観測点における平均最適同定値が求まる。この手法の精度は(6)式の線形化の近似度に依存するため、地下水位の変動量が大きな場合推定値の信頼度は低くなる。

IV 帯水層定数の空間的分布構造の推定

前章で地下水位観測点における帯水層定数を同定する方法を示した。しかし、地点定数値のみで領域全体の空間的分布構造を推定するには情報が断片的

であるため精度よく行うことができない。従って、観測点間の任意地点における帯水層定数を推定する方法を確立することが必要となる。

本章では、全観測点において前章の方法により得られた帯水層定数の統計的性質を把握した後、解析対象全域で帯水層定数がこの性質を保持する確率変数と考え、統計的手法により任意地点の帯水層定数を推定する重回帰式を定式化する。ただし、以下の理論展開においては、下付き添字の重複を避けるため、前章で帯水層定数を表す P_1 または P_2 を記号 Z で示すことにする。

$$Z^* = \sum_i \lambda_i Z_i \quad i = 1, \dots, N \quad (8)$$

ここに、 Z^* は求めるべき任意地点の帯水層定数であり、 Z_i は観測点 i の最適同定帯水層定数を表す。また、 λ_i は母重回帰定数と称する一種の重み係数であり、添字 i は観測点を示す。

この重み係数 λ_i を決定するには、重回帰式は次の条件を満足しなければならない。

- (i) 推定誤差の平均が0の不偏性を有すること。
- (ii) 推定誤差の共分散が最小であること。

確率論的方法を用いて解析を行う場合、通常、確率変数の統計的性質のうち平均値、分散が一定である弱定常過程を仮定する。しかし、自然界においては、透水係数は対象領域が広範囲になるほど、その分散は増大する傾向を示し、この過程が厳密には成立しない。本解析では確率変数それ自身の分散を一定とする代わりに、実際の状態をより正確に表現すると考えられる Delhomme (1978) が提示したバリオグラムを適用する。これは、次式で示される距離 d はなれた二点の帯水層定数の差の分散が移動に際し不変とするものである。

$$\gamma(d) = \frac{1}{2} E[(Z(x+d) - Z(x))^2] \quad (9)$$

ここに、記号 E は期待値を示す。

上式のバリオグラム $\gamma(d)$ は地点 x には依存せず、帯水層が等方性の場合には距離 d のみの関数、異方性の場合には距離と方位の関数となる。また、係数 $1/2$ は後に述べる計算の簡便化のため導入している。ここで、重回帰式 (8) 式の重み係数を推定誤差の不偏性、分散の最小化を用いて同定する。推定誤差平均の不偏性から次式が成立する。

$$E(Z^*) = E(Z) = \text{const.} \quad (10)$$

上式の左辺に (8) 式を代入すると、重み係数 λ_i に関して次の関係が得られる。

$$\sum_i \lambda_i = 1 \quad (11)$$

この制約条件のもとで推定誤差の分散を最小にする重み係数を求めるため、Lagrange の乗数法を適用する。この場合、最適値探索の評価基準 ϕ には次式を採用する。

$$\phi(\lambda, \mu) = \frac{1}{2} E[(Z^* - Z)^2] - \mu [\sum_i \lambda_i - 1] \rightarrow \min. \quad (12)$$

ここに、 Z^* は帯水層定数の推定値、 Z はその最確値を表し、 μ は Lagrange の乗数を示す。

上式の右辺第 1 項は推定誤差の分散であり、第 2 項は未知量である重み係数の相互間で満足しなければならない条件を表す。重み係数 λ_i の最適値はこの評価基準 ϕ を最小にするものである。

(12) 式の右辺第 1 項を次のように変形する。

$$\begin{aligned} E[(Z^* - Z)^2] &= E[(\sum_i \lambda_i Z_i - Z)^2] \\ &= \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j E[(Z_i - Z)(Z_j - Z)] \end{aligned} \quad (13)$$

上式に (9) 式を代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} E[(Z^* - Z)^2] &= - \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i - x) \\ &\quad + 2 \sum_i \lambda_i \gamma(x_i - x) \end{aligned} \quad (14)$$

ここに、 x は帯水層定数の推定地点、 x_i 、 x_j は観測地点の位置を示す。

(14) 式を (12) 式に代入した後、最小化を行うと、

$$\begin{aligned} \sum_i \lambda_i \gamma(x_i - x_j) + \mu &= \gamma(x_i - x) \quad i = 1, \dots, N \\ \sum_i \lambda_i &= 1 \end{aligned} \quad (15)$$

が得られる。ただし、 N は観測点総数を示す。

この正規方程式を解くことにより、重回帰式の係数 λ_i および Lagrange 乗数 μ が決定され、帯水層定数の最良近似式が定式化される。一方、この最良近似式による推定誤差の分散は次式で与えられる。

$$V[Z^* - Z] = \sum_i \lambda_i \gamma(x_i - x) + \mu \quad (16)$$

V 解析結果および考察

1. 地下水位観測点における帯水層定数の同定

図-3に示すような小領域に分割された対象域において、16個所の観測井の地下水位測定値に基づき帯水層定数を求める。この場合、隣接節点間を連結するリンク数は $L=30$ 、節点は $N=16$ となる。従って、本解析で同定すべき係数は透水係数30、貯留係数16の計46個となる。

評価基準 (3) 式で用いる実測地下水位は全観測期間中比較的変動が小さい連続80日間のデータを選定した。この理由は、最適値探索の繰返し計算において地下水位の変動が微小でも、これに伴う透水係数の変動が非常に大きくなる場合があるため、解の発散を避けるとともに (6) 式で示す地下水位の線形化の近似度を高めるためである。

初期条件は、透水係数に関しては揚水試験の実測値 $K=35.7\text{m/day}$ を全リンクに割り当てた。一方、

貯留係数は実測値がないため、地質が砂礫層であることを考慮して $S=0.40$ を全節点に与えた。

境界条件については、各多角形でリンクが存在しない境界面上にあらかじめ任意の流出・流入量を仮定して、実測地下水位に最も近い値を与えるものを最終的に選択した。

最適値の収束判定は、全節点において繰返し回数 $k-1$ と k との地下水位変動の差の総和が 0.5m 以下となった場合に収束したとする。実際の計算では6回以下の繰返しで収束し、最小二乗法は計算効率が高いと思われる。

図-4はNo. 1観測井における1984年10月13日から同年12月31日までの80日間の地下水位観測記録を示す。同記録の10月13日の地下水位を初期条件として11月12日までの30日間のデータを用いて貯留係数および観測井No. 1とNo. 2とを結ぶリンク上の透水係数を求めた結果を表-1に示す。透水係数の平均は 38.14m/day であり、貯留係数の平均は 0.3324 となる。

いずれの分散も非常に小さいことが認められる。

以上の解析から得られた各観測点における帯水層定数を表-2に示す。ただし、同表の観測点透水係数は、一節点に立つ複数のリンクの平均値である。

2. 帯水層定数の空間分布構造の推定

前節で得られた16地点の透水係数の値に基づき解

図-4 No. 1観測井の地下水位変動(1984年10月13日～12月31日)

Fig. 4 Record of water-table depth in No. 1 observation well.

表-1 領域1の貯留係数および観測井No. 1とNo. 2とを結ぶリンク上の透水係数の同定過程

Table 1 Identification of the aquifer's parameters in No. 1 polygonal zone.

観測日 1984年	地下水位 (m)	透水係数 (m/day)	貯留係数 ($\times 1/100$)	繰返 回数	観測日 1984年	地下水位 (m)	透水係数 (m/day)	貯留係数 ($\times 1/100$)	繰返 回数
10月14日	106.075	36.6	35.04	6	10月29日	106.159	38.6	32.91	2
15	.055	36.5	35.02	6	30	.141	38.6	32.91	2
16	.050	36.5	35.04	4	31	.126	38.6	32.91	2
17	.049	34.1	35.38	4	11月 1日	.119	38.6	32.92	2
18	.054	34.6	35.24	6	2	.124	38.6	32.91	2
19	.041	38.7	32.76	3	3	.151	38.6	32.92	3
20	.041	39.0	32.77	4	4	.159	38.6	39.92	2
21	.050	38.9	32.77	2	5	.180	38.4	32.79	3
22	.054	39.0	32.84	3	6	.177	38.4	32.78	2
23	.049	39.0	32.84	3	7	.167	38.4	32.80	3
24	.037	39.0	32.85	2	8	.141	38.4	32.80	2
25	.039	38.8	32.81	4	9	.122	38.4	32.80	2
26	.102	38.6	32.91	5	10	.107	38.4	32.80	2
27	.128	38.6	32.91	2	11	.101	38.4	32.82	2
28	.148	38.6	32.92	2	12	.092	38.4	32.82	2

備考：地下水位はNo. 1観測井で測定されたものである。

表-2 帯水層定数の最適同定値

Table 2 Optimum identification of aquifer's parameters.

観測井 番 号	貯留係数 S	透水係数 K (m/day)
1	0.350	39.74
2	0.357	39.52
3	0.356	39.72
4	0.365	36.31
5	0.331	35.44
6	0.271	37.48
7	0.359	33.27
8	0.369	33.23
9	0.329	34.05
10	0.264	34.39
11	0.329	37.34
12	0.352	36.95
13	0.356	38.41
14	0.340	40.41
15	0.348	37.43
16	0.358	37.08

析対象全域で透水係数がいかなる密度関数をもつ分布に従うかを判定する。一般に、度数分布の適合性の判定には χ^2 検定が用いられるが、本例においては各階級の期待度数が少なくこの検定法を適用することができない。従って、本節では透水係数の度数分布に正規および対数正規の二つの分布を想定し、竹内(1976)が提示した基準によりその適合性を判定する。この方法はデータに対数正規分布を想定した場合、正規分布より適切か否かは下記の(17)式が(18)式より小さいか否かで判定される。

$$HL = \text{Log } \hat{\sigma}^* + \frac{b_2^*}{2N} + \frac{1}{N} \sum_i \text{Log} Z_i \quad (17)$$

$$\hat{\sigma}^{*2} = \sum_i (\text{Log} Z_i - \hat{\mu}^*)^2 / N$$

$$\hat{\mu}^* = \sum_i \text{Log} Z_i / N$$

$$b_2^* = \sum_i (\text{Log} Z_i - \hat{\mu}^*)^4 / N \hat{\sigma}^{*4}$$

$$HN = \text{Log } \hat{\sigma} + \frac{b_2}{2N} \quad (18)$$

ここに、 σ は標準偏差を表す。

上記二式に16地点の透水係数を代入すると、HL=0.64、HN=0.66となり、適合度に差異がなく、本例では略近的に正規分布とみなす。同様に貯留係数について検定すると、ランダム変数となり、空間分布構造を有しない。従って、以下の解析においては、透水係数のみを取り扱うことにする。

透水係数のバリオグラムを決定するため、観測点間の距離を80m 刻みで階級分けを行い透水係数の差の分散を求めた。刻み80m は各階級に入る度数がほぼ等しくなるように試行錯誤的に決定した。この結果を図-5に示す。ただし、計算値の横座標は各階級の平均距離で表示している。この図からバリオグラムは距離約560m まではほぼ線形関係を有し、この関係を定式化すると次式が成立する。

$$\gamma(d) = 0.0182d \quad d \leq 560m \quad (19)$$

任意地点における透水係数の推定は以下の手順で行われる。

- (i) 推定地点を中心とする半径280m の円内に存在する観測点の相互距離および推定点と観測点間の距離を算出する。
- (ii) 得られた距離を用いて(19)式からバリオグラム値を決定する。

図-5 透水係数のバリオグラム

Fig. 5 Variogram of hydraulic conductivity.

(iii) 正規方程式 (15) にバリオグラム値を代入し、各観測点の重み係数を求め、推定式 (8) を決定する。

(iv) 推定地点を移動させ、同様な操作を繰り返して対象域の透水係数を推定する。

この方法は近傍の観測点のみを使用するため観測点間の情報不足に基づく推定精度の低下が避けられ、同時に (8) 式中の同定すべき係数の個数が減少するので計算処理が軽減される長所を有する。

定式化したバリオグラムおよび最良近似式が正しく地点透水係数を推定し得るかを判定するため、各観測点における透水係数を、当該点を除き他の観測点の値を用いて推定する。バリオグラムが適切に選定されているならば、誤差の平均は不偏性から 0 であり、実測値との分散と (16) 式で示される分散の相対比は 1.0 となる。

$$E[Z^* - Z] = \frac{1}{N} \sum_i (Z^*(x_i) - Z(x_i)) = 0.031 \quad (20)$$

$$RV = \frac{1}{N} \sum_i [(Z^* - Z) / \sigma]^2 = 0.945 \quad (21)$$

$$Z = P_1, \sigma = (V [Z^* - Z])^{1/2}$$

ここで、RV は相対分散比、N は観測点総数を示す。

解析結果は上記 2 条件をほぼ満足し、妥当であると認められる。また、推定誤差が正規分布であると仮定できるならば、推定値に対する 95% 信頼区間は次式で与えられる。

$$Z^* = \sum_i \lambda_i Z_i \pm 2\sigma, 1.46 \leq \sigma \leq 2.32 \quad (22)$$

を用いて対象領域の分布構造を求めた。この結果を図-6に示す。同図は縦46m、横56mの間隔で対象領域を格子状に分割したのち、253の交点上で透水係数を算定し、その結果を0.5m/day 間隔の等値線で表示している。透水係数は中央上部が小さく領域縁部が大きな値を有している。一方、図-7は推定誤差の分散を示すもので、推定誤差は観測点近傍で小さく観測点からの距離に伴い誤差が増大し、推定精度は観測点の配置にのみ影響されることが分かる。

従って、本例においては左下端部付近に観測井を

図-6 透水係数の推定空間分布

Fig. 6 Map of estimated spatial variability of hydraulic conductivity.

図-7 推定誤差の分散分布

Fig. 7 Map of variance of estimated error.

付設すると、推定誤差の分散は解析領域ではほぼ同一の値が得られると考えられる。

VI 結 び

本研究では、地点透水係数が定常過程を満足する確率変数と考え、重回帰式を定式化してその空間分布を推定した。その結果、本解法は地下水位観測値のみから実用上支障のない推定精度で、現地に即した分布構造を把握することができ、地下水流動および汚染物質移動機構を究明するために不可欠な基礎資料を提示するものと考えられる。

しかし、本解法では、(3)式の最小化において同定値が局所極小値ではなく全体的な最小値に到達しているか、また、重回帰式を定式化する際に必要なバリオグラムが解析対象領域で常に得られるかの検討を残している。これを解決するためには、さらに多くの理論的、事例的研究が必要となる。

謝 辞 本研究にあたり、室蘭工業大学近藤俊郎教授より有益なご助言を頂いたことを記し、ここに心から謝意を表

します。また、観測資料整理、計算および図表作成に協力して頂いた同学土木工学科河海工学講座山岸等技官に感謝致します。

参考文献

- 神野健二・上田年比古・鶴田明寛・平野文昭(1985)：透水量係数の空間分布および2次元確率微分方程式の自己回帰係数の推定。第29回水理講演会論文集，881～886。
- 竹内 啓(1976)：情報統計量の分布とモデルの適切さの基準。数理科学，153，12～18。
- Bakr, A. A. , L. W. Gelhar, A. L. Gutjahr and J. R. MacMillan (1978): Stochastic analysis of spatial variability in subsurface flows, 1, Comparison of one- and three-dimensional flows. Water Resour. Res. , **14**, 263～271.
- Delhomme, J. P. (1978): Kriging in the hydrosphere, Advan. Water Resour. , **1**, 251～266.
- Freeze, R. A. (1975): A stochastic-conceptual analysis of one-dimensional groundwater flow in nonuniform homogeneous media, Water Resour. Res. , **11**, 725～741.
- Gutjahr, A. L. , L. W. Gelhar, A. A. Bakr, and J. R. MacMillan (1978): Stochastic analysis of spatial variability in subsurface flows, 2, Evaluation and application, Water Resour. Res. , **14**, 953～959.
- Smith, L. , and R. A. Freeze (1979a): Stochastic analysis of steady state groundwater flow in a bounded domain, 1, One-dimensional simulations, Water Resour. Res. , **15**, 521～528.
- Smith, L. , and R. A. Freeze (1979b): Stochastic analysis of steady state groundwater flow in a bounded domain, 2,

Two-dimensional simulations, Water Resour. Res. , **15**,
1543~1559.

Tyson, H. N. , and E. M. Weber (1964): Ground-water management for the nation's future, Computer simulation of

ground-water basins. Proc. of ASCE, 90, HY4, 59~77.

(受付：1985年10月29日、受理：1986年 3 月15日)