不飽和流れの表現

日比義彦*

Expression for water flow in the unsaturated soil

Yoshihiko HIBI *

1. 一般的な不飽和流れの表現

地下水の流れの支配方程式は質量保存の法則とダルシーの法則より誘導できる。質量保存の式は以下ようになる。

$$\frac{\partial \rho_w \theta_w}{\partial t} + \frac{\partial \rho_w V_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho_w V_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho_w V_z}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

ここで、 θ_w は体積含水率 [無次元]、 ρ_w は水の密度 [M/L³]、 V_x 、 V_y と V_z はそれぞれ x 、 y 、 z 方向の流速、 t は時間 [T] である。なお、 x と y はそれぞれ x 、 y 軸方向の座標であり、 z は上向きを正とする重力方向の座標である。 V_x 、 V_y と V_z は以下のダルシーの法則より求めることができる。

$$\begin{aligned} V_x &= -k_r(\theta_w) K_s \frac{\partial \psi_w}{\partial x} & V_y &= -k_r(\theta_w) K_s \frac{\partial \psi_w}{\partial y} \\ V_z &= -k_r(\theta_w) K_s \frac{\partial (\psi_w + \rho_{rw} z)}{\partial z} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 ψ_w は圧力水頭 [L]、 $k_r(\theta_w)$ は相対透水係数または相対透過度 [無次元]、 K_s は飽和状態の透水係数 [L/T]、 ρ_{rw} は基準とする水の密度に対する水の相対密度 [無次元] である。

式 (2) を式 (1) に代入すると以下の飽和・不飽和の地下水の流れの支配方程式を求めることができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_w \theta_w}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_w k_r(\theta_w) K_s \frac{\partial \psi_w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho_w k_r(\theta_w) K_s \frac{\partial \psi_w}{\partial y} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_w k_r(\theta_w) K_s \frac{\partial (\psi_w + \rho_{rw} z)}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

さらに、間隙率 n [無次元] と水の飽和度 S_w [無次元] より体積含水率は $\theta = n S_w$ となり、式 (3) は以下のように変形することができる。

$$\begin{aligned} \theta_w \frac{\partial \rho_w}{\partial \psi_w} \frac{\partial \psi_w}{\partial t} + \rho_w S_w \frac{\partial n}{\partial \psi_w} \frac{\partial \psi_w}{\partial t} + \rho_w n \frac{\partial S_w}{\partial t} \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_w k_r(\theta_w) K_s \frac{\partial \psi_w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho_w k_r(\theta_w) K_s \frac{\partial \psi_w}{\partial y} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_w k_r(\theta_w) K_s \frac{\partial (\psi_w + \rho_{rw} z)}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

式 (4) の左辺の第 1 項は水の圧縮性を表し、第 2 項は土の間隙の変化を示している。不飽和状態では、一般的に水の圧縮や間隙の変化を考慮しないが、飽和状態では、水の圧縮と間隙の変化を考慮する場合が多い。ただし、水の圧縮性を考慮する際には、地下水の密度が帯水層内で一様に変化するために空間的な変化が生じないと仮定する場合が多い (P. A. ドミンコら 1995)。そのように仮定すると飽和状態の式 (4) の右辺の ρ_w は微分の外に出すことができ、 $S_w = 1$ 、 $\theta_w = n$ として式 (4) の両辺を ρ_w で除すると式 (4) の左辺の第 1 項と第 2 項は $(1/\rho_w)(n \partial \rho_w / \partial \psi_w + \rho_w \partial n / \partial \psi_w) \partial \psi_w / \partial t$ となり、 $(n \partial \rho_w / \partial \psi_w + \rho_w \partial n / \partial \psi_w) / \rho_w$ は比貯留係

* 名城大学理工学部環境創造学科 ()
Department of Environmental Science and Technology, Faculty of Science and Technology, Meijo University.

数 S_s [1/L] となる。従って、飽和・不飽和状態の地下水の支配方程式は式 (4) より以下の式 (5) のように表すことができる。なお、前記のように不飽和状態では一般的に水の圧縮や間隙の変化を考慮しないので $S_s = 0$ となる。そこで、式 (5) の左辺の第 1 項が飽和状態の場合に有効になるように、飽和の場合に 1、不飽和の場合に 0 とする α を式 (5) の左辺の第 1 項に乗じている。

$$\alpha S_s \frac{\partial \psi_w}{\partial t} + n \frac{\partial S_w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_r(\theta_w) K_s \frac{\partial \psi_w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_r(\theta_w) K_s \frac{\partial \psi_w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ k_r(\theta_w) K_s \frac{\partial (\psi_w + \rho_{rw} z)}{\partial z} \right\},$$

(不飽和 $\alpha=0$ 飽和 $\alpha=1$) (5)

式 (5) では、右辺に含まれる ψ_w と $k_r(\theta_w)$ 、さらに、左辺に含まれる S_w で不飽和を表している。これらは、不飽和領域のサクション $-\psi_w$ と θ_w (または S_w) の関係である水分特性曲線および相対透水係数 $k_r(\theta_w)$ と θ_w (または S_w) の関係により関連付けられている。なお、飽和状態では、 $S_w = 1$ となることより式 (5) の左辺の第 2 項は 0 となり、右辺の相対透水係数は $k_r(n) = 1$ となる。式 (5) では水の飽和度と圧力水頭が混在していることより混合型方程式と呼ばれる場合がある。

2. 広く知られている不飽和流れの表現

浸透流解析は、昭和50年代なかばより堤防の漏水、トンネル施工による地下水変動や掘削工事に伴う地下水位低下などの地下水流動に関わる問題について頻繁に使われるようになった。当初は、大型コンピューターなどを使用していたが、コンピューターの技術の発展により次第に浸透流解析がパーソナルコンピューターなどを用いて容易に出来るようになった。大型コンピューターを使用していた時代から使われてきた浸透流解析プログラムに赤井らにより開発された UNSAF がある。このプログラムの詳細は赤井ら (1977) に記載されており、論文の中では地下水の不飽和流れの支配方程式を以下のように求めている。

不飽和状態では、前記したように水の圧縮が生じないものとする。また、 $k_r(\theta_w)$ は間接的では

あるが水分特性曲線を用いて ψ_w の関数とすることができるので $k_r(\psi_w)$ と表す。従って、式 (3) は以下のようになる。

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_r(\psi_w) K_s \frac{\partial \psi_w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_r(\psi_w) K_s \frac{\partial \psi_w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_r(\psi_w) K_s \frac{\partial (\psi_w + \rho_{rw} z)}{\partial z} \right) \quad (6)$$

ここで、式 (6) の左辺の $\partial \theta_w / \partial t$ を $\partial \theta_w / \partial t = (\partial \theta_w / \partial \psi_w) \partial \psi_w / \partial t$ のように変形すると $\partial \theta_w / \partial \psi_w$ が比水分容量 $C(\psi_w)$ となるので、式 (6) の左辺は $\partial \theta_w / \partial t = C(\psi_w) \partial \psi_w / \partial t$ となる。また、飽和状態の帯水層内では地下水の密度が一様に変化するために空間的な変化が生じないと仮定すると式 (4) は以下のようになる。

$$\frac{1}{\rho_w} \left(n \frac{\partial \rho_w}{\partial \psi_w} + \rho_w \frac{\partial n}{\partial \psi_w} \right) \frac{\partial \psi_w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_s \frac{\partial \psi_w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_s \frac{\partial \psi_w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ K_s \frac{\partial (\psi_w + \rho_{rw} z)}{\partial z} \right\} \quad (7)$$

前記したように式 (7) の左辺は $S_s = (n \partial \rho_w / \partial \psi_w + \rho_w \partial n / \partial \psi_w) / \rho_w$ となる。式 (6) と式 (7) を考慮すると以下の飽和・不飽和の地下水の支配方程式が誘導される。

$$(\alpha S_s + C(\psi_w)) \frac{\partial \psi_w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_r(\psi_w) K_s \frac{\partial \psi_w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_r(\psi_w) K_s \frac{\partial \psi_w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ k_r(\psi_w) K_s \frac{\partial (\psi_w + \rho_{rw} z)}{\partial z} \right\}$$

(不飽和 $\alpha=0$ 飽和 $\alpha=1$) (8)

式 (8) の左辺の時間項に注目すると、不飽和状態の場合には $C(\psi_w) < 0$ 、 $\alpha S_s = 0$ となり、飽和状態では $C(\psi_w) = 0$ 、 $\alpha S_s > 0$ となる。また、 $C(\psi_w)$ と $k_r(\psi_w)$ は ψ_w の関数となり、式 (8) の中で不飽和特性を表現している。式 (8) では飽和度が含まれておらず、水の圧力水頭のための支配方程式となっているので圧力型方程式と呼ばれる場合がある。

式 (8) を有限要素法や差分法などで定式化した場合に、 $C(\psi_w)$ が解析結果に与える影響について国内ではあまり検討や議論がされていない。しかし、海外では、すでに、この式 (8) の問題が Celia and Bouloutas (1990) によって指摘されている。Celia and Bouloutas (1990) は比貯留係数を考慮しない式 (8) を差分法とガラーキン型有限要

素法で定式化し、初期状態が不飽和となる一次元の吸水問題を解いた。その結果、式 (8) を用いた場合には境界における水の収支と解析領域内に溜まる水の量が差分法とガラーキン型有限要素法の両方とも一致しないことを確認している。また、日比ら (2002) は NAPL と水の 2 相流に関する支配方程式を式 (8) のように比水分容量を用いて有限要素法で定式化し、一次元領域について排水過程と吸水過程を解析した。その結果、境界の NAPL の収支と領域内の NAPL の変化量が一致しないことを確認している。両者ともに式 (8) のような非保存系の圧力型支配方程式をガラーキン型有限要素法または差分法で定式化することに問題があることを指摘している。

図 1 に示すように不飽和の一次元領域を間隔 L で要素分割し、節点 1 から N 毎にガラーキン型有限要素法で $S_s = 0$ の場合の式 (5) を離散化すると各節点で代数方程式が得られる。飽和度と間隙率の積が体積含水率となることを考慮して、得られたすべての節点の代数方程式の総和をとると以下のようなマスバランスの式が得られる。

$$L \left[\frac{\theta_{w1}^{n+1,m+1} - \theta_{w1}^n}{2} + \sum_{i=2}^{N-1} (\theta_{wi}^{n+1,m+1} - \theta_{wi}^n) + \frac{\theta_{wN}^{n+1,m+1} - \theta_{wN}^n}{2} \right] = (q_{w1}^{n+1} + q_{wN}^{n+1}) \Delta t \quad (9)$$

ここで、下付きの文字は節点番号、上付きの文字の n は時間ステップ数、 m は非線形解析のための繰り返し回数、 q_{w1}^{n+1} と q_{wN}^{n+1} は境界である節点 1 と N におけるそれぞれの流量、 Δt は時間間隔を示す。式 (9) の左辺は解析領域に貯留される水の体積を示し、右辺は境界での水の流入、流出量 (体積) を表している。式 (9) では右辺の解析領域内に貯留される水の量と境界における水の収支量が等しいことを示している。従って、式 (9) で

はマスバランスが時間ステップ毎に維持されることが分かる。

一方、同じ条件で式 (8) を節点毎にガラーキン型有限要素法で離散化して得た代数方程式の総和をとると以下のマスバランスの式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{C}_{1,2}^{n+1,m} L}{2} (\psi_{w1}^n - \psi_{w1}^{n+1,m+1}) \\ & + \sum_{i=2}^{N-1} \frac{(\bar{C}_{i-1,i}^{n+1,m} + \bar{C}_{i,i+1}^{n+1,m}) L}{2} (\psi_{wi}^n - \psi_{wi}^{n+1,m+1}) \\ & + \frac{\bar{C}_{N-1,N}^{n+1,m} L}{2} (\psi_{wN}^n - \psi_{wN}^{n+1,m+1}) \\ & = (q_{w1}^{n+1} + q_{wN}^{n+1}) \Delta t \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 $\bar{C}_{i-1,i}$ は節点 $i-1$ と i で構成される要素の比水分容量の平均であり、また、下付きの文字は節点番号、上付きの文字の n は時間ステップ数、 m は非線形解析のための繰り返し回数、 q_{w1}^{n+1} と q_{wN}^{n+1} は境界である節点 1 と N におけるそれぞれの流量、 Δt は時間間隔を示す。式 (10) の右辺は式 (9) と同様に境界における水の収支を示している。式 (10) の左辺についても式 (9) と同様に解析領域内に貯留される水の量を示すが式 (9) のように体積含水率で直接的に解析領域内に貯留される水の量を表していない。比水分容量の定義である $C = \Delta \theta_w / \Delta \psi_w$ より体積含水率の変化は $\Delta \theta_w = C \Delta \psi_w$ で得ることができる。式 (10) では節点 $i-1$ と節点 i で構成される要素の比水分容量の平均値と節点 i と節点 $i+1$ で構成される要素の比水分容量の平均をさらに平均した $(\bar{C}_{i-1,i}^{n+1,m} + \bar{C}_{i,i+1}^{n+1,m})/2$ に $\psi_{wi}^n - \psi_{wi}^{n+1,m+1}$ を乗じて解析領域内の体積含水率の前の時間ステップからの変化量である $\theta_{wi}^{n+1,m+1} - \theta_{wi}^n$ を求めている。後述するように体積含水率または水の飽和度とサクションとの関係を示す水分特性曲線は非線形であり、それに伴い比水分容量も一定でなくなる。そうすると、図 2

図 1 一次元の節点と要素

図2 実際の水分特性曲線 (C が一定でない場合)

に示すように本来の比水分容量の値と異なる比水分容量の平均値を用いるためにマスバランスが維持されない場合が生じる。当然、図3に示すように比水分容量が一定になるような水分特性曲線を用いる場合には式(10)はマスバランスが維持される。また、時間間隔を短くすれば、本来の比水分容量に $(\bar{C}_{i-1,i}^{n+1,m} + \bar{C}_{i,i+1}^{n+1,m})/2$ が近似的に等しくなるために、解析領域内に貯留される水の量と境界における水の収支が等しくなる。ただし、図3のような水分特性曲線を用いることは現実的ではなく、また、解析の時間間隔を短くすることにも限界がある。

式(5)の混合型方程式に非線形解法のPicard法を、時間の定式化には後退差分法を適用し、さらにガラーキン型有限要素法で定式化すると以下の式(11)のようになる。

$$\begin{aligned} & \alpha S_s \sum_{j=1}^{np} \int_V \phi_i \phi_j dV \frac{\psi_{wj}^{n+1,m+1} - \psi_{wj}^n}{\Delta t} \\ & + n \sum_{j=1}^{np} \int_V \phi_i \phi_j dV \frac{S_{wj}^{n+1,m+1} - S_{wj}^n}{\Delta t} \\ & + \sum_{j=1}^{np} \left(\int_V \bar{k}_r(\theta_w)^{n+1,m} K_s \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dV \right. \\ & + \int_V \bar{k}_r(\theta_w)^{n+1,m} K_s \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} dV \\ & \left. + \int_V \bar{k}_r(\theta_w)^{n+1,m} K_s \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} dV \right) \psi_j^{n+1,m+1} \end{aligned}$$

図3 水分特性曲線 (C が一定な場合)

$$= - \int_V \rho_{nw} k_r(\theta_w)^{n+1,m} K_s \frac{\partial \phi_i}{\partial z} dV + q_{wi} \quad (i=1 \sim np) \quad (11)$$

ここで、 ϕ は形状関数、 np は全節点数、 $\bar{k}_r(\theta_w)^{n+1,m}$ は $k_r(\theta_w)$ の要素毎の平均、 q_{wi}^{n+1} は解析領域境界の節点における水の流量 $[L^3/T]$ 、 V は解析領域 $[L^3]$ である。Celia and Bouloutas (1990)は高次項を無視して $S_{wj}^{n+1,m+1}$ を以下のようにテイラー展開した。

$$S_{wj}^{n+1,m+1} = S_{wj}^{n+1,m} + \frac{\partial S_w}{\partial \psi_w} \Big|^{n+1,m} (\psi_{wj}^{n+1,m+1} - \psi_{wj}^{n+1,m}) \quad (12)$$

ここで、 $\partial S_w / \partial \psi_w$ は飽和度とサクションで表した水分特性曲線の勾配となる。間隙率が水圧などにより変化しないと仮定し、 $\partial S_w / \partial \psi_w$ に間隙率を乗ずると比水分容量 $C(\psi_w) = \partial n S_w / \partial \psi_w = \partial \theta_w / \partial \psi_w$ となる。式(12)を式(11)に代入して整理すると以下の式(13)を得ることができる。

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\alpha S_s}{\Delta t} \sum_{j=1}^{np} \int_V \phi_i \phi_j dV + \frac{n}{\Delta t} \frac{\partial S_w}{\partial \psi_w} \Big|^{n+1,m} \sum_{j=1}^{np} \int_V \phi_i \phi_j dV \right. \\ & + \sum_{j=1}^{np} \left(\int_V \bar{k}_r(\theta_w)^{n+1,m} K_s \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dV \right. \\ & + \int_V \bar{k}_r(\theta_w)^{n+1,m} K_s \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} dV \\ & \left. \left. + \int_V \bar{k}_r(\theta_w)^{n+1,m} K_s \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} dV \right) \right\} \delta_{wj}^{n+1,m+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \left\{ \alpha S_s \sum_{j=1}^{np} \int_V \phi_i \phi_j dV \frac{\psi_{wj}^{n+1,m} - \psi_{wj}^n}{\Delta t} \right. \\
&+ n \sum_{j=1}^{np} \int_V \phi_i \phi_j dV \frac{S_{wj}^{n+1,m} - S_{wj}^n}{\Delta t} \\
&+ \sum_{j=1}^{np} \left(\int_V \bar{k}_r(\theta_w)^{n+1,m} K_s \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dV \right. \\
&+ \int_V \bar{k}_r(\theta_w)^{n+1,m} K_s \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} dV \\
&+ \left. \left. \int_V \bar{k}_r(\theta_w)^{n+1,m} K_s \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} dV \right) \psi_j^{n+1,m} \right. \\
&\left. + \int_V \rho_w \bar{k}_r(\theta_w)^{n+1,m} K_s \frac{\partial \phi_i}{\partial z} dV - q_{wi} \right\} \quad (i=1 \sim np) \quad (13)
\end{aligned}$$

ここで、 $\delta_{wj}^{n+1,m+1} = \psi_{wj}^{n+1,m+1} - \psi_{wj}^{n+1,m}$ とする。

式 (13) の右辺は最新の非線形の繰り返し回数 $m+1$ の前の繰り返し回数である m における式 (5) の離散化式となっている。 $\psi_{wj}^{n+1,m+1}$ が収束する過程で $\delta_{wj}^{n+1,m+1} = \psi_{wj}^{n+1,m+1} - \psi_{wj}^{n+1,m} \approx 0$ となり、最終的に式 (13) の左辺は以下の式 (14) のようにほぼ 0 となる。

$$\begin{aligned}
&\left\{ \alpha S_s \sum_{j=1}^{np} \int_V \phi_i \phi_j dV \frac{\psi_{wj}^{n+1,m} - \psi_{wj}^n}{\Delta t} \right. \\
&+ n \sum_{j=1}^{np} \int_V \phi_i \phi_j dV \frac{S_{wj}^{n+1,m} - S_{wj}^n}{\Delta t} + \sum_{j=1}^{np} \left(\int_V \bar{k}_r(\theta_w)^{n+1,m} K_s \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dV \right. \\
&+ \int_V \bar{k}_r(\theta_w)^{n+1,m} K_s \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} dV \\
&+ \left. \left. \int_V \bar{k}_r(\theta_w)^{n+1,m} K_s \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} dV \right) \psi_j^{n+1,m} \right. \\
&\left. + \int_V \rho_w \bar{k}_r(\theta_w)^{n+1,m} K_s \frac{\partial \phi_i}{\partial z} dV - q_{wi} \right\} \approx 0 \quad (i=1 \sim np) \quad (14)
\end{aligned}$$

式 (14) は式 (5) をガラーキン型有限要素法で定式化した式となり、式 (14) のマスバランスは非線形の繰り返し回数 $m+1$ を m とした式 (9)

となるので式 (13) のマスバランスが保持される。式 (13) は $\delta_{wj}^{n+1,m+1}$ のみを変数となるので解くことができ、最新の繰り返し回数で求めた $\delta_{wj}^{n+1,m+1}$ に前の繰り返し回数の水の圧力水頭 $\psi_{wj}^{n+1,m}$ を加えれば、最新の繰り返し回数の水の圧力水頭 $\psi_{wj}^{n+1,m+1}$ が求められる。

3. 不飽和特性の表現

式 (5) や式 (8) では、不飽和特性を表す水分特性曲線と呼ばれる水のサクションと体積含水率（または水の飽和度）の関係と体積含水率（または水の飽和度）と相対透過度の関係が必要である。水分特性曲線については、地盤工学会（2000）で「JGS 0151-2000 土の保水性試験」で試験方法が基準化されている。また、水分特性曲線を求める試験方法は pF 試験とも呼ばれることがあり、pF 試験ではサクションの絶対値の常用対数となる pF 値を求める。体積含水率と相対透過度の関係を求める不飽和土の透水試験方法については、基準化されたものはないが地盤工学会（2000）の「土質試験の方法と解説」で試験方法の原理を簡潔にまとめている。また、最適化のための水分特性曲線モデルとして Van Genuchten モデルや Brooks-Corey モデルが提案されている。Van Genuchten モデルは以下の式となり、これにより得られる水分特性曲線の例を図 4 に示す。

$$S_{we} = \frac{(S_w - S_{wr})}{(1 - S_{wr})} = \frac{1}{\left\{ 1 + (\alpha |\psi_w|)^{\beta} \right\}^{\gamma}} \quad \psi_w \leq 0 \quad (15)$$

ここで、 S_{we} は水の有効飽和度、 S_{wr} は水の残留飽和度である。また、 α 、 β 、 $\gamma (=1-1/\beta)$ は Van Genuchten モデルの定数となり、これらの定数は土に固有の定数である。一方、Brooks-Corey モデルは以下の式のように Van Genuchten モデルの式より若干シンプルな式となる。

$$\bar{S}_w = \left(\frac{\psi_d}{|\psi_w|} \right)^{\lambda} \quad \psi_w < -\psi_d \leq 0 \quad (16)$$

ここで、 ψ_d は浸入圧力、 λ は間隙のサイズの指数である。図 4 には、Van Genuchten モデルで求めた水分特性曲線とともに、Brooks-Corey モデルより求めた水分特性曲線も示されている。図 4 よ

図4 不飽和特性

り分かるように Van Genuchten モデルの式 (15) は飽和状態で 0 となる連続関数であるが、Brooks-Corey モデルは飽和状態で浸入圧力 ψ_d を持つことが分かる。どちらのモデルを選択するかによって解析結果が若干異なる場合がある。 ψ_d は飽和された土が排水せずに保水できる限界のサクションである。実際の土では、圧力水頭が 0 となる地下水位より高い位置に飽和帯（キャピラリバリアー）が存在する場合があります、その高さに相当する圧力水頭が ψ_d となる。

一般的に、非濡れ相流体（NAPL や気体）などを扱う多相流では Brooks-Corey モデルを使う場合が多い。式 (15) と式 (16) の α 、 β 、 ψ_d 、 λ の定数は、一般的に実験結果に最適化させることにより得ることができる。以前は、実験結果で得られた水分特性曲線を折れ線グラフで近似して用いていた時代があるが、この手法では折れ線グラフの折れ点で水分特性曲線の微分値が不連続（比水分容量が階段状の関数）となるために、折れ線グラフで近似された水分特性曲線を用いて式 (8) を有限要素法などで解くと解が発散することがある。

水の飽和度と相対透過度の関係のモデルとしては、Van Genuchten モデルを基に求めた Mualem モデル、

$$K_{rw} = S_w^{1/2} \left\{ 1 - \left(1 - S_w^{1/\gamma} \right)^\gamma \right\} \quad (17)$$

および Brooks-Corey モデルを基に求めた以下の Burdine モデル、

$$k_{rw} = \bar{S}_w^{(2+3\lambda)/\lambda} \quad (18)$$

がある。

また、これらのモデルで求めた水の飽和度と相対透過度の関係の例を図 4 に示す。図 4 から分かるように、Mualem モデルと Burdine モデルで求めた水の飽和度と相対透過度の関係には若干ずれが生じている。なお、上記の不飽和特性については、Helmig (1997) が大変参考になる。

4. 最後に

飽和・不飽和流れの支配方程式の種類やその特徴があまり一般に知られていないことに度々気が付くことがある。この機会に、上記のことを踏まえて実務の浸透流解析などを行って頂けることを著者としては望みたい。なお、不飽和の地下水の流れの支配方程式を飽和度のみで表す飽和度型方程式もあることを追記しておく。

参考文献

- 赤井浩一・大西有三・西垣 誠 (1997)：有限要素法による飽和一不飽和浸透流の解析、土木学会論文報告集、第264号、pp. 171-179。
 地盤工学会 (2000)：土質試験の方法と解説、地盤工学

- 会.
- P. A. ドミンゴ、F. W. シュワルツ (地下水の科学研究会
大西有三監訳) (1995): 地下水の科学 I、土木工学
社.
- 日比義彦、藤縄克之、藤原幸彦 (2002): 多孔体中にお
ける水 - NAPL 2 相流の数値モデルの比較、土木学
会論文集、No. 720/ III-25、pp. 25-38.
- Celia, M. and Bouloutas, E.T. (1990): A General mass-
conservative numerical solution for the unsaturated
flow equation, Water Resources Research, Vol.26,
No7, pp. 1483-1496.
- Helmig, R. (1997): Multiphase Flow and Transport
Process in the Subsurface, Springer.
- (受付: 2008年6月13日、受理: 2008年7月14日)