田口の精密累積法のセミパラメトリック ポアソンモデルによる再定式化

統計数理研究所 椿 広 計

要 旨 田口 (1962) の精密累積法が Lindsay (1997) の強度関数に関する乗法モデルによって統計学的に再定式化できることを示唆する．これを通じて，精密累積法が目指した分布形に依存しない統一的データ解析ができるようになると共に，Box et al. (1988) の批判点が克服される．田口 (1962) のデータを用いて，この方法の実際を例示した．

1. 精密累積法の発端とその統計的評価の必要性

本研究ノートの目的は，田口の提唱した精密累積法 (Minute Accumulation Analysis あるいは Minute Analysis) について，統計的理論と実際とを橋渡しすることである．すなわち，精密累積法に対する一連の国際的批判に対して，精密累積法の背後にある精密累積データを若干修正すれば，それを正当化する統計モデルとして Lindsay (1997) のパラメトリック強度乗法モデル (Parametric multiplicative intensities model, 以下 PMIM) が存在することを指摘する．更に，PMIM をセミパラメトリックモデルに拡張することで，田口のオリジナルな考え方により近い分析技法として定式化できることも示す．

田口 (1986) によれば，田口は増山元三郎と共に 1948 年森永製菓のペニシリン生産性の向上に取り組んだ．その後，親会社の M 製菓のキャラメル官能検査実験を指導し，計量値でないデータの解析に取り組んだ．さらに 1955 年インドでの実験の指導に際し，計量値を 4 組の区間データに組分けした計数値データのカイ二乗適合度検定に基づく分析結果 (Raj, 1955) に疑問を持ち新たな方法の開発を行った．このとき考案されたのが，度数法，累積法，精密累積法である．田口 (1962) には，既にこれらの方法が紹介されており，特に 32 章 2 節で精密累積法を導入し，その目的を以下のように述べている．

「これから述べる分析法は，根本的にいって，1 個 1 個の特性値が，どのような種類のものであろうと，ある分布関数の推定に他ならないという立場をとることによって，計量値，計数値，分類値，順位データなどの分析が同一の見地から全て統一的に行われるようになるのみでなく，分布型の有意差検定が行われることになるから平均値間の差のみでなく，バラツキなどによる分布の差も同時に検定されることになる．また，推定は，母平均の推定ではなく，分布関数そのものが推定されることになるのである」

この田口の問題意識自体は，Hamada and Wu (1990) でも共感が見られる．しかし，Box,

Bisgaard and Fung (1988), Pignatiello and Ramberg (2007) は、累積法や精密累積法を統計的には有効な方法ではないとし、田口の負の貢献として批判している。これらの批判は 0, 1 データに対して、正規線形モデル、分散分析モデルを当てはめることを推奨したことに起因している。

しかし、田口の累積法や精密累積法が海外に知られたのは、実験計画法第 3 版の英訳が公開された 1987 年以降であり、既に一般化線形モデルへの最尤法による当てはめに基づく離散データ解析や Cox 回帰などの生存時間解析が欧米で日常化した以降であることにも留意が必要である。むしろ、田口 (1986) 自身が、「1951～1952 年頃は尤度理論に基づく統計的推論の信頼限界や検定の数表作成を行っていたが、偶然とは関係のない誤差因子に起因するバラつきを小さくするには、重要でない参考情報にしかならないことを認識し、尤度法は公表しなかった」と述べていることも、わが国の応用統計家は留意すべきである。特に、田口 (1962) では、「 t 検定や F 検定に多くの問題があっても、それはある意味でミニマックス的な解になっていると思われるし、近似的なものとして考えるならば実用にかなりの程度まで堪えられるものと云ってよいだろう」と記載しており、後年の海外の批判は既に提案時に織り込まれている。また、「理論と実際との間に橋をかけることを自分の任務と考えている著者にとって、統計理論についての橋渡しが十分出来なかったことは、慙愧に堪えないものと云わねばならない」とまでの記述も残されている。そもそも、田口 (1986) が、「累積法、精密累積法は問題の多い手法であるが、それは次の機会にしたい」と締めくくられているのである。実際、これらの方法が提示された田口 (1962) では、累積法の検定統計量帰無分布の小数自由度による近似も示されていたが、その後田口自身が単純な F 検定などで実用上十分と割り切ったものと考えられる。幸いにして、累積法については、わが国を中心に竹内 (1973)、広津 (1977) らによる再評価と統計学的再定式化が早期から進展したことは、よく知られているが、本論の目的を超えるので指摘だけに留める。

筆者は、精密累積法を用いて分布形をパラメトリックに仮定せずに、分布関数自体を統計的推測の対象にするという統計科学全般に関わる根元的構想が、田口 (1962) によって示されていたことを、再評価すべきと考えてきた。

実際、国内外の技術分野では精密累積法の利用は今もってみられる。現在でも、我が国工業界に限れば、通常の統計的生存時間データ解析以上に活用され続けているといって過言でない。また、精密累積法は統計的品質管理分野では、Logothetis (1990)、廣野、宮川 (1990) などが具体的事例に基づく評価検討も行ってきた。Yoon (1998) のようにインターネットコントローラーの最適化シミュレーション実験の高速化を通じて国家標準形成に役立てた事例もある。それにも関わらず、国内外の統計学界では全く無視されていないしは認知されていないことを強く危惧するのである。

もちろん、Box, Bisgaard and Fung (1988) が、精密累積法を Cochran (1950) の方法を独立でないデータに対して適用していると批判したことは、統計的には全く正しい。また、精密累積法が、打ち切りデータに対する尤度上での取り扱いを考慮していないことも事実である。精密累積法を生存時間データの要因解析と考えたとき、それに代わる通常の統計解析を示したのが Hamada and Wu (1991) である。しかし、それは、精密累積法の解釈ないしは発展というよりは既存の生存時間データ解析の適用であり、田口の精密累積法自体に対して、それを正当化する統計モデルが存在するかという疑問に答えたものではない。もし、そのような正当化が存在しないのならば、精密累積法は不合理な方法論として捨て去られるべきものである。

しかし筆者は、若干の修正の必要は迫られるが、Lindsay (1995, 1997) の提唱したポアソンモ

デルの強度関数(Intensity Function), 生存時間分析におけるハザード関数(Hazard Function)に対して乗法モデルを導入する方法こそが, 精密累積法を統計モデルの世界で解釈可能とする方法と考えている. 以下では, 精密累積データの考え方と, その統計的修正を解説すると共に, その実際を例示するために田口(1962)のデータを再解析する.

2. 田口の精密累積データとその修正に基づく統計モデル

田口(1962) 32章2節では, 「どんな特性値もすべて, “ある, なし” という2組の分類によって表現される」とした. 更に, 任意の確率変数 X は, それが従う分布関数 $F_X(t)$ の推定値を構成できることを指摘している. 残念ながら田口のほとんどの文献同様, 田口(1962)には, 明確な数理的定式化がされていない. しかし, 指標関数 $I(X \leq t)$ が $F_X(t)$ の不偏推定量となることを利用すれば, 計量値, 計数値などどのようなタイプのデータも統一的に行えることに田口は注目したものと解釈できる. ここで, 指標関数 $I(\cdot)$ は引数である論理式が真のときは1, 偽の時は0をとる関数である. 田口(1962)が意図した分布関数に基づく一般的推論とは, 指標関数 $I(X \leq t)$ を「ある, なし」という2値データととらえ, 時点 t の適当な範囲に m 点 $t_1, t_2, \dots, t_m$ を設定し, 確率変数 X を m 個の0, 1 確率変数

$$C_i = I(X \leq t_i), \quad i = 1, \dots, m \quad (2.1)$$

に変換したデータを原変数 X の代わりに推論するというものである. 歴史的には,

$$M_i = 1 - C_i, \quad i = 1, \dots, m$$

が, 原データ X に対する精密累積データと呼ばれるようになった.

なお田口(1962)が, 精密累積法を適用したデータは次のようなものであり, 本稿では以下一貫してこのデータを例として利用する.

「2種類のマグネットワイヤー

A_1 : ポリエチレン被覆

A_2 : シリコン被覆

について, 10個ずつの資料を取り, 寿命試験を行ったところ次ぎ(表1)のようなデータが得られた. ただし, 寿命試験は, ある高温度で試験を行い一定の時間(これを最小単位, サイクルなどという, 最小単位は, 1秒でも, 2分でも, 5時間でも1日でも, 1年でも良い. (中略))ごとに, 絶縁破壊しているかどうかを見た. したがって, データは, A_1, A_2 , 10個ずつのテストピースについて, それぞれ何最小単位(サイクル)日で, 寿命がきたかを調べたことになる. (中略)いまの場合, 目標値である20サイクルまでやったのである.」

上記を解釈すれば, 確率変数 X は「単位時間」と呼ばれる最小単位で測定されたサイクル数と呼ばれる寿命データである. 表1のデータは, 田口(1962) 32章の表32.2によれば, 当該時点までは破壊されていなかったが, 次のサイクルでは破壊されていた資料数なので, $X = 20$ (サイクル)と記載されたデータは, 右側打ち切りデータと解釈することができる.

田口(1962)の記述では, サイクルと呼ばれる単位時間は実験を通じて一定と推察できるので, 本稿でも一定時間間隔で資料の絶縁破壊についての観測が行われたと見なす.

田口(1962)では, 表1のデータを次のように表現することを提案している.

表 1. 田口 (1962) の寿命試験データ

サイクル	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	0	1	0	2	3
A_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	0	1	1	1	2	1	0	1

「1 個 1 個の試験片が各サイクルで生きていれば 1, 死ねば 0 とするのである. これは, 分布関数と異なるが, 1 から分布関数を引いたものと見なすことが出来るから, 本質的には同じものである.」

例えば, 表 1 の水準 A_1 で最小寿命データとなっている, $X = 14$ (サイクル)で絶縁破壊が生じたという事象は, 13 サイクルまでは正常であったが, 14 サイクルでは絶縁破壊を起こしていたという事象に相当する. これは, 0 を正常, 1 を絶縁破壊とすれば, 表 2 のように単位時間毎に評価した指標関数で表現できる. すなわち, 表現 (2.1) を用いれば, $X = 14$ というデータは, この例では $C_1 = C_2 = \dots = C_{13} = 0, C_{14} = C_{15} = \dots = C_{20} = 1$ の 20 次元データに変換されることとなる.

表 2. A_1 で $X = 14$ (サイクル)の場合の分布関数表現されたデータ

サイクル	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1

本ノートでは, 歴史的慣習とは異なるが, 後述するポアソンモデルと自然に関係性が生じるようにデータを表 2 のように単位時間間隔毎に分布関数表現したデータを精密累積データと呼ぶ.

表 2 のデータを独立同一分布について観察すれば, 最小単位時間毎の 0, 1 データの平均値が分布関数の不偏推定量となることは田口の指摘通りである. 田口 (1962) は, データをこのように表現する方が, データ解析に用いる情報量が大きくなると考えていた.

田口は, 精密累積データにおける, 単位時間からなる要因を ω 因子と呼んだ. 表 2 では, ω 因子はサイクルと記された 20 水準の因子である. そして, ω 因子と他の要因との交互作用を分割法分散分析で検討することで, 要因の分布型への有意な影響も摘出できるとした.

しかし, 精密累積データは独立同一な正規変量データではなく, これに通常の分散分析を行う方法を提唱したことが, Box, Bisgaard and Fung (1988) らに誤りと批判されたのは, 田口にとっては無視可能なことでも統計的には当然である.

なお, 本稿査読時に査読者より, 田口の精密累積データに Liang and Zeger (1986) の GEE (Generalized Estimating Equation) を用いることが提案された. これは漸近有効な推論を構成することにはならないが, Box らの批判に直接対応する有力かつ単純な方法と考えられる.

これに対して本稿では, 以下で表 2 の精密累積データを若干修正し, より低次元の多変量データとしてポアソンモデル当てはめをすることが, Lindsay (1997) の強度乗法モデルに相当することとを指摘する.

正値確率変数 X に対応する (2.1) の精密累積データ C_k が, 第 k 単位時刻 ($k = 1, \dots, M$) に観測されたとし, 平均 λ_k のポアソン分布に独立に従うと仮定しよう. 実際には, この仮定はすぐ後で分かるように不合理である. ここで, 単位時間幅は十分小さく, 単位時刻に 2 回以上の事象が

観測される確率も無視可能なほど小さいと想定する．このとき，第 m 単位時刻 ($m \leq M$) に事象が生じ，第 m 単位時刻以降精密累積データが 1 となったとする．すなわち，(2.1) の記法を用いれば $C_1 = \cdots = C_{m-1} = 0$, $C_m = \cdots = C_M = 1$ の場合を考える．この仮定の下で，精密累積データのポアソン尤度関数は，(2.2) のようになる．

$$\exp\left(-\sum_{k=1,\dots,m-1}\lambda_k\right)(\prod_{k=m,\dots,M}\lambda_k)\exp\left(-\sum_{k=m,\dots,K}\lambda_k\right) \quad (2.2)$$

となる．一方，原変数 X を生成する正値分布のハザード関数(瞬間故障率関数，ポアソンモデルでは強度関数)を $\lambda(t)$ とすれば，第 m 単位時刻に対応する時刻 t_m に事象が発生した場合の尤度関数への寄与は，累積ハザード関数 $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$ を用いれば，

$$\lambda(t_m)\exp(-\Lambda(t_m)) \quad (2.3)$$

となる．(2.2) 式と (2.3) 式を見比べれば，(2.2) 式ではなく

$$\exp\left(-\sum_{k=1,\dots,m}\lambda_k\right)\lambda_m \quad (2.4)$$

が，背後の正値確率分布の厳密な尤度関数を離散近似したものとなることが分かる．(2.4) で原変数の尤度を近似しようというのが Lindsay (1997) のアイデアである．

実際，Lindsay (1997) は，原データを表 2 のように M 変数精密累積データには変換せず，表 3 に示すように事象が生じた単位時刻までの m 変数の 0, 1 データに変換し，一般化線形モデルを適用している．本稿では，田口の精密累積データに比するために，このようにして精密累積データの一部を切りとり，1 は 1 回だけ事象生起単位時間のみで観測されるようにした 0, 1 データを修正精密累積データと呼ぶことにする．さらに，表 2 のデータを修正した解析用のデータを表 3 に示す．

表 3. $X = 14$ (サイクル) の場合の修正精密累積データ

サイクル	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Lindsay は，精密累積法の存在を認識していなかったと推察されるが，この近似尤度の構成法こそ Lindsay (1995, 1997) の重要な貢献である．以上から，田口の精密累積データを修正して表 3 のように $k = 1, \dots, m$ までの修正精密累積データが観測されたものとすれば，分布形に依存せず近似尤度関数に基づく漸近有効な推論がポアソン回帰モデルを通じて可能となる．この種のポアソン回帰モデルを背後に仮定すれば，修正精密累積データは独立なデータと見なすことを正当化でき，Box, Bisgaard and Fung (1988) の批判に対応できるのである．

更に，右側打ち切りデータの尤度への寄与が生存関数

$$\exp(-\Lambda(t_m)) \quad (2.5)$$

であることに留意すれば，右側打ち切りデータの修正精密累積データは，単に表 3 のようなデータの最後列データを 1 ではなく，0 に変更し，離散近似尤度への寄与を

$$\exp\left(-\sum_{k=1,\dots,m}\lambda_k\right) \quad (2.6)$$

にすれば、整合的であることもわかる．更に左側打ち切りデータに対しても、観測値が最初に存在する ω 因子の水準から 0 を割り当て、それ以前にはデータが存在しないとすれば良いだけである．これらの処理は、一般化線形モデルの観点からすれば、素朴だが適用範囲の広い方法論と考える．

厳密な尤度関数に対する離散近似の性能は、単位時間を微小時間にすればするほど上がり、それにより GEE 接近とは異なり漸近有効な推論が可能となる．しかし、現実の小標本問題で ω 因子の水準、あるいは ω 因子の要因効果に関わる自由度(パラメータ数)を単純に増やし続けることが、データに対するモデル当てはめの上で得策か否かは難しい問題である．

この ω 因子の水準数増大に対する応用統計的に妥当かつ簡潔な接近法は、Lindsay (1997) の PMIM 当てはめである．Lindsay (1997) は、修正精密累積データを用いて、 $\lambda(k)$ にパラメトリックモデルを当てはめ、他の要因効果も含めて対数線形ポアソンモデルで分析することを提案した．そこでは先ず、修正精密累積データ $(C_1, \dots, C_m)$ の各単位時点に対して、共変量 $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ を考えたとき、 C_k の条件付き期待値 $E[C_k|\mathbf{x}_k] = \mu_k$ のポアソン分布に従うと仮定する．更に、対数リンク関数を用いて単位時間 t_k に対する期待値の変動をハザード関数 $\lambda(t)$ を用いて (2.7) のように表現した．

$$\log \mu_k = \lambda(t_k) + \mathbf{x}_k^T \boldsymbol{\beta} \quad (2.7)$$

なお、共変量 $\mathbf{x}_k$ は、時間 t_k に依存する(時間依存性共変量)場合も、そうでない場合も考えられる．なお、 $\lambda(t)$ を $\alpha \log t$ とすればワイブル分布モデルが、 αt とすればグンベル分布モデルといった古典的パラメトリックモデル(α は未知母数)を離散近似尤度で表現したこととなる．Lindsay (1997) は更に $\lambda(t)$ に t や $\log t$ の多項式モデルを当てはめることで、従来のパラメトリック生存時間分析をより広いクラスの生存時間分布モデルに拡張できることも示唆している．

ただし、Lindsay (1997) は、田口が考えたように ω 因子(時点)と要因効果との交互作用を検討しようとはしていない． $\lambda(t_k)$ を M 水準の質的要因としてノンパラメトリックに分析することも、 $\lambda(t)$ スプライン回帰を用いノンパラメトリックに推定する一般化加法モデル (Generalized Additive Model) でモデリングすることも扱っていない．従って、PMIM のハザード関数 $\lambda(t)$ の推定をノンパラメトリックに行うことが、田口の精密累積データの分散分析で目指した解析を厳密化する方法の一つと考えることが出来る．もちろん、田口はデータ解析に当たって、順序カテゴリカル因子に対しては直交多項式への分解を行うことを推奨していたので、田口自身が尤度に基づく推論の研究を続けていたとすれば、PMIM を推奨する可能性もあったかもしれない．

3. 田口 (1962) データの再解析—修正精密累積法, PMIM, セミパラメトリックモデル

表 1 の田口 (1962) 20 資料の寿命試験データで 20 サイクルは目標値であり、寿命が 20 サイクルと記載されている A_1 の 3 件、 A_2 の 1 件は、右側打ち切りデータである．また、要因 A は、 A_1 がポリエチレン被覆、 A_2 がシリコン被覆であるが、それぞれの水準にダミー変数 0, 1 を以下では割り当てる．

実際のポアソン回帰モデル当てはめのために作成した修正精密累積データ、対応するサイクル

数, ダミー変数は 326 行 3 列のデータにまとめられる. その 1 行から 14 行 (A_1 水準の $X = 14$ サイクルに対応するデータすべて) までと, 321 行から 326 行 (A_2 水準の $X = 20$ で打ち切られたデータ) を転置したものを表 4 に示す. 表中 event と記載した行が, 修正精密累積データ, Cycle と記載した行が対応する単位時間(サイクル), A と記載したのが要因 A の水準を示すダミー変数である.

表 4. 修正精密累積データと共変量を示す行列(転置したものを一部表示)

行番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...	321	322	323	324	325	326
event	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	...	0	0	0	0	0	0
Cycle	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...	15	16	17	18	19	20
A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...	1	1	1	1	1	1

なお以下の解析は, 全て, R3.02 で行った.

3.1. 修正精密累積法

田口 (1962) に従い, ω 因子は 20 水準の単位時間(サイクル)に対応する質的因子 $\omega_i, i = 1, \dots, 20$ として表現する形に (2.7) を拡張し, 更にその要因 A の主効果 $A_j, j = 1, 2$ (モデル当てはめ時には $j = 1$ のとき, $A_j = 0, j = 2$ のとき $A_j = 1$ としている) との交互作用 $(\omega \times A)_{ij}$ も含めた 2 元配置分散分析モデル (3.1) を表 4 のデータに当てはめる. ただし, 実際に修正精密累積データは絶縁故障発生単位時間 m までしか存在しないので, 個々のデータに対しては, ω 因子は第 m 水準までしか存在しないことに注意が必要である.

$$\log \mu_{ji} = \mu + \omega_i + A_j + (\omega \times A)_{ij} \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, 2 \quad (3.1)$$

また, 識別のための制約条件としては $i = j = 1$ の添え字を持つ要因効果を 0 とする. このとき, R による Analysis of Deviance (以下, ANODEV) の出力と対応するモデルの AIC を表 5 に示す. R の ANODEV では, Df はモデルパラメータの自由度, Resid. Df と Resid. Dev は当該行のパラメータまでを含むモデルの残差の自由度と残差 Deviance が算出される. さらに, Deviance として, ANODEV の結果である当該パラメータが全て 0 であるという帰無仮説に対する尤度比カイ二乗検定統計量が出力されている.

表 5. モデル (3.1) に対する ANODEV の結果

	Df	Deviance	Resid. Df	Resid. Dev	AIC
切片項のみ	325	96.458		130.458	
ω	19	42.021306		54.437	126.437
A	1	2.171	305	52.265	126.265
$\omega \times A$	20	8.345	286	43.920	155.920

田口 (1962) では, 精密累積法 (2 元配置分散分析) を用いて, 要因効果 A とサイクル ω の交互作用は無視できるが, 要因効果 A の主効果は 5% 有意にはならないが 10% 有意とされていた. 表 5 によれば, A の主効果に対する検定統計量 2.171 は自由度 1 のカイ二乗分布を用いて計算すれば

図 1. $\omega \times A$ を含めた推定生存関数

p 値 = 0.141 に相当する．従って，このデータの A の主効果を 10% 有意とすることはできない．一方で AIC はサイクルの主効果と A の主効果を含めたモデルで最小化されている．交互作用を考慮したモデル並びに AIC が最小となる主効果のみを考慮したモデルについて，それぞれ (2.5) 式を用いて生存関数の推定値をプロットすると図 1，図 2 のようになる．ただし，実線が水準 1，破線が水準 2 の推定生存関数である (以下すべての図で同様)．

3.2. Lindsay の PMIM の当てはめ

3.2.1. サイクルないしはサイクルの対数に関する多項式モデル

ここでは，ハザード関数 $\lambda(t)$ に対して t あるいは $\log t$ の多項式を当てはめる PMIM を考える．2 章で述べたようにこれらに一次式を当てはめる場合には， ω 因子が等間隔の時間軸に相当するならば，それぞれグンベル分布ないしはワイブル分布を生存時間分布として想定することに相当する．ここでは，単位時間 t サイクルにおける絶縁故障発見は，実際には $t-1$ サイクルから t サイクルまでに起きた故障なので，通常生命表解析 (離散生存時間分析) に従って $t = (\text{Cycle} - 0.5)$ に変換して t あるいは $\log t$ 多項式を当てはめることとした．結果として，どちらのモデルも強度関数に対する 1 次式ではなく，2 次式まで用いれば良いことが分かった．交互作用の必要性も含めて ANODEV の結果を表 6，7 に示す．

表 6，7 によれば，2 つのパラメトリックモデリングの中では Cycle の近似対数変換を行う方が，全般的に僅かに当てはまりが良く， A の主効果も AIC 最小化モデルとしては存在すると主

図 2. 交互作用を含めない推定生存時間関数

表 6. $t = \text{Cycle} - 0.5$ の多項式項を導入した PMIM の ANODEV の結果

	Df	Deviance	Resid.	Df	Resid. Dev	AIC
NULL				325	96.458	130.458
Cycle - 0.5	1	27.3680		324	69.090	105.090
(Cycle - 0.5) ²	1	6.0538		323	63.036	101.036
A	1	1.9760		322	61.060	101.060
A * (Cycle - 0.5)	1	0.7799		321	60.280	102.280
A * (Cycle - 0.5) ²	1	0.4989		320	59.781	103.781

表 7. $\log(\text{Cycle} - 0.5)$ の多項式項を導入した PMIM の ANODEV の結果

	Df	Deviance	Resid.	Df	Resid. Dev	AIC
NULL				325	96.458	130.458
$\log(\text{Cycle} - 0.5)$	1	30.0402		324	66.418	102.418
$\log(\text{Cycle} - 0.5)^2$	1	3.4125		323	63.005	101.005
A	1	2.0281		322	60.977	100.977
A * $\log(\text{Cycle} - 0.5)$	1	0.8673		321	60.110	102.110
A * $\log(\text{Cycle} - 0.5)^2$	1	0.9408		320	59.169	103.169

張できるものになっている。また、いずれにせよこのような小標本に対するモデリングでは、3.1に示した修正精密累積法は、 ω 因子に対してパラメータ数を多く用いすぎているために AIC が小

図 3. PMIM(3.2) に基づく推定生存関数

さくならないことも理解できる．表 7 から示唆される AIC 最小化 ($AIC = 100.977$) モデル (3.2) のパラメータの最尤推定量を表 8 に，図 1，2 と同様な推定生存関数を図 3 に示す．

$$\log \mu_{jt} = \mu + \beta_1 \log(t - 0.5) + \beta_2 \{\log(t - 0.5)\}^2 + A_j \quad t = 0, \dots, 20, \quad j = 1, 2 \quad (3.2)$$

 表 8. $\log(\text{Cycle} + 0.5)$ の多項式項を導入した PMIM の最尤推定量

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
切片	-77.3146	48.5826	-1.591	0.112
$\log(\text{Cycle} - 0.5)$	53.3088	36.7769	1.450	0.147
$\log(\text{Cycle} - 0.5)^2$	-9.4163	6.9427	-1.356	0.175
A	0.7227	0.5100	1.417	0.156

3.3. セミパラメトリックモデルの適用

モデル (3.2) の強度関数の推定を多項式関数などのパラメトリック関数を当てはめるのではなく，スプライン回帰などを用いて平滑化技法によって推定するセミパラメトリックモデル，すなわち一般化加法モデル (Hastie and Tibshirani, 1986) の当てはめを行うことも今日的には有力である．ここでは，表 8 に対応するモデル (3.2) の強度関数に，節点を各サイクルとした平滑化ス

プライン関数を当てはめ、平滑化パラメータはクロスバリデーションで定める R の gam 関数のデフォルト値で (3.3) のセミパラメトリックモデルを当てはめた結果を表 9 に示す。

$$\log \mu_{jt} = \mu + \lambda(\log(t - 0.5)) + A_j \quad t = 1, \dots, 20, j = 1, 2 \quad (3.3)$$

表 9. 一般化加法モデルの当てはめ結果

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
(Intercept)	-7.6026	3.3399	-2.276	0.0228
A	0.7613	0.5113	1.489	0.1365
Approximate significance of smooth terms:				
edf	Ref.	df	Chi. sq	p-value
s(log(Cycle - 0.5))	1.72	2.16	7.559	0.0273

表 9 の $s(\log(\text{Cycle} - 0.5))$ は、ハザード関数に平滑化スプライン関数 s を当てはめたノンパラメトリック回帰を行ったことを意味しており、edf は実効自由度を示している。詳細は、Hastie and Tibshirani (1986) を参照されたい。ハザード関数 $\lambda(t)$ の形状のスプライン関数当てはめによる推定結果を図 4 に示す。図 4 によれば、最初の故障が発生する 11 サイクルまでは、ハザー

図 4. **GAM(3.3)** における強度関数の推定結果(実線：偏回帰関数，破線： $\pm 2\text{SE}$)
横軸に付されたひげは、観測サイクルの位置を示す

図 5. 一般化加法モデル (3.3) に基づく推定生存関数

ド関数はほぼ直線，すなわち Increasing hazard 関数を有するワイブルモデルとして推定されている．その後，12 サイクル前後からわずかながら伸びが鈍化する．また，5 サイクル以下ではハザード関数の信頼区間によれば，増加関数とも減少関数とも言えない状況となっている．

モデル (3.3) の AIC は 101.366 となっており，パラメトリックモデルより若干予測性能は劣化しているが，単純な分散分析モデルを当てはめるのに比べるとかなりの改善となっている．ここでも，図 3 同様の生存関数をプロットすると図 5 のようになる．

4. 若干の討論と結語

本稿では，田口 (1962) の精密累積法を Lindsay (1997) の PMIM が，尤度論に基づくに相当するものとして，再定式化できることを指摘した．特に，ハザード関数を何らかの形でノンパラメトリックに推定する， ω 因子と他の要因との交互作用まで考慮すれば，統計的には精密累積法が狙いとしていた分析が問題なく行えることを示した．統計的には，Lindsay (1997) がポアソン回帰モデルによって多くの正值連続分布に従う統計モデルが統一的に推論できると強調したことをリマインドしたに過ぎない．一般の確率変数を正值確率変数に変換することは容易なので，田口が指摘しているようにあらゆるデータの解析に用いることが出来る方法と考えることもできる．

最後に筆者が統計的課題と考える点を 2 点記述したい．

第一に指摘しておきたいことは 0, 1 データの扱いに関する対称性の問題である．精密累積デー

タを 0, 1 データの解析法と考えると、田口の精密累積法は 0 と 1 との置換に対しては不変な推論となっていた。一方、ポアソンモデル当てはめは、事象が生起することを 1 としなければならぬので、0 と 1 とを置換することは意味を持たない。しかし、田口が SN 比解析の望大特性で行った逆数変換を正值確率変数に適用すれば、無限大が 0, 0 が無限大に変換される。通常の時間軸で事象が生起し寿命が観測された以降の事象を 0、寿命が観測された時点を 1 とし、修正精密累積データを構成し、Lindsay の近似尤度を構成することが可能である。ただし、通常の右側打ち切りデータは、ここでは左側打ち切りデータとして扱わなければならない。

このことを元の生存時間確率変数に戻して考えると、密度関数を生存関数で除したハザード関数ではなく、密度関数を分布関数で除した「逆ハザード関数」をモデリングすることに相当し、同一の推論とは見なせない。従って、やはり 0, 1 データの取り扱いについての対称性は成立しないのである。通常のハザード関数のモデリングは事象の生起を促進するリスク要因を抽出しようとするのに対し、逆ハザード関数のモデリングは事象の生起を抑制する要因を抽出するものと考えられる。Lui and Pollock (1991) は、比例逆ハザードモデルの適用を試みた初期の事例である。2000 年以降この種のモデリングは急激に増加している。椿、大野 (2008) では、Cox (1972) の比例ハザードモデルと共に比例逆ハザードモデルの同時適用を提唱し、前者を弱集団分析、後者を強集団分析と呼んだ。従って、精密累積法についても、今後同様な分析が応用統計上の意味を持つ可能性を示唆しておきたい。

第 2 に指摘しておきたいのは、田口 (1962) は、精密累積データに単純な固定効果分散分析を行ったのではなく、 ω を 2 次要因、 A を 1 次要因として、1 次、2 次の誤差を評価した分割法分散分析を行っていることである。一般的な正值確率変数を形式的に精密累積データとする場合には、このような数学的操作によって誤差を追加することはナンセンスである。しかし、精密累積法を生存時間分析として用いる場合には、各単位時間毎に生じる未知の環境要因に起因する変動を 2 次誤差として導入することは、特に時間依存性共変量を 2 次要因に追加する場合に本質的な問題となりえる。その場合には、Lindsay の方法自体を混合効果モデルに拡張する必要があるのである。Cox 回帰が提案される遙か前、1960 年代前半に時間依存性共変量のような問題をも視野に入れていた田口の洞察力は計り知れないものがある。

謝 辞 筆者は、1975 年に東京大学教養学部で 1 年間、当時青山学院大学にいらっしゃった田口玄一先生から統計解析の講義を受け、統計的方法、とくに 0, 1 データの取り扱いについて興味を持った。その後、1979 年東京大学工学部で伏見正則先生の指導の下、田口先生の精密累積法を逐次臨床試験に対する適用に関する卒業論文をまとめ、修士課程から助手にかけての時期に東京大学工学部で廣津千尋先生の下で、統計学的離散データ解析、一般化線形モデルについて学ぶ機会を得た。これらの先生方に深甚な謝意を表したい。

また、その後日科技連品質管理誌文献紹介で Lindsay (1997) の方法を知り、直ちに慶應義塾大学理工学部数理科学科の筆者の研究室の 1997 年度学部卒論生の藤田正彦君にその方法を GAM でセミパラメトリック化し、わが国の地震生起データに適用して頂いた。これが藤田 (1998) である。この方法が精密累積法と極めて近い関係にあることは、すぐに気づいていたが、その後放置したまま今日に至ったのは筆者の怠慢であり、藤田君にはお詫び申し上げたい。

田口玄一先生が逝去され、いわゆるタグチメソッドについてはその再評価を行う方が多いと考えるが、今回敢えて精密累積法を取り上げたのは、それが統計科学の観点からナンセンスと思

続けられている現状に耐えられなかったからである。

筆者を統計科学に導いた田口玄一先生のご冥福を謹んでお祈り申し上げ、逆にこの種の解説は、技術者にとってナンセンスと先生が叱られることを承知で、故田口玄一先生に本稿を捧げるものである。最後に初稿の不備を修正頂いた査読者、編集理事に深く感謝する。

参 考 文 献

- Box, G. E. P., Bisgaard, S. and Fung, C. (1988): An explanation and critique of Taguchi's contributions to quality engineering, *Quality and Reliability Engineering International* **4**, 123–131.
- Cochran, W. G. (1950): The comparison of percentages in matched samples, *Biometrika* **37**, 256–266.
- Cox, D. R. (1972): Regression models and life tables, *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B* **34**, 187–220.
- Hamada, M. and Wu, C. F. J. (1990): A critical look at accumulation analysis and related methods, *Technometrics* **32**(2), 119–130.
- Hamada, M. and Wu, C. F. J. (1991): Analysis of censored data from highly fractionated experiments, *Technometrics* **22**(1), 25–38.
- Hastie, T. and Tibshirani, R. (1986): Generalized Additive Models, *Statistical Science* **1**(3), 297–310.
- Liang, K. Y. and Zeger, S. L. (1986): Longitudinal data analysis using generalized linear models, *Biometrika* **73**(1), 13–22.
- Lindsay, J. K. (1995): Fitting parametric counting processes by using log-linear models, *Applied Statistics* **44**(2), 201–212.
- Lindsay, J. K. (1997): Parametric multiplicative intensities models fitted to bus motor failure data, *Applied Statistics* **46**(2), 245–252.
- Logothetis, N. (1990): Minute-accumulating analysis and life testing, *Journal of Applied Statistics* **17**(2), 175–185.
- Lui, K.-J. and Pollock, D. (1991): An application of proportional hazards model to study the recurrent time between traffic accidents or infractions and subsequent fatal automobile crashes, 1986–1988, *Journal of Safety Research* **22**(3), 163–170.
- Pignatiello, J. J. and Ramberg, J. S. (2007): Top ten triumphs and tragedies of Genichi Taguchi, *Quality Engineering* **4**(2), 211–225.
- Raj, D. (1955): Relative efficiency of gauging and exact measurement in estimating the proportion of a population between given limits, *Sankya: The Indian Journal of Statistics* **15**(1/2), 191–196.
- Taguchi, G. (1987): *Systems of Experimental Design*, Vols.1 1nd 2, Unipub-Kraus International Publications, Birmingham.
- Yoon, C. J. (1998): MIL-STD-188-220A parameter optimization for tactical internet, *Proc. IEEE on Military Communications Conference* **3**, 960–965.
- 田口玄一 (1962): 32.2 精密累積法, 新版実験計画法下, 丸善.
- 田口玄一 (1986): 品質工学への道, 品質 **16**(2), 127–136.
- 竹内啓 (1973): 田口氏の累積法について, 品質管理 **24**, 987–993.
- 椿広計・大野忠士 (2008): 定量的リスク評価と定性的リスク評価との架橋: 定量的リスク評価モデル当てはめにおける質的選択モデルの役割, 計量生物学 **24**, 133–141.
- 広津千尋 (1977): 2 元配置における傾向のある対立仮説と累積法, 品質 **7**(4), 117–123.
- 廣野元久・宮川雅巳 (1990): 累積法, 精密累積法, そして累積カイ二乗法, 品質 **20**(3), 214–219.
- 藤田正彦 (1998): 寿命分布における故障率関数の推定—地震生起間隔への適用—, 慶應義塾大学理工学部数理科卒業論文.

(2013 年 5 月 7 日受付 10 月 14 日最終修正 10 月 15 日採択)

著者連絡先: 〒190-8562 東京都立川市緑町 10-3
統計数理研究所 椿 広計
E-mail: tsubaki@ism.ac.jp

Semi-parametric Poisson Modeling for the Minute Analysis by G. Taguchi

Hiroe Tsubaki

The Institute of Statistical Mathematics

Abstract

The minute analysis by Taguchi (1962) should be statistically reformulated by using the multiplicative intensities model by Lindsay (1997) to attain Taguchi's original idea for the unified distribution free statistical data analyses and to get a solution against the criticism from the statisticians as Box et al. (1988). The author reanalyzes the data from Taguchi (1962) to illustrate his idea.

Key words: parametric multiplicative intensities models, Generalized Additive Models

E-mail address: tsubaki@ism.ac.jp (Hiroe Tsubaki)

Received May 7, 2013; Received in final form October 14, 2013; Accepted October 15, 2013.