ノンパラメトリック T 法の シミュレーション

名古屋大学工学部 松田 眞一

A Simulation of Nonparametric T-method

Shin-ichi MATSUDA

1. はじめに

多重比較問題において差のある処理の対を指摘するのに適した Tukey の T 法は、様々な形で一般化されている。(多重比較についてはたとえば Hochberg and Tamhane (1987) 参照。) 正規分布を仮定しないものとして Sen (1969) は、二元配置に対するノンパラメトリック T 法を提案した。しかし、この方法は、完全データに対するものであり、欠測値を全く考慮にいれていなかった。そこで、Matsuda (1988) は欠測値を含む二元配置にも適用できるノンパラメトリック T 法を提案した。これらの方法はどれも漸近的な結果に基づいている。実際に検定を行うときには標本が余り大きくないときの方が多く、小標本における動向が注目される。本稿の目的は、まず小標本に関するシミュレーションを行い、漸近的方法の効力を調べることである。しかるに、漸近的方法にはおのずと限界があり、小標本では実質の有意水準の低下に伴う検出力の劣化が目だつ。従って、次にそれを補える修正した方法を 2 つ示し、それに対するシミュレーションも行い、その実用性を示すことを考える。さらに、シミュレーションの立場で Sen の方法との相対効率を調べ、Matsuda (1988) の結果と比較し、適用基準の修正を考える。

2. モデルとノンパラメトリック T 法の構成

$p(\geq 3)$ 個の処理、 n 個のブロックからなる二元配置 $\{X_{ij} : i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, p\}$ を考える。欠測値を許すため j 番目の処理において観測値のあるブロックの番号の集合を D_j と記すことにする。観測値は次のモデルに従っているとする。

$$X_{ij} = \mu_0 + \beta_i + \tau_j + \varepsilon_{ij}, \quad j=1, 2, \dots, p, \quad i \in D_j$$

ここで、 $\sum \tau_j = 0$ と仮定し、 $\{\varepsilon_{ij} : j=1, \dots, p, i \in D_j\}$ は i.i.d. で未知の連続分布 $F(x)$ に従っているとする。

Key words: Multiple comparison, Two-way layout, Missing values.

この時、検定したい帰無仮説は、

$$H: \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_p = 0$$

である。

便宜上、次のようにおく。

$$D_{jk} = D_j \cap D_k, \quad n_{jk} = \#D_{jk} \quad (1 \leq j < k \leq p)$$

また、次を仮定する。

$$n_{jk} > 0, \quad n_{jk}/n \rightarrow d_{jk} > 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

j, k 番目の処理 ($1 \leq j < k \leq p$) に対して統計量を定めるために

$$Y_{j,k}^{(i)} = (X_{ij} - X_{ik})/2, \quad i \in D_{jk}$$

とおく。スコア E_{ma} を

$$E_{ma} = J_m(a/(m+1)), \quad a = 1, 2, \dots, m$$

で定義する。ただし、 J_m は $\lim J_m(u) = J(u)$ など Matsuda (1988) の仮定を満たしているとする。

さらに、次のような m 次元実ベクトル空間上の関数 $h(W)$ を定義する。

$$h(W) = (\sum_{a=1}^m E_{ma} Z_a)/m$$

ただし、

$$W = (W_1, W_2, \dots, W_m)'$$

$$R_a: |W_a| \text{ の } \{|W_i|: i=1, 2, \dots, m\} \text{ における順位}$$

$$Z_a = \begin{cases} 1 & \text{if } W_a > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

この関数を用い、統計量 $T_{j,k}$ を次のように定義する。

$$T_{j,k} = h(Y_{j,k}), \quad 1 \leq j < k \leq p$$

ただし、 $Y_{j,k}$ は $\{Y_{j,k}^{(i)}: i \in D_{jk}\}$ を並べたベクトルで成分数を m とする。

この統計量に対し Matsuda (1988) より次の定理が分かっている。

定理 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_H \{ |T_{j,k} - \mu| \leq n_{jk}^{-1/2} A(J^*) | M |_{p'a/2}, 1 \leq j < k \leq p \} \geq 1 - \alpha$$

ただし、

$$J^*(x) = \begin{cases} J(2x-1) & \text{if } x \geq 1/2 \\ -J(1-2x) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$\mu = \int_{1/2}^1 J^*(x) dx = \int_0^1 J(x) dx / 2,$$

$$\{A(J^*)\}^2 = \int_0^1 \{J^*(x)\}^2 dx - (\int_0^1 J^*(x) dx)^2$$

$$p' = p(p-1)/2$$

で, $|M|_{p', \alpha}$ は標準正規分布からの大きさ p' の標本の最大絶対値の分布の上側 α 点.

この定理の系として次が得られる.

系 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_H \{ |T_{j,k} - \mu_{n_{jk}}| \leq n_{jk}^{-1/2} A_{n_{jk}} |M|_{p', \alpha} / 2, 1 \leq j < k \leq p \}$$

$$\geq 1 - \alpha$$

ただし,

$$\mu_m = (\sum_{a=1}^m E_{ma}) / 2m,$$

$$A_m^2 = (\sum_{a=1}^m E_{ma}^2) / m$$

証明はスコアの仮定により明らか. この修正は, Sen (1969) でもなされているものである.

表 1. $W(m, p)$ の値 ($\alpha = .05$)

$W(m, p)$				
m	$p=3$	4	5	6
7	14	—	—	—
8	17	18	—	—
9	20.5	21.5	22.5	—
10	23.5	25.5	26.5	27.5
11	27	29	30	31
12	30	33	34	36
13	34.5	36.5	38.5	40.5
14	37.5	41.5	43.5	44.5
15	42	45	48	49
16	46	50	53	54
17	50.5	54.5	57.5	59.5
18	54.5	59.5	62.5	64.5
19	59	64	68	70
20	64	69	73	76
21	68.5	74.5	78.5	81.5
22	73.5	79.5	84.5	87.5
22	78	85	90	94
24	83	91	96	100
25	88.5	96.5	101.5	106.5
26	93.5	102.5	108.5	112.5
27	99	108	115	119
28	104	114	121	126
29	109.5	120.5	127.5	132.5
30	115.5	126.5	133.5	139.5

さらに、次の系も得られる。

系 2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_H\{|T_{j,k} - \mu_{n_{jk}}| < |t_{n_{jk}}|_{p', \alpha}, 1 \leq j < k \leq p\} \geq 1 - \alpha$$

ただし、 $|t_{n_{jk}}|_{p', \alpha}$ は H の下での $T_{j,k} - \mu_{n_{jk}}$ の分布からの大きさ p' の標本の最大絶対値の分布の上側 α 点。(正確には分布が離散なので α を超えない最小の値)

証明は $n_{jk}^{1/2}(T_{j,k} - \mu_{n_{jk}})$ の分布が標準正規分布に収束することより明らか。(確率内の不等号が真の不等号になっているのは $|t_m|_{p', \alpha}$ の決め方による。これは、漸近的には意味のないことだが、実際の適用の際に影響すると思われる。さらに、系 2 が極限をとらずに成り立つことを期待したいが、証明はなされていない。シミュレーションの結果を見ると成り立っていると思われる。)

上の 2 つの系は小標本において有力と思われるが、系 2 では $|t_m|_{p', \alpha}$ の値が求められるかどうか

表 2. 帰無仮説における棄却数
(ロジスティック分布, $\alpha = .05$, Wilcoxon [正規] 型スコア)

p	n	定理 1	系 1	Sen の方法	Sen の修正	系 2
3	10	28[12]	41[28]	34[12]	38[36]	41
	15	33[16]	33[33]	33[14]	45[42]	42
	30	38[25]	40[38]	40[27]	43[46]	40
4	10	26[0]	26[20]	18[6]	39[30]	34
	15	20[9]	22[20]	18[5]	31[27]	38
	30	41[23]	42[37]	39[31]	46[41]	44
5	10	0[0]	26[0]	24[5]	34[32]	38
	15	14[5]	23[12]	27[8]	49[38]	38
	30	36[21]	37[34]	31[25]	39[38]	40
6	10	0[0]	0[0]	16[0]	31[28]	26
	15	14[1]	19[10]	22[8]	34[30]	39
	30	38[26]	43[37]	43[26]	48[49]	51

表 3. 対立仮説における棄却数の比較
(ロジスティック分布, $\alpha = .05$, Wilcoxon [正規] 型スコア)

p	n	$(\tau_1, \dots, \tau_p)$	系 1	Sen の修正	系 2
3	10	$(-1/2, 0, 1/2)$	363 [306]	354 [346]	363
	11		390 [326]		390
	15		532 [523]		565
	16		573 [549]	608 [595]	593
	30		900 [892]		904
	33		951 [947]		956
5	10	$(-1/2, -1/4, 0, 1/4, 1/2)$	173 [0]	316 [285]	265
	11		228 [0]		375
	15		398 [357]		468
	16		415 [361]	567 [536]	499
	30		878 [862]		896
	33		906 [895]		918

注: τ は標準偏差の係数のみ示した

かが問題である。ここでは、Wilcoxon 型スコアに対してのみこの系を考える。この場合の正確な分布に基づく $|t_m|_{p'a}$ の値を

$$|t_m|_{p'a} = W(m, p) / \{m(m+1)\}$$

と表したときの $W(m, p)$ の数値計算結果を表 1 に示しておいた。

3. シミュレーションの方法と結果

シミュレーションは、簡単化のためまず欠測値を含まない二元配置 ($n = n_{jk}, 1 \leq j < k \leq p$) にたいして行った。方法は以下の通りである。

- (1) 指定された n, p に対し擬似乱数を用いてデータを作成する。
- (2) 定理 1, 系 1 または系 2 を用いて処理の各対が棄却されるかどうか調べる。
- (3) 上の(1), (2) を 1,000 回繰り返し、処理の各対およびデータの棄却数を求める。

また、上と同様のやり方を Sen (1969) にたいしても行ってみた。

なお、調べた分布は一様分布、正規分布、両側指数分布、Cauchy 分布、ロジスティック分布である。(Matsuda (1988) では、ロジスティック分布に対する漸近的相対効率が求められていなかった。Sen の方法との比較は重要である。) 用いたスコアは以下の通りである。

• Wilcoxon 型スコア

$$J_n(x) = J(x) = x, \quad \tilde{J}_n(x) = \tilde{J}(x) = 2x - 1$$

• 正規型スコア

$$J_n(x) = J(x) = \Phi^{-1}((x+1)/2), \quad \tilde{J}_n(x) = \tilde{J}(x) = \Phi^{-1}(x)$$

ただし、 $\Phi(x)$ は標準正規分布の分布関数である。また、後式は Sen の方法で用いるスコア関数である。(表では正規型スコアによる結果を [] で示した。) さらに、 n, p, α は基本的に次のよう

表 4. 帰無仮説における棄却数 (欠測値を含む場合)
(ロジスティック分布, $\alpha = .05$, Wilcoxon 型スコア)

p	n	欠測率	系 2	Sen の修正	基準 (i)	基準 (ii)	基準 (iii)	複合
3	16	.02	40	43	43	43	43	51
		.03	44	43	43	46	43	56
		.04	43	41	41	43	42	54
	20	.02	40	40	40	40	40	51
		.03	39	47	47	40	47	58
		.04	45	43	43	39	45	61
5	16	.02	36	32	32	35	34	50
		.03	39	34	34	36	35	55
		.04	29	27	26	28	23	43
	20	.02	38	36	34	40	35	56
		.03	35	36	37	37	37	50
		.04	30	36	37	31	32	48

表 5. 対立仮説における棄却数 (欠測値を含む場合)
(ロジスティック分布, $\alpha=.05$, Wilcoxon 型スコア)

p	n	欠測率	系 2	Sen の修正	基準 (i)	基準 (ii)	基準 (iii)
3	16	.02	570	588	588	592	588
		.03	568	572	572	574	573
		.04	570	574	574	576	576
	20	.02	694	719	719	718	719
		.03	695	706	706	707	706
		.04	696	694	694	692	696
5	16	.02	478	526	526	529	533
		.03	479	498	505	511	520
		.04	468	457	465	478	484
	20	.02	661	659	659	664	671
		.03	654	633	646	659	663
		.04	609	565	593	617	618

注: 対立仮説は表 3 と同じもの

に設定した。

$$n=10, 15, 30, \quad p=3, 4, 5, 6, \quad \alpha=.05$$

上の方法によるシミュレーションの結果のうちロジスティック分布による結果が表 2, 3 である。

表 2 は、帰無仮説の下で定理 1, 系 1, 系 2 と Sen の方法を比較したものである。これによると系 1, 系 2 の場合でも有意水準を上回らない。(系 2 の $p=6, n=30$ における数値は誤差の範囲内と考えられる。)また, Sen の方法でも同様の修正が良好であることが分かる。(他の分布でもほぼ同様の結果である。)ゆえに, この修正は検出力を上げるのにいい方法だと思われる。さらに棄却数自体を見ると, 5% の有意水準に対する実質的有意水準は最終的に定理 1 などで 4% 前後に, Sen の方法で 4.5% 前後になるものと思われる。ただし, 正規型スコアの場合は若干劣る。Sen の修正した方法は安定性の面でも優れているが, 系 2 の方法だとそれに対抗しうることが分かる。

表 3 は, 対立仮説の下で Sen の方法と比較した結果である。(有力な方法だけ示し, $p=3, 5$ の場合のみを掲げた。また, 比較の簡単化のため棄却数はデータの棄却数のみ示した。) n が同じの時, 一様分布, 正規分布, 両側指数分布同様, ロジスティック分布でも Sen の方法の方が優っている。(Cauchy 分布では Matsuda (1988) の通り系 1, 系 2 の方がたいてい優っているが, 系 1 は $p=5, n=10$ で正規型スコアの時と $p=6, n=10$ の時劣っている。)そこで, ブロック数 n を少し増やしたのも付け加えておいた。先の 3 つの分布では $n=30$ で 1 割増しの方法が有力となるが, ロジスティック分布では $p=5$ のとき若干およばない。(これは相対効率が割と低いことを反映しているのであろう。)さらに, n が小さいときはブロック数にもっと差をつけないと対抗できない。表の結果を元に Matsuda (1988) の適用基準の修正も考えられるが, 余り実用的でないかもしれない。系 2 の場合は 1 割増しで十分に張り合えるようで, そのままの基準を用いてもよいであろう。なお, Wilcoxon 型スコアと正規型スコアの比較では, 全体的に n が小さいときには Wilcoxon 型がよく, n が大きいときには正規型がよい傾向がある。(ロジスティック分布では常に Wilcoxon 型がよいが, 正規分布では少し正規型が強いながらこの傾向を示す。)

上の結果を総合すると、系2は基準を修正しなくてよい点と Wilcoxon 型スコアがさほど悪くない点を考慮するととても有力な方法だと思われる。

さて、次に上の結果に基づき系2と Sen の修正した方法について欠測値を含む二元配置に対するシミュレーションを行ってみる。方法は、上の (1)~(3) と同様であるが、(1)において欠測値がある確率（以下では欠測率と呼ぶ）で無作為に生じさせるものとする。さらに、(2)において系2と Sen の修正した方法による棄却の他に次のような系2の適用基準によって2つを組み合わせたものも考える。

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \min_{j,k} n_{jk} > \tilde{n}/0.9 \\ \text{(ii)} \quad & \max_{j,k} n_{jk} > \tilde{n}/0.9 \\ \text{(iii)} \quad & \sum_{j,k} n_{jk}/p' > \tilde{n}/0.9 \end{aligned}$$

ただし、 j, k は $1 \leq j < k \leq p$ とする。ここで、(i) は Matsuda (1988) の基準であるが、(ii), (iii) はそれより少し条件をゆるくしたものである。設定は次の通りとした。

$$n=16, 20, \quad p=3, 5, \quad \alpha=.05, \quad \text{欠測率}=.02, .03, .04$$

表4はロジスティック分布の帰無仮説における結果である。複合というのは、系2と Sen の修正のどちらかで棄却された数を示している。まず、この複合方法は有意水準を保てないことが分かる。従って、実用的ではない。3つの基準については、どれも有意水準を保っていることが分かるので、問題はない。他の4つの分布に対しても同様な結果を得ている。

表5はロジスティック分布の対立仮説における結果である。対立仮説は表3で用いたものと同じものとした。これによると基準(i)はだいたい2つの方法よりよい検出力を得ているが、中にはその間の検出力を示すものもある。基準(ii), (iii)は、常に2つの方法よりよく、基準(i)に対しても優っている。(他の分布では、基準(ii), (iii)でも2つの方法の検出力の間にはいることがあるが、基準(i)よりは常によい。)基準(ii)と(iii)の比較では余り差がなく、(ロジスティック分布では基準(iii)が有力だが、他の分布では基準(ii)も割とよい。Cauchy 分布ではもともと系2の方が強いので基準(ii)の方が常によい。)どちらがよいとも決めがたい。事前に分布に関するなんらかの情報が得られているのでない限りどちらを使ってもよいであろう。

4. お わ り に

初期の段階では定理1の修正として系1しか考えていず、 n が小さいときの効率の悪さが目だっていたのだが、系2を考えることによってそれが大幅に改善され非常に良好な結果が得られた。欠測値を含むデータに対して系2はとても役立つであろう。基準については、おおまかな設定ながらある程度の効果が確められたので、基準(ii)もしくは(iii)が実用に値すると思われる。

最後に、系2の方法は Wilcoxon 型スコアにしか適用できないのが惜しまれる。他のスコアでも適用できるようにするのが残る課題であり、さらなる修正が望まれるところである。

謝 辞 本稿作成にあたり有益な助言を賜った大阪大学の白旗慎吾先生、並びに、名古屋大学の吉村功先生に心から謝意を表します。また、適切な助言を賜った査読者各位にも感謝の意を表し

ます.

参 考 文 献

- Hochberg, Y. and Tamhane, A.C. (1987): *Multiple Comparison Procedures*, John Wiley, New York.
Matsuda, S. (1988): Nonparametric T-method in two-way layouts. to appear in *J. Japan. Stat. Soc.*
Sen, P.K. (1969): On nonparametric T-method of multiple comparisons for randomized blocks. *Ann. Inst. Statist. Math.* **21**, 329-333.

(1988 年 6 月 28 日受付 10 月 21 日最終修正)

著者連絡先: 〒464-01 名古屋市千種区不老町 名古屋大学工学部工業数学教室