ゼロを含む2変量データのモデル化 と日降水量データの解析

東京理科大学理工学部 清水邦夫・寒河江雅彦

Modelling Bivariate Data Containing Zeroes, with an Analysis of Daily Rainfall Data

Kunio SHIMIZU and Masahiko SAGAE

要 旨

ゼロもしくは連続な正実数値を取る1変量確率分布の生成には、2通りの方法がある。1つは原点での離散確率と連続分布との混合によるもので、連続分布としては対数正規分布やガンマ分布が用いられる。もう1つは原点で確率をもつ確率分布族によるもので、たとえば自由度0の非心 χ^2 分布がそうである。本報告では、ゼロを含む2変量データとして気象庁地域気象観測(アメダス)データから得られる2地点で同時に観測される日降水量標本を取り、それらの対数正規分布を基礎にしたモデル化を扱う。モデルのもとでの母数の最尤推定では、最尤推定方程式を直接に書き下して推定値を求める方法を与える。

1. はじめに

正の値のみの標本のとき、2母数対数正規分布 $A(\mu, \sigma^2)$ はデータ解析のための有力なモデルの1つと言える。Crow and Shimizu eds. (1988)は $A(\mu, \sigma^2)$ とそれに関係した分布の最近までの理論と応用をまとめた。清水(1988)は同書の応用例の紹介を行い、今後の問題点のいくつかを指摘している。本稿では、対数正規分布を適用するさい特徴的な「正の値のみからなるデータ」を「負でない値からなるデータ」に広げたときのモデル化について考える。焦点は対数正規分布を基礎としたものに当てられる。

Aitchison (1955)は1変量のモデルとして原点で離散確率をもつ対数正規分布(A 分布)の定義をつぎのように与えた:

$$\begin{aligned} Pr(X=0) &= \delta \quad (0 \leq \delta < 1) \\ Pr(X \leq x) &= \delta + (1 - \delta)A(x | \mu, \sigma^2), \quad x > 0 \end{aligned}$$

Key words: Bivariate normal and lognormal distributions, Correlation coefficient, Maximum likelihood estimation, Missing data, Nonnegative random variable

ここで、 $\Lambda(x|\mu, \sigma^2)$ は $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ の分布関数を表わし、 $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$ である。この分布は Crow and Shimizu eds. の第2章ではデルタ対数正規分布 $\Delta(\delta, \mu, \sigma^2)$ と呼ばれている。 $\Delta(\delta, \mu, \sigma^2)$ は離散と連続の混合型となっている。もし $\delta=0$ であれば $\Delta(\delta, \mu, \sigma^2)$ は $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ となる。また、もし $\delta=1$ であればそれは1点分布となるから、この場合は排除しておく。Aitchisonは $\Delta(\delta, \mu, \sigma^2)$ の平均と分散の一致最小分散不偏 (UMVU) 推定量を構成した。より一般化された母数関数の UMVU 推定は Shimizu and Iwase (1981) で扱われている。

なお、離散と連続の分布の混合を用いるモデル化とその応用は、他に Lachenbruch (1976), Owen and DeRouen (1980), Pennington (1983), Smith (1988)にある。一方、Siegel (1985)により、原点で確率をもつ連続分布として自由度0の非心 χ^2 分布を用いるモデル化も与えられている。

$\Delta(\delta, \mu, \sigma^2)$ の多変量への1つの拡張は Iwase, Shimizu and Suzuki (1982) により

$$Pr(X_1=0, \dots, X_p=0)=\delta \quad (0 \leq \delta < 1)$$

$$Pr(X_1 \leq x_1, \dots, X_p \leq x_p)=\delta+(1-\delta) \Lambda_p(x_1, \dots, x_p|\mu, \Sigma), \quad x_1, \dots, x_p > 0$$

と与えられた。ここで、 $\Lambda_p(x_1, \dots, x_p|\mu, \Sigma)$ は p 変量対数正規分布 $\Lambda_p(\mu, \Sigma)$ の同時分布関数を表わす。この分布は、Iwase らでは p 変量デルタ分布と呼ばれ、Crow and Shimizu eds. の第2章では p 変量デルタ対数正規分布 $\Delta_p(\delta, \mu, \Sigma)$ と呼ばれている。Iwase らは、 $\Delta_p(\delta, \mu, \Sigma)$ の積モーメントを含むある母数関数の UMVU 推定量を構成している。しかし、上記の定義では、2地点で同時に観測される降水量や世帯における2種類の消費支出のように、標本の型が x, y を正の数として $(0,0)'$, $(x,0)'$, $(0,y)'$, $(x,y)'$ といったゼロを含む2変量データを解析できない。そこで、このような場合に対応できるようなモデル化を提案し、母数の最尤推定を扱う。

2. モデル

負でない値を取る2つの確率変量の組 $(X, Y)'$ でつぎの性質をもつものを考える：

$$Pr(X=0, Y=0)=\delta_0$$

$$Pr(0 < X \leq x, Y=0)=\delta_1 F(x), \quad x > 0$$

$$Pr(X=0, 0 < Y \leq y)=\delta_2 G(y), \quad y > 0$$

$$Pr(0 < X \leq x, 0 < Y \leq y)=\delta_3 H(x, y), \quad x, y > 0$$

ここで、 $0 \leq \delta_r < 1$ ($r=0, 1, 2$), $\delta_3=1-\delta_0-\delta_1-\delta_2 > 0$ であり、 F, G は正の値を取る何等かの1変量連続分布の分布関数を、また H は正の値を取る何等かの2変量連続分布の分布関数を表わすものとする。仮定の $\delta_3 > 0$ は $X > 0, Y > 0$ のときの X と Y の同時分布が意味をもつために必要である。結局、

$$Pr(X \leq x, Y \leq y | X > 0, Y > 0) = H(x, y), \quad x, y > 0$$

が成り立ち、また、もし $\delta_r \neq 0$ ($r=1, 2$) ならば

$$Pr(X \leq x | X > 0, Y=0) = F(x), \quad x > 0$$

$$Pr(Y \leq y | X=0, Y > 0) = G(y), \quad y > 0$$

が成り立つ。

降水量データを扱おうとするとき、 F, G, H の関数型の候補には対数正規型やガンマ型があげられよう。事実、たとえば Stern and Coe (1984) のように日降水量データにはガンマ分布がよく適合するという報告がある。また、Kedem and Chiu (1987) は GATE (Global Atmospheric Research Program, Atlantic Tropical Experiment) データでは 15 分降水量に対数正規分布がよく適合すると述べている。ここでは、モデルの作り易さから、対数正規型を基礎にしたモデル化を行う。すなわち、

$$F(x) = \Lambda(x | \mu_1^*, \sigma_1^{*2}), \quad x > 0$$

$$G(y) = \Lambda(y | \mu_2^*, \sigma_2^{*2}), \quad y > 0$$

$$H(x, y) = \Lambda_2(x, y | \mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho), \quad x, y > 0$$

とする。ここで $\Lambda(\cdot | \mu, \sigma^2)$ は $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ の分布関数を、 $\Lambda_2(\cdot, \cdot | \mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$ は 2 変量対数正規分布 $\Lambda_2(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$ の同時分布関数を表わし、 $-\infty < \mu_1^*, \mu_2^*, \mu_1, \mu_2 < \infty$ で $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_1, \sigma_2 > 0$ であり、 $-1 < \rho < 1$ を仮定する。この分布を 2 変量デルタ対数正規分布と呼ぶことにする。それは、もし δ_1, δ_2 が共に 0 ならば Iwase, Shimizu and Suzuki (1982) による 2 変量デルタ (対数正規) 分布に帰着し、また、もし $\delta_0, \delta_1, \delta_2$ が共に 0 ($\delta_3=1$) ならば Λ_2 に帰着する。以下、 $0 < \delta_r < 1$ ($r=0, 1, 2, 3$) の場合を扱うものとし、記法として $\Delta_2(\delta_0, \delta_1, \delta_2; \mu_1^*, \mu_2^*, \mu_1, \mu_2; \sigma_1^{*2}, \sigma_2^{*2}, \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$ もしくはより簡単に Δ_2 を用いる。

Δ_2 分布のモーメントはつぎで与えられる:

$$E(X^{r_1}) = \delta_1 \exp(r_1 \mu_1^* + r_1^2 \sigma_1^{*2}/2) + \delta_3 \exp(r_1 \mu_1 + r_1^2 \sigma_1^2/2) \quad (2.1)$$

$$E(Y^{r_2}) = \delta_2 \exp(r_2 \mu_2^* + r_2^2 \sigma_2^{*2}/2) + \delta_3 \exp(r_2 \mu_2 + r_2^2 \sigma_2^2/2) \quad (2.2)$$

$$E(X^{r_1} Y^{r_2}) = \delta_3 \exp\{r_1 \mu_1 + r_2 \mu_2 + (r_1^2 \sigma_1^2 + 2r_1 r_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho + r_2^2 \sigma_2^2)/2\} \quad (2.3)$$

ここで、 r_1, r_2 は正の数とする。

3. 標 本

Δ_2 分布にしたがう大きさ N の無作為標本の型は、 n_0 個の $(0, 0)'$, n_1 個の $(x^*, 0)'$, n_2 個の $(0, y^*)'$, n_3 個の $(x, y)'$ からなる。ここで、 x^*, y^*, x, y は正の数を表わす。 n_r ($r=0, 1, 2, 3$) は負でない整数で、

$$\sum_{r=0}^3 n_r = N$$

を満たす。 $(n_0, n_1, n_2, n_3)'$ は母数 $(N; \delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ の 4 項分布にしたがう。

n_r ($r=0, 1, 2, 3$) の実現値が 1 以上の場合に無作為標本を図式的に示すと、一般性を失うことなく、

n_0	n_1	n_2	n_3
0	0	x_1^*	$x_{n_1}^*$
0	0	y_1^*	$y_{n_2}^*$
0	0	x_1	x_{n_3}
0	0	y_1	y_{n_3}

としてよい。ここで、

$$x_i^* > 0 \quad (i=1, \dots, n_1); \quad y_j^* > 0 \quad (j=1, \dots, n_2); \quad x_k, y_k > 0 \quad (k=1, \dots, n_3)$$

である。

4. 母数の最尤推定

母数推定の最小標本数に関する条件が煩雑になることを避けるために、 n_1 と n_2 の実現値は2以上を、 n_3 の実現値は3以上を仮定する。

4.1 δ_r ($r=0, 1, 2, 3$) の推定

標本の尤度は

$$L = L_1 \times L_2$$

と2つの部分に分解される。ここで、 L_1, L_2 は

$$L_1 = \binom{N}{n_0, n_1, n_2, n_3} \prod_{r=0}^3 \delta_r^{n_r}$$

$$L_2 = \prod_{i=1}^{n_1} g(\mu_1^*, \sigma_1^{*2} | x_i^*) \prod_{j=1}^{n_2} g(\mu_2^*, \sigma_2^{*2} | y_j^*) \prod_{k=1}^{n_3} f(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho | x_k, y_k)$$

を表わす。ただし、 $\binom{N}{n_0, n_1, n_2, n_3}$ は4項係数で、 $g(\mu^*, \sigma^{*2} | \cdot)$ は $\Lambda(\mu^*, \sigma^{*2})$ の密度関数を表わし、 $f(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho | \cdot, \cdot)$ は $\Lambda_2(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$ の同時密度関数を表わす。

δ_r ($r=0, 1, 2, 3$) の最尤推定値は $\sum_{r=0}^3 \delta_r = 1$ のもとで $L_1 \rightarrow \max$ とすることにより

$$\hat{\delta}_r = n_r / N$$

と求まる。 $(n_0, n_1, n_2, n_3)'$ が母数 ($N; \delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3$) の4項分布にしたがうことから、 $\hat{\delta}_r$ は δ_r の不偏推定値となることがわかる。

4.2 $\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_1, \mu_2, \sigma_1^{*2}, \sigma_2^{*2}, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho$ の推定

つぎの6つの場合を扱うことにする：

$$M1: \text{一般}(\mu_1^* \neq \mu_1, \mu_2^* \neq \mu_2, \sigma_1^{*2} \neq \sigma_1^2, \sigma_2^{*2} \neq \sigma_2^2)$$

$$M2: \mu_1^* \neq \mu_1, \mu_2^* \neq \mu_2, \sigma_1^{*2} = \sigma_1^2, \sigma_2^{*2} \neq \sigma_2^2$$

$$M3: \mu_1^* \neq \mu_1, \mu_2^* \neq \mu_2, \sigma_1^{*2} = \sigma_1^2 = \sigma_2^{*2} = \sigma_2^2 (= \sigma^2)$$

$$M4: \mu_1^* \neq \mu_1, \mu_2^* \neq \mu_2, \sigma_1^{*2} = \sigma_1^2 \neq \sigma_2^{*2} = \sigma_2^2$$

$$M5: \mu_1^* = \mu_1, \mu_2^* = \mu_2, \sigma_1^{*2} = \sigma_1^2 = \sigma_2^{*2} = \sigma_2^2 (= \sigma^2)$$

$$M6: \mu_1^* = \mu_1, \mu_2^* = \mu_2, \sigma_1^{*2} = \sigma_1^2 \neq \sigma_2^{*2} = \sigma_2^2$$

母数の最尤推定値とそれらを求めるための計算は付録にゆずる。これらの場合が考えられる背景は次節で適用例を通して述べられる。

4.3 相関係数の推定

Λ_2 分布の相関係数

$$\text{Corr}(X, Y) = \text{Cov}(X, Y) / (\text{Var}(X) \text{Var}(Y))^{1/2}$$

は(2.1), (2.2), (2.3) から得られ、それは2つの変量間の関係を見る上で興味ある量の1つで

ある。たとえば，4 節 2 項 M6 の場合，

$$\text{Corr}(X, Y) = \{ \delta_3 \exp(\sigma_1 \sigma_2 \rho) - (\delta_1 + \delta_3)(\delta_2 + \delta_3) \} / [\{ (\delta_1 + \delta_3)(\delta_2 + \delta_3) \{ \exp(\sigma_1^2) - (\delta_1 + \delta_3) \} \{ \exp(\sigma_2^2) - (\delta_2 + \delta_3) \} \}]^{1/2}$$

となる。相関係数の最尤推定値は各母数のかわりにそれぞれの最尤推定値を代入すれば得られる。

5. 適用例

表 1 は，気象庁地域気象観測（アメダス）データから得られる東京（地点コード 44131：東京管区气象台），千葉（45212：千葉測候所），水戸（40201：水戸地方气象台）の 1988 年 9 月の日降水量（単位 mm）を表わしている。2 地点を取り出したとき，データは $\mathcal{L}_2$ 分布による解析が可能な型をしていることに気づくであろう。以下の解析では，降水量が比較的多い時期として同年同地点における暖候期（5 月から 10 月までの 184 日間）の日降水量データを選び，より詳しく調べることにする。

まず，2 地点を選び，一方の地点で雨が降っているかどうかによって標本を分けたときの他方の地点の降水量分布について調べる。東京と千葉を例に取り説明を加えよう。非ゼロのデータだけを取り出すと

$$\begin{array}{ll} \text{東京} & x_1^*, \dots, x_{n_1}^* \\ \text{千葉} & y_1^*, \dots, y_{n_2}^* \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1, \dots, x_{n_3} \\ y_1, \dots, y_{n_3} \end{array}$$

となるから，東京の $(x_1^*, \dots, x_{n_1}^*)$ と $(x_1, \dots, x_{n_3})$ の 2 つの部分標本について適当な有意水準のもとに対数正規性の検定（標本のそれぞれを対数変換後に歪度，尖度，Geary の統計量を用いて正規性の両側検定）を行う。もし双方とも対数正規性が棄却されないなら，対数変換された部分標本 $(\ln x_1^*, \dots, \ln x_{n_1}^*)$ は $N(\mu_1^*, \sigma_1^{*2})$ からの， $(\ln x_1, \dots, \ln x_{n_3})$ は $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ からのものと見なし，等分散性 $(\sigma_1^{*2} = \sigma_1^2)$ の検定と等平均性 $(\mu_1^* = \mu_1)$ の検定を行う。千葉についても同様のことを行う。こうして，等分散性と等平均性が棄却されるとモデル M1（一般）が，等分散性の一方と等平均性が棄却されるとモデル M2 が選ばれる。等分散性は採択され等平均性が棄却されると，M3 と M4 のどちらを採用する方がよいか，さらに検討を加えねばならない。等分散性と等平均性が採択されるときも同様で，M5 と M6 の可能性がある。ところで， $\mu_1^* = \mu_1$ ， $\mu_2^* = \mu_2$ とした

表 1. 東京，千葉，水戸の 1988 年 9 月の日降水量（単位：mm）

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
東京	0	12	0	0	0	18	2	1	1	0	12	3	0	1	5
千葉	0	0	0	0	0	22	0	0	1	0	16	8	0	0	10
水戸	0	4	9	0	0	11	1	0	6	0	19	10	0	3	3

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
東京	0	1	0	0	1	0	19	15	23	65	2	32	34	0	4
千葉	1	0	0	0	2	0	2	9	23	38	14	38	42	0	4
水戸	1	3	0	0	11	0	15	7	43	83	0	28	29	0	1

（出所：気象庁アメダスデータ）

表 2. 正規性, 等分散性, 等平均性の検定 (対数変換後)

		正規性 (標本数)		等分散性	等平均性
		I	II		
東京	X	(10)	** G(65)		**
千葉	Y	** B ₁ B ₂ (15)	(65)		**
東京	X	(17)	** G(58)	*	**
水戸	Y	(21)	(58)	*	**

I は X と Y のうち対応するものが正で他は 0 の, II は X と Y の双方とも正の部分標本を表わす.

*: 5%有意, **: 1% 有意

B₁: 歪度, B₂: 尖度, G: Geary

とき, $\mu_1 = \mu_2$ のモデルは考えに入れていない. 対数正規型のときには, σ は形状母数を表わし, μ についてよりも σ についての情報の方に関心があるからである.

表 2 は, 2 地点の組み合わせ (東京, 千葉), (東京, 水戸) で上のようにして検定を行ったときの結果を示している. 非ゼロの部分標本について対数正規性の検定を行った結果, 1% 有意となるのは (1) 東京の降水量がゼロのときの千葉の降水量, (2) 東京と千葉の双方で降水が見られるときの東京の降水量, (3) 東京と水戸の双方で降水が見られるときの東京の降水量の場合で, その他は 5% 有意とならない. 以上のことを考慮に入れ, Δ_2 分布を当てはめて解析を進めることにする.

母数間の関係としては, $\mu_1^* \neq \mu_1, \mu_2^* \neq \mu_2$ を仮定するのがよい. しかし, 等分散性の検定では 1% 有意でないので, M3 と M4 のどちらかを採用するか, さらに検討を加える. すなわち, $\sigma_1^{*2} = \sigma_1^2, \sigma_2^{*2} = \sigma_2^2$ は仮定するとして, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ を仮定してよいかを調べる. このために, 2 つの便宜的な方法を採用する. 方法 1 は, 片方が正の値を取る部分標本

$$x_1^*, \dots, x_{n_1}^* \\ y_1^*, \dots, y_{n_2}^*$$

にもとづき, $(\ln x_1^*, \dots, \ln x_{n_1}^*)$ は $N(\mu_1^*, \sigma_1^{*2})$ からの, $(\ln y_1^*, \dots, \ln y_{n_2}^*)$ は $N(\mu_2^*, \sigma_2^{*2})$ からの標本と見て等分散性の検定を行う方法である. 方法 2 は, 双方とも正の値を取る部分標本

$$x_1, \dots, x_{n_3} \\ y_1, \dots, y_{n_3}$$

にもとづき, $(\ln x_1, \ln y_1)', \dots, (\ln x_{n_3}, \ln y_{n_3})'$ は 2 変量正規分布 $N_2(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$ からの標本と見なして等分散性の検定を行う方法である. (東京, 千葉), (東京, 水戸) の組では, いずれの方法を用いても 5% 有意とならなかった. それで, モデルとしては M3 を採用する. これらの 2 地点同士では, 一方に降水が見られるとき他方に降水が見られるかどうかによって μ の値は異なるが, σ の値はそれほど変化しないことが観察された. σ は対数正規型では形状母数を表わすから, σ の一定性は雨の降り方に関し 2 地点間の構造上の類似を示唆する. なお, この対数変換後の分散の一定性は, 対数正規分布への適合がよいとされる実例の多くにおいて観察される事柄である. 表 3 は, M3 のモデルのもとでの母数, 平均, 分散, 相関係数の最尤推定値を示している. 2 地点間の相関係数の推定値は, 降水の有無の同時性を表わすと解釈できる.

結論的には, (東京, 千葉), (東京, 水戸) のいずれの組にもモデル M3 の適合がよく, σ の推

表 3. Δ_2 分布の母数, 平均, 分散, 相関係数の最尤推定値

		$\hat{\delta}_0$	$\hat{\delta}_1$	$\hat{\delta}_2$	$\hat{\delta}_3$	$\hat{\mu}_1^*$	$\hat{\mu}_1$	$\hat{\mu}_2^*$	$\hat{\mu}_2$	$\hat{\sigma}^2$	$\hat{\rho}$
		0.51	0.05	0.08	0.35	0.83	2.17	0.55	2.03	1.38	0.74
東京	X	$\hat{E}(X)=6.41$		$\hat{Var}(X)=392.13$							
千葉	Y	$\hat{E}(Y)=5.63$		$\hat{Var}(Y)=294.81$							
		$\hat{Corr}(X, Y)=0.66$									
		0.48	0.09	0.11	0.32	1.19	2.22	1.09	2.16	1.36	0.64
東京	X	$\hat{E}(X)=6.35$		$\hat{Var}(X)=384.49$							
水戸	Y	$\hat{E}(Y)=6.08$		$\hat{Var}(Y)=340.62$							
		$\hat{Corr}(X, Y)=0.55$									

定値はほぼ同じで, 相関係数の推定値は(東京, 千葉)の組の方が(東京, 水戸)より若干大きくなった。これらのことは, それぞれの地点の地理的気象的条件の類似と距離の遠近の反映であろう。なお, 2 地点ずつの組み合わせのため, (東京, 千葉), (東京, 水戸)それぞれでの東京における降水量平均と分散の推定値は一致しない。この不一致を避けるためには, 3 変量もしくはより多い数の変量の同時分布を考える必要がある。

本稿ではアメダスデータを例にゼロを含む 2 変量データのモデル化に焦点を当てたが, 今後, データの地理的気象的解釈と共に提案されたモデルのより一層の検討が望まれる。

参 考 文 献

- Aitchison, J. (1955): On the distribution of a positive random variable having a discrete probability mass at origin, *J. Amer. Statist. Assoc.* **50**, 901-908.
- Bhoj, D.S. (1984): On testing equality of variances of correlated variates with incomplete data, *Biometrika* **71**, 639-641.
- Crow, E.L. and Shimizu, K. eds. (1988): *Lognormal Distributions: Theory and Applications*, Marcel Dekker, Inc.
- Dahiya, R.C. and Korwar, R.M. (1980): Maximum likelihood estimates for a bivariate normal distribution with missing data, *Ann. Statist.* **8**, 687-692.
- Ekbohm, G. (1982): On comparing variances in the paired case with incomplete data, *Biometrika* **69**, 670-673.
- Iwase, K., Shimizu, K. and Suzuki, M. (1982): On UMVU estimators for the multivariate lognormal distribution and their variances, *Commun. Statist. - Theory Meth.* **11**, 687-697.
- Kariya, T., Krishnaiah, P.R. and Rao, C.R. (1983): Inference on parameters of multivariate normal populations when some data is missing, in *Developments in Statistics*, Vol. 4, Chap. 3 (P.R. Krishnaiah ed.).
- Kedem, B. and Chiu, L.S. (1987): On the lognormality of rain rate, *Proc. Natl. Acad. Sci.* **84**, 901-905.
- Lachenbruch, P.A. (1976): Analysis of data with clumping at zero, *Biom. Z.* **18**, 351-356.
- Owen, W.J. and DeRouen, T.A. (1980): Estimation of the mean for lognormal data containing zeroes and left-censored values, with applications to the measurement of worker exposure to air contaminants, *Biometrics* **36**, 707-719.
- Pennington, M. (1983): Efficient estimators of abundance, for fish and plankton surveys, *Biometrics* **39**, 281-286.
- 清水邦夫 (1988): 対数正規分布の応用, 応用統計学 **17**, 55-59.
- Shimizu, K. and Iwase, K. (1981): Uniformly minimum variance unbiased estimation in lognormal and related distributions, *Commun. Statist.-Theory Meth.* **10**, 1127-1147.
- Siegel, A.F. (1985): Modelling data containing exact zeroes using zero degrees of freedom, *J.R. Statist. Soc.*

47, 267-271.

Smith, S.J. (1988): Evaluating the efficiency of the $\mathcal{L}$ -distribution mean estimator, *Biometrics* **44**, 485-493.

Stern, R.D. and Coe, R. (1984): A model fitting analysis of daily rainfall data, *J.R. Statist. Soc. A*, **147**, 1-34.

付 録

4節2項のM1からM6の場合に母数の最尤推定値を求める方法について述べる。母数の最尤推定値を求めるのに直接に尤度を最大化する方法（たとえばEMアルゴリズム）があるが、ここではできる限り最尤推定方程式を陽に書き下すやり方を取る。その方が推定量の統計的性質を導くさいに有効と思われるからである。導き方が明らかなきは結果のみ記す。

以下、つぎの記法を用いる：

$$\begin{aligned}\overline{\ln x^*} &= \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \ln x_i^*, \quad \overline{\ln y^*} = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} \ln y_j^* \\ \overline{\ln x} &= \frac{1}{n_3} \sum_{k=1}^{n_3} \ln x_k, \quad \overline{\ln y} = \frac{1}{n_3} \sum_{k=1}^{n_3} \ln y_k \\ S_{x^*} &= \sum_{i=1}^{n_1} (\ln x_i^* - \overline{\ln x^*})^2, \quad S_{y^*} = \sum_{j=1}^{n_2} (\ln y_j^* - \overline{\ln y^*})^2 \\ S_x &= \sum_{k=1}^{n_3} (\ln x_k - \overline{\ln x})^2, \quad S_y = \sum_{k=1}^{n_3} (\ln y_k - \overline{\ln y})^2 \\ S_{xy} &= \sum_{k=1}^{n_3} (\ln x_k - \overline{\ln x})(\ln y_k - \overline{\ln y}) \\ m_x &= \overline{\ln x^*} - \overline{\ln x}, \quad m_y = \overline{\ln y^*} - \overline{\ln y} \\ \nu_x &= \frac{1}{n_1 + n_3} (n_1 \overline{\ln x^*} + n_3 \overline{\ln x}) \\ T_{x^*} &= \sum_{i=1}^{n_1} (\ln x_i^* - \nu_x)^2, \quad T_x = \sum_{k=1}^{n_3} (\ln x_k - \nu_x)^2 \\ V_{x^*} &= \sum_{i=1}^{n_1} (\ln x_i^* - \mu_1)^2, \quad V_{y^*} = \sum_{j=1}^{n_2} (\ln y_j^* - \mu_2)^2 \\ V_x &= \sum_{k=1}^{n_3} (\ln x_k - \mu_1)^2, \quad V_y = \sum_{k=1}^{n_3} (\ln y_k - \mu_2)^2 \\ V_{xy} &= \sum_{k=1}^{n_3} (\ln x_k - \mu_1)(\ln y_k - \mu_2) \\ K &= K(\rho) = (n_1 + n_3)(n_2 + n_3) - \rho^2 n_1 n_2\end{aligned}$$

M1 の場合：

$\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_1, \mu_2, \sigma_1^{*2}, \sigma_2^{*2}, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho$ の最尤推定値は

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_1^* &= \overline{\ln x^*}, \quad \hat{\mu}_2^* = \overline{\ln y^*}, \quad \hat{\mu}_1 = \overline{\ln x}, \quad \hat{\mu}_2 = \overline{\ln y} \\ \hat{\sigma}_1^{*2} &= \frac{1}{n_1} S_{x^*}, \quad \hat{\sigma}_2^{*2} = \frac{1}{n_2} S_{y^*}, \quad \hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n_3} S_x, \quad \hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n_3} S_y \\ \hat{\rho} &= \frac{S_{xy}}{(S_x S_y)^{1/2}}\end{aligned}$$

で与えられる。

M2 の場合：

$\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_1, \mu_2, \sigma_1^2 (= \sigma_1^{*2}), \sigma_2^{*2}, \sigma_2^2, \rho$ の最尤推定値は

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_1^* &= \overline{\ln x^*}, \hat{\mu}_2^* = \overline{\ln y^*}, \hat{\mu}_1 = \overline{\ln x_1}, \hat{\mu}_2 = \overline{\ln y} \\ \hat{\sigma}_1^2 &= \frac{1}{n_1 + n_3} (S_x^* + S_x), \hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n_2} S_y^* \\ \hat{\sigma}_2^2 &= \frac{1}{n_3} S_y + \frac{1}{n_1 + n_3} \frac{S_{xy}^2}{S_x^2} (S_x^* - \frac{n_1}{n_3} S_x), \hat{\rho} = \frac{S_{xy}}{S_x} \frac{(\hat{\sigma}_1^2)^{1/2}}{(\hat{\sigma}_2^2)^{1/2}}\end{aligned}$$

で与えられる。

M3 の場合:

$\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_1, \mu_2$ の最尤推定値は

$$\hat{\mu}_1^* = \overline{\ln x^*}, \hat{\mu}_2^* = \overline{\ln y^*}, \hat{\mu}_1 = \overline{\ln x}, \hat{\mu}_2 = \overline{\ln y}$$

で与えられる。また、 $\sigma^2 (= \sigma_1^{*2} = \sigma_1^2 = \sigma_2^{*2} = \sigma_2^2)$, ρ の最尤推定値を求めるための推定方程式は $\partial \ln L_2 / \partial \sigma = 0$, $\partial \ln L_2 / \partial \rho = 0$ から

$$(n_1 + n_2 + 2n_3)\sigma^2 = S_x^* + S_y^* + \frac{1}{1-\rho^2} (S_x - 2\rho S_{xy} + S_y) \quad (\text{A.1})$$

$$n_3\rho(1-\rho^2)\sigma^2 - \rho(S_x - 2\rho S_{xy} + S_y) + (1-\rho^2)S_{xy} = 0 \quad (\text{A.2})$$

となり、 σ を消去すると ρ の最尤推定方程式

$$\begin{aligned}h(\rho) &= n_3(S_x^* + S_y^*)\rho^3 - (n_1 + n_2)S_{xy}\rho^2 + \{(n_1 + n_2 + n_3)(S_x + S_y) - n_3(S_x^* + S_y^*)\}\rho \\ &\quad - (n_1 + n_2 + 2n_3)S_{xy} = 0\end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

を得る。方程式 (A.3) は、すべての k について $\ln x_k - \overline{\ln x} = \pm (\ln y_k - \overline{\ln y})$ ではないとき、 $(-1, 1)$ の中に S_{xy} と同符号のただ 1 つの解をもち、それが ρ の最尤推定値であることを Da-hiya and Korwar (1980) と同じようにして示せる。(A.3) を解いて得た最尤推定値 $\hat{\rho}$ を (A.1) の ρ に代入して σ^2 の最尤推定値を得る。

上の主張の証明の概略はつぎの通りである。もし $S_{xy} > 0$ (< 0) とすると $\rho > 0$ (< 0) のとき $L_2(\rho) > L_2(-\rho)$ だから L_2 の最大値は正 (負) の ρ で達成される。したがって ρ の最尤推定値は S_{xy} と同符号であることが分かる。また、

$$\begin{aligned}h(-1) &= -(n_1 + n_2 + n_3)(S_x + 2S_{xy} + S_y) < 0 \\ h(0) &= -(n_1 + n_2 + 2n_3)S_{xy} \\ h(1) &= (n_1 + n_2 + n_3)(S_x - 2S_{xy} + S_y) > 0\end{aligned}$$

だから、 $h(\rho) = 0$ は、もし $S_{xy} > 0$ ならば $(0, 1)$ 内に奇数個の根をもち、もし $S_{xy} < 0$ ならば $(-1, 0)$ 内に奇数個の根をもつ。 $(n_1 + n_2 + n_3)(S_x + S_y) - n_3(S_x^* + S_y^*) > 0$ の場合、 $S_{xy} > 0$ として、もし $(0, 1)$ 内に 3 個の根 (ρ_1, ρ_2, ρ_3) があったとすると、根と係数の間の関係を利用して

$$\frac{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3}{\rho_1\rho_2\rho_3} = \frac{(n_1 + n_2)}{n_1 + n_2 + 2n_3} < 1$$

となるが、これは $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in (0, 1)$ なことから不可能。したがって、ちょうど 1 個でなければならない。 $S_{xy} < 0$ のときも同様。 $(n_1 + n_2 + n_3)(S_x + S_y) - n_3(S_x^* + S_y^*) < 0$ の場合も同様に証明できる。

M4 の場合：

$\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_1, \mu_2$ の最尤推定値は

$$\hat{\mu}_1^* = \overline{\ln x^*}, \hat{\mu}_2^* = \overline{\ln y^*}, \hat{\mu}_1 = \overline{\ln x}, \hat{\mu}_2 = \overline{\ln y}$$

で与えられる。また、 $\sigma_1^{*2} = \sigma_1^2, \sigma_2^{*2} = \sigma_2^2, \rho$ の最尤推定値を求めるための推定方程式は $\partial \ln L_2 / \partial \sigma_1 = 0, \partial \ln L_2 / \partial \sigma_2 = 0, \partial \ln L_2 / \partial \rho = 0$ から

$$-(n_1 + n_3)\sigma_1^2(1 - \rho^2) + (1 - \rho^2)S_x^* + S_x - \frac{\sigma_1 \rho}{\sigma_2} S_{xy} = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$-(n_2 + n_3)\sigma_2^2(1 - \rho^2) + (1 - \rho^2)S_y^* - \frac{\sigma_2 \rho}{\sigma_1} S_{xy} + S_y = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$n_3 \rho (1 - \rho^2) - \rho \left(\frac{1}{\sigma_1^2} S_x + \frac{1}{\sigma_2^2} S_y \right) + \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2} (1 + \rho^2) S_{xy} = 0 \quad (\text{A.6})$$

を得る。

(A.4) と (A.5) から、 $r = \sigma_2 / \sigma_1$ とおくと、 r についての2次方程式

$$(n_2 + n_3)\{S_x + (1 - \rho^2)S_x^*\}r^2 + (n_1 - n_2)\rho S_{xy}r - (n_1 + n_3)\{S_y + (1 - \rho^2)S_y^*\} = 0$$

を得、 $r > 0$ なことから、ただ1つの解

$$r = \frac{(n_2 - n_1)\rho S_{xy} + D}{2(n_2 + n_3)\{S_x + (1 - \rho^2)S_x^*\}} \quad (\text{A.7})$$

が存在する。ここで、 $D = (D^2)^{1/2}$ で、

$$D^2 = (n_1 - n_2)^2 \rho^2 S_{xy}^2 + 4(n_1 + n_3)(n_2 + n_3)\{S_x + (1 - \rho^2)S_x^*\}\{S_y + (1 - \rho^2)S_y^*\}$$

である。

(A.5), (A.6), (A.7) から、 ρ についての最尤推定方程式

$$\frac{n_3 \rho}{n_2 + n_3} \{S_y + (1 - \rho^2)S_y^* - \rho S_{xy}r\} - \rho(S_x r^2 + S_y) + (1 + \rho^2)S_{xy}r = 0$$

を得る。 ρ の最尤推定値が求まったとすると、(A.7) から r が求まり、 r を (A.4) と (A.5) に代入して σ_1^2 と σ_2^2 の最尤推定値が求まる。

M5 の場合：

$\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho$ の最尤推定は、標本の対数を取ったあとで考えれば、2変量正規分布で双方の変量に欠測がある場合に母数を最尤推定する問題と同等である。M5 と M6 の選択には $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ の仮定が満たされるかどうかを調べればよい。これには、Bhoj (1984) または Ekbohm (1982) の検定を行えばよい。 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ の仮定が満たされているときの母数の最尤推定問題は最初 Kariya, Krishnaiah and Rao (1983) で述べられたが、本稿では ρ についての最尤推定方程式を直接に書き下している。

推定方程式は、 $\partial \ln L_2 / \partial \mu_1 = 0, \partial \ln L_2 / \partial \mu_2 = 0$ から

$$\mu_1 = \frac{1}{K} \{(n_2 + n_3)(n_1 \overline{\ln x^*} + n_3 \overline{\ln x}) - \rho^2 n_1 n_2 \overline{\ln x^*} + \rho n_2 n_3 m_y\} \quad (\text{A.8})$$

$$\mu_2 = \frac{1}{K} \{ (n_1 + n_3)(n_2 \overline{\ln y^*} + n_3 \overline{\ln y}) - \rho^2 n_1 n_2 \overline{\ln y^*} + \rho n_1 n_3 m_x \} \quad (\text{A.9})$$

$\partial \ln L_2 / \partial \sigma = 0$ から

$$\sigma^2(n_1 + n_2 + 2n_3) = V_x^* + V_y^* + \frac{1}{1 - \rho^2} (V_x - 2\rho V_{xy} + V_y) \quad (\text{A.10})$$

$\partial \ln L_2 / \partial \rho = 0$ から

$$n_3 \rho (1 - \rho^2) \sigma^2 - \rho (V_x + V_y) + (1 + \rho^2) V_{xy} = 0 \quad (\text{A.11})$$

と得られる.

(A.11) に (A.8), (A.9), (A.10) を代入して整理すれば ρ の最尤推定方程式はつぎの 7 次方程式となる:

$$h(\rho) = \sum_{j=0}^7 b_j \rho^j = 0 \quad (\text{A.12})$$

ここで,

$$\begin{aligned} b_7 &= n_1^2 n_2^2 n_3 (S_x^* + S_y^*) \\ b_6 &= -n_1^2 n_2^2 (n_1 + n_2) (S_{xy} + n_3 m_x m_y) \\ b_5 &= n_1 n_2 \{ -n_3 \{ n_1 n_2 + 2(n_1 + n_3)(n_2 + n_3) \} (S_x^* + S_y^*) \\ &\quad + (n_1 + n_2 + n_3) \{ n_1 n_2 (S_x + S_y) + n_1 n_3 (n_2 + n_3) m_x^2 + n_2 n_3 (n_1 + n_3) m_y^2 \} \} \\ b_4 &= n_1 n_2 \{ \{ 2(n_1 + n_2)(n_1 + n_3)(n_2 + n_3) - n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 2n_3) \} S_{xy} \\ &\quad + n_3 \{ (n_1 + n_2) \{ n_1 n_2 + (n_1 + n_3)(n_2 + n_3) \} \\ &\quad + (n_1 + n_2 + 2n_3) \{ n_1 n_2 - 2(n_1 + n_3)(n_2 + n_3) \} \} m_x m_y \} \\ b_3 &= (n_1 + n_3)(n_2 + n_3) \{ n_3 \{ 2n_1 n_2 + (n_1 + n_3)(n_2 + n_3) \} (S_x^* + S_y^*) \\ &\quad - 2n_1 n_2 (n_1 + n_2 + n_3) (S_x + S_y) \} \\ &\quad + n_3 (n_1 + n_2 + n_3) (n_3^2 - 2n_1 n_2) \{ n_1 (n_2 + n_3) m_x^2 + n_2 (n_1 + n_3) m_y^2 \} \\ b_2 &= (n_1 + n_3)(n_2 + n_3) \{ 2n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 2n_3) - (n_1 + n_2)(n_1 + n_3)(n_2 + n_3) \} S_{xy} \\ &\quad + n_1 n_2 n_3 \{ (n_1 + n_2 + 2n_3) \{ 2n_1 n_2 + 3n_3 (n_1 + n_2 + n_3) \} \\ &\quad - (n_1 + n_2)(n_1 + n_3)(n_2 + n_3) \} m_x m_y \\ b_1 &= (n_1 + n_3)^2 (n_2 + n_3)^2 \{ (n_1 + n_2 + n_3) (S_x + S_y) - n_3 (S_x^* + S_y^*) \} \\ &\quad + n_3 (n_1 + n_2 + n_3) (n_1 n_2 - n_3^2) \{ n_1 (n_2 + n_3) m_x^2 + n_2 (n_1 + n_3) m_y^2 \} \\ b_0 &= -(n_1 + n_3)(n_2 + n_3)(n_1 + n_2 + 2n_3) \{ (n_1 + n_3)(n_2 + n_3) S_{xy} + n_1 n_2 n_3 m_x m_y \} \end{aligned}$$

方程式 (A.12) は, すべての k について $\ln x_k + \ln y_k = \overline{\ln x} + \overline{\ln y}$ でない限りは

$$h(-1) = -n_3^2 (n_1 + n_2 + n_3)^3 (S_x + 2S_{xy} + S_y) < 0$$

で, また, すべての k について $\ln x_k - \ln y_k = \overline{\ln x} - \overline{\ln y}$ でない限りは

$$h(1) = n_3^2 (n_1 + n_2 + n_3)^3 (S_x - 2S_{xy} + S_y) > 0$$

となる. よって, これらの自然な条件のもとに, (A.12) は $(-1, 1)$ の中に少なくとも 1 つの解をもつ. それを $\hat{\rho}$ とする. なお, 一意性は未解決. 少ない標本数のときの数値実験では (A.12) が複数個の解をもつことがあったが, そのようなときには, それらの解の中で尤度関数を最大にするものを選べばよい.

μ_1, μ_2 の最尤推定値 $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ は $\hat{\rho}$ を (A.8), (A.9) に代入して求め、さらに、 σ^2 の最尤推定値 $\hat{\sigma}^2$ は $\hat{\rho}, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ を (A.10) に代入して求める。

なお、 $n_1=0$ または $n_2=0$ のとき、たとえば $n_2=0$ のとき、形式的に $b_4=b_5=b_6=b_7=0$, $S_y^*=0$ となる。よって、この場合 ρ の推定方程式 (A.12) は3次方程式

$$\begin{aligned} & n_3^3(n_1+n_3)\{(n_1+n_3)S_x^*+n_1n_3m_x^2\}\rho^3-n_1n_3^2(n_1+n_3)^2S_{xy}\rho^2 \\ & +n_3^2(n_1+n_3)\{(n_1+n_3)^2(S_x+S_y)-n_3\{(n_1+n_3)S_x^*+n_1n_3m_x^2\}\}\rho \\ & -n_3^2(n_1+n_3)^2(n_1+2n_3)S_{xy}=0 \end{aligned}$$

となり、変形して

$$\begin{aligned} & n_3(T_x^*+T_x-S_x)\rho^3-n_1S_{xy}\rho^2+\{(n_1+n_3)(S_x+S_y)-n_3(T_x^*+T_x-S_x)\}\rho \\ & -(n_1+2n_3)S_{xy}=0 \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

を得る。(A.13) は Dahiya and Korwar (1980) が与えた式と同一である。彼らは、 $(-1, 1)$ の中に (A.13) を満たす S_{xy} と同符号のただ1つの解が存し、それが ρ の最尤推定値であることを証明している。

M6 の場合：

$\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho$ の最尤推定値を求めるための推定方程式は、 $\partial \ln L_2/\partial \mu_1=0, \partial \ln L_2/\partial \mu_2=0$ より

$$\mu_1 = \frac{1}{K} \{(n_2+n_3)(n_1\overline{\ln x^*}+n_3\overline{\ln x})-\rho^2n_1n_2\overline{\ln x^*}+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\rho n_2n_3m_y\} \quad (\text{A.14})$$

$$\mu_2 = \frac{1}{K} \{(n_1+n_3)(n_2\overline{\ln y^*}+n_3\overline{\ln y})-\rho^2n_1n_2\overline{\ln y^*}+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho n_1n_3m_x\} \quad (\text{A.15})$$

$\partial \ln L_2/\partial \sigma_1=0, \partial \ln L_2/\partial \sigma_2=0$ より

$$(n_1+n_3)(1-\rho^2)\sigma_1^2=(1-\rho^2)V_x^*+V_x-\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\rho V_{xy} \quad (\text{A.16})$$

$$(n_2+n_3)(1-\rho^2)\sigma_2^2=(1-\rho^2)V_y^*+V_y-\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho V_{xy} \quad (\text{A.17})$$

$\partial \ln L_2/\partial \rho=0$ より

$$h(\rho)=-n_3\rho(1-\rho^2)+\rho\left\{\frac{1}{\sigma_1^2}V_x+\frac{1}{\sigma_2^2}V_y\right\}-\frac{1}{\sigma_1\sigma_2}(1+\rho^2)V_{xy}=0 \quad (\text{A.18})$$

となる。つぎの手順で最尤推定値を求める。

(1) ρ を $(-1, 1)$ の中の -1 に近い数として固定。

(2) (A.14), (A.15) を (A.16), (A.17) に代入して整理すると $r=\sigma_2/\sigma_1(>0)$ についての2次方程式

$$Ar^2+Br+C=0 \quad (\text{A.19})$$

を得る。ただし、

$$\begin{aligned}
 A &= A(\rho) = (n_2 + n_3)[(1 - \rho^2)S_x^* + S_x \\
 &\quad + \frac{n_1 n_3}{K^2} m_x^2 (1 - \rho^2)(n_2 + n_3)\{n_3(n_1 + n_2 + n_3) + n_1 n_2(1 - \rho^2)\}] \\
 B &= B(\rho) = \rho(n_1 - n_2)[S_{xy} \\
 &\quad + \frac{n_1 n_2 n_3}{K^2} m_x m_y (1 - \rho^2)\{n_3(n_1 + n_2 + n_3) + n_1 n_2(1 - \rho^2)\}] \\
 C &= C(\rho) = -(n_1 + n_3)[(1 - \rho^2)S_y^* + S_y \\
 &\quad + \frac{n_2 n_3}{K^2} m_y^2 (1 - \rho^2)(n_1 + n_3)\{n_3(n_1 + n_2 + n_3) + n_1 n_2(1 - \rho^2)\}]
 \end{aligned}$$

である。もしすべての i, k について $x_i^* = x_k = c$ (定数) でなく、すべての j, k について $y_j^* = y_k = d$ (定数) ではないとすれば、 $A > 0, C < 0$ だから (A.19) の正の解は一意的となる。それを $r(\rho)$ とおく。

(3) $\rho, r(\rho)$ を (A.14), (A.15) に代入し $\mu_1(\rho), \mu_2(\rho)$ を求める。

(4) $\rho, r(\rho), \mu_1(\rho), \mu_2(\rho)$ を (A.17) に代入して $\sigma_2^2(\rho)$ を求め、さらに式

$$\sigma_2^2 = r^2 \sigma_1^2$$

から $\sigma_1^2(\rho)$ を求める。

(5) $\rho, r(\rho), \mu_1(\rho), \mu_2(\rho), \sigma_1^2(\rho), \sigma_2^2(\rho)$ を (A.18) に代入し、式を満たすかどうか調べる。

(6) もし満たさなければ ρ を変化させて手順 (1)~(5) を繰り返し ρ の最尤推定値を trial and error で探す。

なお、この手順において ρ の $(-1, 1)$ の中の最尤推定値の存在と一意性は

$$h(-1) = h(1) = 0$$

のため不明である。

(1989年12月22日受付 1990年5月11日最終修正)

著者連絡先：〒278 野田市山崎2641 東京理科大学理工学部情報科学科