べき逆ガウス型分布とその応用

広島大 工学部 岩 瀬 晃 盛

統計数理研究所 平 野 勝 臣

Power Inverse Gaussian Distribution and Its Applications

Kōsei IWASE and Katuomi HIRANO

要 旨

正の値をとる確率変数の分布の諸特徴を考察する。特に逆ガウス型分布，対数正規分布，ガンマ分布などが持っているある共通の性質に注目する。この性質を保ち，べき変換に関して分布が閉じているように一般化された，対数正規分布を含む，べき逆ガウス型分布を定義し，その性質を調べる。これらの応用として乗法的に外乱が加わった回帰モデルを導入する。

1. はじめに

単調に変化する量の変化速度，容器中の物質の濃度，密度を測る現象を考えよう。これらの計測では2つの観測の方法がある。例えば，速度でいえば，あらかじめ定められた単位時間内に進んだ距離の測定と，あらかじめ定められた単位距離を走行するに要した時間の測定とである。現実には，前者ではなくて後者のデータが得られることが多い。これはあらかじめ測定区間を定めておく方が観測条件を設定しやすいことによる。このように単位としては逆数の関係にあって，一方の単位の計測値しか得られないとき，もう一方の単位の現象として解析したいことがある。すなわち，確率変数とその逆数がそれぞれ意味を持ち，それらの分布を用いて現象の解析が要求される場合である。

本稿では正值連続的確率変数の従うスケール分布族 $\{(1/\mu)g(x/\mu)\}$ を扱う。慣例に従って μ を X の尺度母数と呼ぶことにする。また μ の単位の正の実数倍で表されるような現象を「尺度に関する現象」と呼び，この μ を尺度母数として持つ X を「尺度 μ を記述する確率変数」と呼ぶことにする。 X の単位は μ の単位によって決定される。本稿の目的は尺度を記述する確率変数の分布として有用なものを新たに導入し，その性質を調べ，さらにこの分布の応用について述べることである。

Key words: B-S distribution, Coefficient of variation, Gamma distribution, Inverse Gaussian distribution, Lognormal distribution, Loss function, Power normal distribution, Regression, Scale parameter, Transformations to normality.

対数正規分布と逆ガウス型分布は、これに従う確率変数の逆数がそれぞれ同じ形の分布に従う。対数正規分布の場合、さらにゼロでない実数のべき乗をしても再び対数正規分布に従う。これらは上で述べた観点から都合の良い性質であり利用したい。対数正規分布の場合、その根拠は、正值確率変数を対数変換したものが正規分布に従うということに基づいている。そこで本稿ではある単調変換を用いて、確率変数のべき乗に関して閉じているという性質を保存し、対数正規分布を含む、逆ガウス型分布を一般化した分布としてべき逆ガウス型分布を導入する。さらにこの分布の性質および回帰の問題への適用を議論する。

つぎの章では、まず尺度を記述する分布としてガンマ分布、対数正規分布、Birnbau-Saunders 分布 (Birnbau and Saunders (1969), 以後 B-S 分布と略記)、および逆ガウス型分布 (この分布については例えば、Chhikara and Folks (1989) を参照されたい) をとりあげ、これらの分布の尺度母数に関する損失関数の分布がカイ二乗分布と関連づけられることを指摘する。また、これらの分布に従う確率変数を尺度母数で無名数化したもののバラツキと、非対称の度合いを示す母数について議論する。従来正值確率変数のバラツキを表すものとして利用されてきた変動係数との関係についても言及する。

3 章では、対数正規分布のように、変換後の分布が標準正規分布に従うようないくつかの分布と変換を考察する。この結果を用いて、ある特定の損失関数の分布がカイ二乗分布に従うとの条件と、ゼロでない任意のべき乗に関して分布が閉じているとの条件を満たす正の領域で定義される新しい分布として、べき逆ガウス型分布を導入する。この分布はもはや変換によって直接標準正規分布とは結びつかない。4 章でこの分布のいくつかの性質を与える。5 章ではこの分布を誤差 (正確には誤比) として持つ原点を通る回帰曲線について論ずる。これは説明変数、従属変数いづれも正の値しかとらない状況の下での回帰モデルである。6 章ではいくつかの関連する事項を議論する。

2. 尺度母数と損失関数

確率変数 X が尺度 μ を記述する場合、 X の μ のまわりのバラツキ、あるいは損失を X/μ の関数で測ることは自然である。この場合、損失関数 $L(X, \mu)$ として二乗損失関数 $(X/\mu - 1)^2$ を用いることは望ましくない。尺度母数 μ からのずれが $X=0$ のときと、 $X=2\mu$ のときとで損失が等しくなってしまう。これでは μ より小さいときの損失を過小に評価してしまうことになる。 X/μ の関数で、1 に関して損失の意味で対称な損失関数を用いたい。このような $L(X, \mu)$ として、次のものが考えられる：

$$\frac{X}{\mu} - 1 - \log \frac{X}{\mu}, \quad \left(\frac{X}{\mu} - 1 \right) \log \frac{X}{\mu}, \quad \left(\log \frac{X}{\mu} \right)^2, \quad \left(\sqrt{\frac{X}{\mu}} - \sqrt{\frac{\mu}{X}} \right) \log \frac{X}{\mu}, \quad \frac{X}{\mu} + \frac{\mu}{X} - 2.$$

最初の損失関数は特定な分布 (例えば正規分布や指数分布) を指定して、カルバック-ライブラーの距離 (Kullback (1959) を参照) を計算すれば得られる。最初の2つの損失関数は、 X/μ と μ/X のどちらで測っても同じ値であるという対称性に欠ける。

本稿で扱うガンマ分布、対数正規分布、B-S 分布および逆ガウス型分布の確率素分を以下に示す。普通に用いられている表現と異なるが、その理由はあとで述べる。

$$\text{ガンマ分布 } Ga(\mu, c^2): \frac{1}{\Gamma(1/c^2)} \left(\frac{1}{c^2}\right)^{1/c^2} \left(\frac{x}{\mu}\right)^{(1/c^2)-1} \exp\left(-\frac{1}{2c^2} \frac{2x}{\mu}\right) \frac{dx}{\mu}.$$

$$\text{対数正規分布 } LN(\mu, c^2): \frac{1}{\sqrt{2\pi}c} \left(\frac{x}{\mu}\right)^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2c^2} \left(\log \frac{x}{\mu}\right)^2\right\} \frac{dx}{\mu}.$$

$$\text{B-S 分布 } BS(\mu, c^2): \frac{1}{2\sqrt{2\pi}c} \left\{1 + \frac{x}{\mu}\right\} \left(\frac{x}{\mu}\right)^{-3/2} \exp\left\{-\frac{1}{2c^2} \left(\sqrt{\frac{x}{\mu}} - \sqrt{\frac{\mu}{x}}\right)^2\right\} \frac{dx}{\mu}.$$

$$\text{逆ガウス型分布 } IG(\mu, c^2): \frac{1}{\sqrt{2\pi}c} \left(\frac{x}{\mu}\right)^{-3/2} \exp\left\{-\frac{1}{2c^2} \left(\sqrt{\frac{x}{\mu}} - \sqrt{\frac{\mu}{x}}\right)^2\right\} \frac{dx}{\mu}.$$

これらはスケール分布族の典型的な例であり、尺度母数 μ は、ガンマ分布と逆ガウス型分布では母平均、対数正規分布と B-S 分布では母中央値である。自由度 n のカイ二乗分布を $\chi^2(n)$ と書くとき、次の性質がある：

$$X \sim Ga(\mu, c^2) \text{ のとき } 2X/\mu \sim c^2 \chi^2(2/c^2),$$

$$X \sim LN(\mu, c^2) \text{ のとき } \left(\log \frac{X}{\mu}\right)^2 \sim c^2 \chi^2(1)$$

$$X \sim BS(\mu, c^2) \text{ のとき } \left(\sqrt{\frac{X}{\mu}} - \sqrt{\frac{\mu}{X}}\right)^2 \sim c^2 \chi^2(1),$$

$$X \sim IG(\mu, c^2) \text{ のとき } \left(\sqrt{\frac{X}{\mu}} - \sqrt{\frac{\mu}{X}}\right)^2 \sim c^2 \chi^2(1).$$

最後の事実は Shuster (1968) による。これらの結果は各確率素分の $\exp$ の中の主因子の x に X を代入した量がいずれもカイ二乗分布に従い、ガンマ分布を除けば μ を X で推定したときの損失が自由度 1 のカイ二乗分布に従っていることを意味している。確率素分を書き換えた理由がこれである。我々はこの性質に注目し、3 章で新しい分布を導くとき利用する。

上で述べた性質に於いて、 c は各損失関数を基準化するための母数と考えられ、尺度母数 μ で無名数化された確率変数の従う分布のパラッキ、広がり、非対称性の程度などを表すと解釈される。実際、ガンマ分布と逆ガウス型分布の場合、 c は母変動係数であり、対数正規分布と B-S 分布の場合には c が 1 と比べて小さいときやはり c は母変動係数とほぼ等しい。これは正值確率変数の実現値の特性をとらえるために標本変動係数が有効であることに関連していると思われる。例えば津村ら (1988) を見よ。

尺度を記述する確率変数の分布の例としてガンマ分布はよく知られている。しかし他の 3 つの分布との異質性（上の性質で自由度が 1 でないこと）により、考察の対象から外す。なお、ガンマ分布に従う確率変数の逆数は一般には母平均が存在しない（母平均が存在しなければならないという理由は一般的には無いだろうが）。

3. 典型的諸分布の比較

この章では、はじめに正の値をとる確率変数のある変数変換が正規分布に従うような変換と、確率分布について調べる。次に、正規分布への変換という要請をゆるめて、変換後の 2 乗の分布がカイ二乗分布となり、且つゼロでないべき乗に関して分布が閉じているような確率分布としてべき逆ガウス型分布を導く。この過程で諸分布の関係を述べる。

やや天下りではあるが、

$$(X-\mu)F(1-\lambda, \beta; 2\beta; 1-(X/\mu)), \quad X>0, \quad \mu>0, \quad \beta\neq 0 \quad (1)$$

を考える。ここで F はガウスの超幾何関数である。この変換は一般に単調ではないが、単調となるような λ と β の特別な値の組み合わせに関心がある。さて、変換 (1) は変換の前後で同一の単位を持つ。変換後の尺度を σ とする。 σ の単位は X の単位に等しい。変換 (1) を σ で割って無名数化した変換を得て、 $c=\sigma/\mu$ とする。そのとき無名数である c により無名数化された変換が得られる。この変換後の従う分布が標準正規分布に従うときの確率変数 X の分布、すなわち

$$(1/c)((X/\mu)-1)F(1-\lambda, \beta; 2\beta; 1-(X/\mu)) \sim N(0, 1) \quad (2)$$

であるときの X の分布を考察しよう。

(2) 式で $\lambda=0, \beta=1$ とすると

$$\frac{\log(X/\mu)}{c} \sim N(0, 1) \quad (3)$$

を得る。(3) が成り立つときの X の従う分布を対数正規分布と云い、記号で $X \sim LN(\mu, c^2)$ と記す。これは通例の定義と μ の意味が違う(6章参照)。確率素分は2章で与えた。この分布で μ は X の尺度母数であり、母中央値でもある。 c は $\log(X/\mu)$ の母標準偏差になっている。また逆数の分布については $1/X \sim LN(1/\mu, c^2)$ 、さらに一般に $X^r \sim LN(\mu^r, (rc)^2)$ である。

(2) 式で $1-\lambda=2\beta$ とすると

$$\frac{1}{c} \left(\frac{X}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\frac{X}{\mu}} - \sqrt{\frac{\mu}{X}} \right) \sim N(0, 1) \quad (4)$$

を得る。この変換は $-1 < \lambda < 1$ のとき、 $(0, \infty)$ から $(-\infty, \infty)$ への X の単調増加関数になっている。特に $\lambda=0$ のとき、

$$\frac{1}{c} \left(\sqrt{\frac{X}{\mu}} - \sqrt{\frac{\mu}{X}} \right) \sim N(0, 1) \quad (5)$$

を得る。(5) で定義される X の分布が B-S 分布である。確率素分は前章で与えた。この分布は $X \sim BS(\mu, c^2)$ のとき、 $X^{-1} \sim BS(\mu^{-1}, c^2)$ となり、逆数変換に関して分布が閉じている。

(2) 式で $\beta=1$ だけの条件を与えると、対数正規分布の一つの一般化

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{1}{\lambda} \left\{ \left(\frac{X}{\mu} \right)^{\lambda} - 1 \right\} \quad (6)$$

となる。この変換は Box-Cox のべき変換である。ところがこれは $X>0$ に対して実数全体の値をとらないので、打ち切られた標準正規分布に従うことによりべき正規分布を定義する。この分布の定義は6章で与える。 $\lambda \rightarrow 0$ のとき、(6) は (3) で定義される対数正規分布の確率素分を与える。

べき正規分布は変換後の分布が標準正規分布となるの方針に外れるばかりでなく、変換後の2乗の従う分布がカイ二乗分布とした枠にも外れる。これは6章のべき正規分布の定義からわかるように λ の符号が関係していることによる。この符号が関与しない様な変換

$$\frac{1}{2c} \left(\frac{X}{\mu} - 1 \right) \left\{ F\left(1-\lambda, \beta; 2\beta; 1-\frac{X}{\mu}\right) + F\left(1+\lambda, \beta; 2\beta; 1-\frac{X}{\mu}\right) \right\} \quad (7)$$

を考える。明らかに $\lambda=0, \beta=1$ のとき、 $(1/c) \log(X/\mu)$ に等しい。そこで、(7) で $\beta=1$ だけの条

件を加えた

$$\frac{1}{c} \xi_{\lambda} \left(\frac{X}{\mu} \right) = \frac{1}{2c} \left(\frac{X}{\mu} - 1 \right) \left\{ F \left(1 - \lambda, 1; 2; 1 - \frac{X}{\mu} \right) + F \left(1 + \lambda, 1; 2; 1 - \frac{X}{\mu} \right) \right\} \quad (8)$$

を定義すると、これは初等関数であらわせ、

$$\frac{1}{c} \xi_{\lambda} \left(\frac{X}{\mu} \right) = \begin{cases} \frac{1}{2\lambda c} \left\{ \left(\frac{x}{\mu} \right)^{\lambda} - \left(\frac{X}{\mu} \right)^{-\lambda} \right\} & \text{if } \lambda \neq 0 \\ \frac{1}{c} \log \frac{X}{\mu} & \text{if } \lambda = 0 \end{cases}$$

となる。変換後の分布として $N(0, 1)$ としたのであるから、

$$\frac{1}{c} \xi_{\lambda} \left(\frac{X}{\mu} \right) \sim N(0, 1) \quad (9)$$

によって定義される確率変数 X を考察することにする。変換 (9) は対数正規分布 ($\lambda=0$) と B-S 分布 ($\lambda=1/2$) を含んでいる。これらを保存して、且つ X と X^{-1} の分布が同じ分布族に入っている。変換後の 2 乗の従う分布はカイ二乗分布であることは明らかである。このような変換が我々の目的に望ましいものである。

次の目的は、逆数変換の一般化であるゼロでない任意のべき乗に関して閉じていて、且つ変換後の 2 乗がカイ二乗分布に従うような分布を求めることである。B-S 分布は前者の性質は持たないので考察の対象から外される。

(9) で定義される確率変数 X の従う分布の確率素分は

$$\frac{1}{2} p(x; \mu, c^2, 2\lambda) dx + \frac{1}{2} p(x; \mu, c^2, -2\lambda) dx$$

で与えられる。ただし、

$$p(x; \mu, c^2, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}c} \left(\frac{x}{\mu} \right)^{-1-\frac{\lambda}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(\lambda c)^2} \left(\left(\frac{x}{\mu} \right)^{\frac{\lambda}{2}} - \left(\frac{x}{\mu} \right)^{-\frac{\lambda}{2}} \right)^2 \right\} \frac{1}{\mu} \quad (10)$$

第 1 項、第 2 項は共に $1/2$ を除いて確率素分の条件を満足し、 X/μ と μ/X の分布との混合比の等しい混合分布の確率素分である。第 1 項と第 2 項は λ の正負に関して対称であることから、第 1 項に基づく新しい確率素分 $p(x; \mu, c^2, \lambda) dx$ で定義される確率分布を考える。 $\lambda \rightarrow 0$ とすれば対数正規分布、 $\lambda=1$ とすればべき逆ガウス型分布の確率素分を与えることがわかる。

定義. (10) 式の確率素分 $p(x; \mu, c^2, \lambda) dx$, $x > 0$; $\mu > 0$, $c > 0$, $\infty > \lambda > -\infty$ で与えられる分布をべき逆ガウス型分布 (power inverse Gaussian distribution) と呼び、記号 $PIG(\mu, c^2, \lambda)$ で表わす。ただし、 $\lambda=0$ は $\lambda \rightarrow 0$ の極限で定義する。

定義式より $X \sim PIG(\mu, c^2, \lambda)$ のとき、任意の正の実数 a および任意の実数 $k \neq 0$ に対して

$$aX^k \sim PIG(a\mu^k, k^2c^2, \lambda/k) \quad (11)$$

が成立する。特に $X^{\lambda} \sim IG(\mu^{\lambda}, (\lambda c)^2)$ であり、逆も成立する。べき逆ガウス型分布の名はこの事実による。これより直ちに $X \sim PIG(\mu, c^2, \lambda)$ のとき

$$\left\{ \frac{(X/\mu)^{\lambda/2} - (X/\mu)^{-\lambda/2}}{\lambda} \right\}^2 \sim c^2 \chi^2(1) \quad (12)$$

が示される。すなわち、(12)の左辺を損失関数とすれば、これはカイ二乗分布に従っている。なお、変換による標準正規分布との直接の関係はもはやない。

これで目的とした分布が得られたことになる。対数正規分布、逆ガウス型分布との関係を記号で書けば $PIG(\mu, c^2, 1) = IG(\mu, c^2)$, $PIG(\mu, c^2, 0) = LN(\mu, c^2)$ である。

次の章でべき逆ガウス型分布の性質などについて述べる。なお、逆ガウス型分布の3母数化による一つの一般化は Jørgensen (1982) で論じられているが、べき逆ガウス型分布との直接の関係は見いだされていない。

4. べき逆ガウス型分布 $PIG(\mu, c^2, \lambda)$

4.1. 性質と母数の意味

ここではべき逆ガウス型分布の性質と母数の意味について述べる。定義式(10)で条件 $\lambda > 0$ をつけた場合、逆数の分布は $\lambda < 0$ の場合となる。従って、煩雑さを避けるために、これ以降 $\lambda > 0$ とする。確率変数 X の単位は尺度母数 μ によって決まり、母数 c および λ は無名数である。これにより μ の単位が異なる現象間においても c および λ の値は比較可能である。

べき逆ガウス型分布は単峰であり、分布関数は

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \Phi \left(-\frac{1}{\lambda c} \left\{ \left(\frac{x}{\mu} \right)^{-\lambda/2} - \left(\frac{x}{\mu} \right)^{\lambda/2} \right\} \right) + e^{2/(\lambda^2 c^2)} \Phi \left(-\frac{1}{\lambda c} \left\{ \left(\frac{x}{\mu} \right)^{-\lambda/2} + \left(\frac{x}{\mu} \right)^{\lambda/2} \right\} \right)$$

で与えられる。ここに、 $\Phi(\cdot)$ は $N(0, 1)$ の累積分布関数である。

べき逆ガウス型分布の密度関数の概形をつかむために、 μ によって無名数化された $Y = X/\mu$ の密度関数のグラフを描く。各 $c = 1/2, 1, 3/2$ に対して、 $\lambda = 0$ (対数正規分布), $1/2, 1$ (逆ガウス型分布), $3/2, 2$ として描いたグラフが図1、図2および図3である。これらの図から次のような傾向が読み取れる。 c が1と比較して小さくなると、最頻値は1に近づき、1を中心とした(すなわち μ を中心とした)対称な分布に近くなる。この意味で c は非対称な分布の拡がりの程度を示す母数であると考えられる。以後、 c を「拡がり母数 (spread parameter)」と呼ぶことにする。任意の c に対し、 $y=1$ のときの値は $1/(\sqrt{2\pi}c)$ となり、 λ の値に依存しない。 λ の増大とともに $y=1$ 以上の確率は小さくなる傾向がある。図1、図2および図3での $y=1$ は、 $\lambda=0$ のとき母中央値、 $\lambda=1$ のとき母平均に等しい。この意味で、 λ は尺度母数 μ が X のどのような定義での「中心」をあらわすかを定める母数であるとも考えられる。

$X \sim PIG(\mu, c^2, \lambda)$ のとき以下の性質を持つ。(11)で $a = \mu^{-k}$ とすれば $(X/\mu)^k \sim PIG(1, k^2 c^2, \lambda/k)$ となる。そこで $k = c^{-1}$ とすれば $(X/\mu)^{1/c} \sim PIG(1, 1, \lambda c)$, $k = \lambda$ とすれば $(X/\mu)^\lambda \sim PIG(1, \lambda^2 c^2, 1)$ となり、これはまた $(X/\mu)^\lambda \sim IG(1, (\lambda c)^2)$ と同等である。

また、 $Y = \{1/(\lambda c)\} \{(X/\mu)^{\lambda/2} - (X/\mu)^{-\lambda/2}\}$ の確率密度関数は

$$\left\{ 1 - y \left(y^2 + \frac{4}{(\lambda c)^2} \right)^{-1/2} \right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} y^2 \right\}, \quad -\infty < y < \infty.$$

p.d.f. of PIG (c= .5)

図1 $X \sim \text{PIG}(\mu, (\frac{1}{2})^2, \lambda)$ のときの $Y = X/\mu$ の密度関数のグラフ

これより $Y^2 \sim \chi^2(1)$ が示せる. 従って, $T = |Y|$ は自由度 1 のカイ分布 (folded Gaussian) に従う. 更に, $\lambda \log(X/\mu)$ の分布は PIG の定義式より直ちに導出され,

$$E\left(\log\left(\frac{X}{\mu}\right)^\lambda\right) = \exp\left\{\frac{2}{\lambda^2 c^2}\right\} \cdot E_i\left(-\frac{2}{\lambda^2 c^2}\right), \quad (=A \text{ とおく})$$

$$E\left(\left\{\left(\frac{X}{\mu}\right)^\lambda - 1\right\} \log\left(\frac{X}{\mu}\right)^\lambda\right) = -2A$$

を得る. ただし, E_i は積分指数関数 $E_i(t) = \int_{-\infty}^t x^{-1} e^x dx$ である. これより

$$E\left(\left\{\left(\frac{X}{\mu}\right)^\lambda + 1\right\} \log\left(\frac{X}{\mu}\right)^\lambda\right) = 0$$

となる. また, $X \sim \text{PIG}(\mu, c^2, \lambda)$ のとき, 任意の実数 k に対し

$$E(X^k) = \mu^k \frac{1}{\lambda c} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left\{\frac{1}{\lambda^2 c^2}\right\} \cdot K_{(k/\lambda) - (1/2)}\left(\frac{1}{\lambda^2 c^2}\right) \quad (13)$$

である. ただし, K は変形された第 2 種ベッセル関数である.

対数正規分布の性質が, 確率変数の対数変換により正規分布の性質を用いて調べることができると同様に, べき逆ガウス型分布の性質は確率変数のべき変換 X^λ により逆ガウス型分布の性質を用いて調べられる. しかし対数正規分布と異なり, この分布を特別な場合として含んでいるため, 変換に未知母数が混入している.

p.d.f. of PIG ($c=1$)

図2 $X \sim \text{PIG}(\mu, 1^2, \lambda)$ のときの $Y = X/\mu$ の密度関数のグラフ

4.2. 損失関数

2章で損失関数について論じたが，ここではべき逆ガウス型分布における損失関数とそれに関する特性量について議論する。

(13)式の特別な場合として，

$$\begin{aligned} E(X^\lambda) &= \mu^\lambda, \\ E(X^{2\lambda}) &= \mu^{2\lambda} \{1 + (\lambda c)^2\}, \\ E(X^{-\lambda}) &= \mu^{-\lambda} \{1 + (\lambda c)^2\} \end{aligned} \quad (14)$$

より

$$\begin{aligned} X^\lambda \text{ の母変動係数} &= \frac{\sqrt{\text{Var}(X^\lambda)}}{E(X^\lambda)} = \lambda c, \\ E\left(\left(\frac{X}{\mu}\right)^\lambda + \left(\frac{X}{\mu}\right)^{-\lambda} - 2\right) &= (\lambda c)^2 = \text{Var}\left(\left(\frac{X}{\mu}\right)^\lambda\right) \end{aligned}$$

が得られる。これを変形すると

$$\begin{aligned} E\left(\left\{\frac{(X/\mu)^{\lambda/2} - (X/\mu)^{-\lambda/2}}{\lambda}\right\}^2\right) \\ = \text{Var}\left(\frac{(X/\mu)^\lambda - 1}{\lambda}\right) &= \left(\frac{X^\lambda \text{ の母変動係数}}{\lambda}\right)^2 = c^2 \end{aligned}$$

p.d.f. of PIG ($c=1.5$)

図3 $X \sim \text{PIG}(\mu, (\frac{3}{2})^2, \lambda)$ のときの $Y = X/\mu$ の密度関数のグラフ

となり、 λ で基準化したいくつかの「バラツキ」を示す値が c^2 である。さきに c を拡がり母数と呼んだ一つの理由である。

さて、(9)は $(1/c)\xi_\lambda(X/\mu)$ の中心0からのズレを表わす分布として $N(0, 1)$ を考えており、 $\{(1/c)\xi_\lambda(X/\mu)\}^2$ が $\chi^2(1)$ に従うから、ズレのバラツキを表わす分布としてカイ二乗分布を考えていることになる。ここで $X \sim \text{PIG}(\mu, c^2, \lambda)$ のとき $(1/c)\xi_\lambda(X/\mu)$ はもはや $N(0, 1)$ に従わないが、(12)で示したように $\{(1/c)\xi_\lambda(X/\mu)\}^2$ は $\chi^2(1)$ に従う。すなわち、ズレのバラツキを表わす分布は保存されている。従って尺度母数 μ を推定するときの損失関数として

$$\frac{1}{\lambda^2} \left\{ \left(\frac{\hat{\mu}}{\mu} \right)^\lambda + \left(\frac{\mu}{\hat{\mu}} \right)^{-\lambda} - 2 \right\} \quad (15)$$

を考えることができる。ただし、べき逆ガウス型分布に於ける尺度母数の推定にこの損失関数を用いると、他のもう一つの未知母数 λ に依存しているので解析が困難である。

ここで、(15)で $\lambda \rightarrow 0$ のとき、すなわち対数正規分布の場合には尺度母数 μ の推定量 $\hat{\mu}$ の損失関数として $(\log \hat{\mu} - \log \mu)^2$ 、 $\lambda=1$ のとき、すなわち逆ガウス型分布の場合のそれに対しては

$$L(\hat{\mu}, \mu) = \frac{\hat{\mu}}{\mu} + \frac{\mu}{\hat{\mu}} - 2 = \left(\sqrt{\frac{\hat{\mu}}{\mu}} - \sqrt{\frac{\mu}{\hat{\mu}}} \right)^2 \quad (16)$$

を導く。これらは2章で紹介したものである。(16)式を用いた推定は Hirano (1984), Hirano and Iwase (1989), Hirano and Iwase (1990) で議論している。

次に $L(\hat{\mu}, \mu)$ を用いた結果や幾つかの特性量について述べる. $X_1, X_2, \dots, X_n \sim i.i.d. LN(\mu, c^2)$ のとき, 幾何平均 $\bar{X}_G$ は母中央値 μ の中央値不偏推定量であり, $\bar{X}_G \sim LN(\mu, c^2/n)$ より

$$E\left(\frac{\bar{X}_G}{\mu} + \frac{\mu}{\bar{X}_G} - 2\right) = 2(e^{c^2/(2n)} - 1) \doteq \frac{c^2}{n}, \quad \left(\frac{c^2}{n} \ll 1\right)$$

である. $X_1, X_2, \dots, X_n \sim i.i.d. IG(\mu, c^2)$ のとき, 標本平均 $\bar{X}$ は母平均 μ の不偏推定量であり, $\bar{X} \sim IG(\mu, c^2/n)$ より

$$E\left(\frac{\bar{X}}{\mu} + \frac{\mu}{\bar{X}} - 2\right) = \frac{c^2}{n}$$

である.

$X \sim PIG(\mu, c^2, \lambda)$ のとき,

$$\begin{aligned} E\left(\frac{X}{\mu} + \frac{\mu}{X} - 2\right) \\ = \frac{1}{\lambda c} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left\{\frac{1}{\lambda^2 c^2}\right\} \cdot \left\{K_{(1/\lambda)-(1/2)}\left(\frac{1}{\lambda^2 c^2}\right) + K_{(1/\lambda)+(1/2)}\left(\frac{1}{\lambda^2 c^2}\right)\right\} - 2 \end{aligned}$$

となることが (13) より直接示せる. $\lambda c \ll 1$ のとき近似的に c^2 に等しい. これは, $PIG(\mu, c^2, \lambda)$ の μ に対する損失関数としては本来 (15) を用いるのだが, (16) を用いたことによる相違である. $\lambda=1$ のときには, (12) より正確に c^2 に等しい.

尺度母数 μ を対数変換して $\log \mu$ を位置母数と考えた場合,

$$E\left(\left\{\frac{(X/\mu)^\lambda + 1}{2}\right\} \log X\right) = \log \mu$$

が成り立つ. また, 前節で述べたように

$$E\left(\frac{(X/\mu)^\lambda - 1}{\lambda} \log \frac{X}{\mu}\right) = -\frac{2A}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} \left\{-\exp\left(\frac{2}{\lambda^2 c^2}\right) \cdot E_i\left(-\frac{2}{\lambda^2 c^2}\right)\right\}$$

となる. 特に $\lambda c \ll 1$ のとき, この値は近似的に c^2 であり, 特定の λ に対して

$$\lambda=1 \text{ (逆ガウス型分布) のとき, } E\left(\left\{\frac{X}{E(X)} - 1\right\} \log \frac{X}{\mu}\right) \doteq c^2, \quad (c \ll 1)$$

$$\lambda \rightarrow 0 \text{ (対数正規分布) のとき, } E\left(\left\{\log \frac{X}{\mu}\right\}^2\right) = c^2$$

が成立する. これらと同じように次の Theil 係数も c と関連がある:

$$E\left(\frac{X}{E(X)} \log \frac{X}{E(X)}\right) = \begin{cases} -\exp\left\{\frac{2}{c^2}\right\} E_i\left(-\frac{2}{c^2}\right) \doteq c^2/2, & \text{if } X \sim IG(\mu, c^2), \\ c^2/2, & \text{if } X \sim LN(\mu, c^2). \end{cases}$$

Theil 係数については Theil (1967) の 4 章を参照されたい. なお, $X \sim Ga(\mu, c^2)$ のときこれらの期待値がどうなるかを付録に載せた.

4.3. モーメント法による $PIG(\mu, c^2, \lambda)$ の推定

モーメント法による $PIG(\mu, c^2, \lambda)$ の母数の推定について考察する. ここでは最尤推定量などとの比較は議論しない. 大きさ n の標本を $X_1, X_2, \dots, X_n$ とし, λ の推定を考える. ここで $\bar{X}_\lambda$

$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^\lambda$ と定義すれば, (14) から $E(X^{2\lambda}) = \{E(X^\lambda)\}^2 \cdot E(X^{-\lambda})$ を得る. モーメント法を用いるので $g(\lambda) = \bar{x}_{2\lambda} - (\bar{x}_\lambda)^2 \cdot \bar{x}_{-\lambda}$ と定義する. 標本 $x_1, x_2, \dots, x_n$ を固定し, 各 λ について $g(\lambda^*) = 0$ を満たす λ^* を求める. これを λ の推定値とする. 積率の関係式より $(X^\lambda$ の母変動係数) $^2 = E(X^\lambda) \cdot E(X^{-\lambda}) - 1$ であるから, $g(\lambda^*) = 0$ を見つけることは, x_i^λ の標本変動係数の二乗と $(x_i^\lambda$ の標本平均) / $(x_i^\lambda$ の調和平均) - 1 とが一致する λ を見つける作業になっている. このようにして得られた λ^* で

$$\mu^* = (\bar{x}_{\lambda^*})^{1/\lambda^*}$$

$$(c^*)^2 = \frac{\bar{x}_{\lambda^*} \cdot \bar{x}_{-\lambda^*} - 1}{(\lambda^*)^2}$$

により μ および c^2 の推定がなされる. なお, $n \geq 3$ に対して $g(\lambda^*) = 0$ を満たす λ^* の存在および一意性は証明できていない. $n = 2$ に対しては $g(\lambda^*) < 0$ となり, 解のないことがわかる.

5. 乗法的外乱の加わる曲線回帰モデル

1章でデータが第1象限にしか存在し得ない例として, あらかじめ定められた区間を車が交通の流れに沿って移動するに要する時間(旅行時間)をとりあげた. 測定区間が長くなればそれだけ旅行時間は大きくなるばかりでなく, バラツキも大きくなる. しかし, この旅行時間のバラツキの増大はいわば比例拡大されたものであり, 見かけ上のバラツキの増大であるとも考えられる. この意味で例えば変動係数は旅行時間の本質的なバラツキであるにとらえることができる. Iwase (1989) は原点を通る直線回帰モデル

$$Y_i = \beta x_i \cdot \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim i.i.d. IG(1, c^2) \quad (17)$$

について考察した. Y_i の母平均は βx_i であり, 母変動係数は c であり, 説明変数 x_i の値には依存しない. また c は回帰直線からのずれのバラツキを示す母数である. モデル (17) の旅行時間への具体的な適用は浦野, 岩瀬(1991)でなされている. ここではこのモデルの一つの拡張を試みる.

最初に, 原点を通る曲線回帰モデル

$$Y_i = (\beta x_i \cdot \eta_i)^\alpha, \quad \eta_i \sim i.i.d. PIG(1, c^2, \lambda) \quad (18)$$

を考察する. (11) よりこのモデルは

$$Y_i = (\beta x_i)^\alpha \cdot \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim i.i.d. PIG\left(1, (\alpha c)^2, \frac{\lambda}{\alpha}\right) \quad (19)$$

に等しい. 誤差(比)項 η_i および ε_i は無名数である. ここで, (x_i, y_i) の単位がどのような現象であっても α, c, λ は無名数であり, 比較が可能である. β の単位は Y_i の尺度母数と x_i の尺度母数を取り込んでおり, α にも依存する. 従って, β の値そのものの解釈は困難である. λ は外乱の分布を, またはどのような意味で「中心」を通る回帰かを規定するものである. α は λ で決まった「中心」の回帰の構造を規定するものである. c はそのような α に依存しない基本となる外乱のバラツキを示す母数である.

(18)(19)において, λ に対する条件を加えると

(i) $\lambda = 0; \varepsilon_i \sim LN(1, (\alpha c)^2),$

(ii) $\lambda = \alpha$; $\varepsilon_i \sim IG(1, (\alpha c)^2)$ となる.

(i) の場合で $\alpha = 1$ (直線回帰) としたとき岩瀬, 瀬戸 (1990), 一般の α としたとき岩瀬, 瀬戸 (1991) で考察されている. (ii) の場合で $\alpha = 1$ (直線回帰) としたとき Iwase (1989), 浦野, 岩瀬 (1991) で考察されている. ここでは一般の α について, すなわち曲線回帰モデル

$$Y_i = (\beta x_i)^\alpha \cdot \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim i.i.d. IG(1, (\alpha c)^2) \quad (20)$$

を考察する. Y_i の母変動係数は Y_i の母平均の増加率を決める α に比例して大きくなるが, この α による見かけ上のバラツキの増大を除去したバラツキを示すのが c であると考えられる. モデル (20) の母数の推定はべき逆ガウス型分布の母数推定に帰着される. 実際, モデル (20) は $Y_i/x_i^\alpha = \beta^\alpha \cdot \varepsilon_i \sim i.i.d. IG(\beta^\alpha, (\alpha c)^2)$ すなわち, $Y_i^{1/\alpha}/x_i \sim i.i.d. PIG(\beta, c^2, \alpha)$ に等しい.

そこで, 4.3 節で述べたモーメント法による推定を適用するために

$$\bar{Z}_\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{x_i^\alpha}, \quad \bar{Z}_{-\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha}{Y_i}, \quad \bar{Z}_{2\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{Y_i^2}{x_i^{2\alpha}}$$

とし, $g(\alpha) = \bar{Z}_{2\alpha} - (\bar{Z}_\alpha)^2 \cdot \bar{Z}_{-\alpha}$ とおく. 標本 (x_i, Y_i) より $g(\alpha^*) = 0$ なる α^* を求める. これにより

$$\beta^* = (\bar{Z}_{\alpha^*})^{1/\alpha^*}, \quad (c^*)^2 = \frac{\bar{Z}_{\alpha^*} \cdot \bar{Z}_{-\alpha^*} - 1}{(\alpha^*)^2}$$

として, β, c^2 が求められる.

モデル (20) で特に $\alpha = 1$ の場合, すなわち原点を通る回帰直線

$$Y_i = \beta x_i \cdot \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim i.i.d. IG(1, c^2)$$

において

$$Q = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{\varepsilon_i} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_i}} \right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\varepsilon_i + \frac{1}{\varepsilon_i} - 2 \right) \text{ の最小化} \quad (21)$$

の規則で β の推定量 $\hat{\beta}$ を求める. そのとき

$$Q(\beta) = \frac{1}{\beta n} \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{x_i} + \frac{\beta}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{Y_i} - 2$$

より

$$\hat{\beta} = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n Y_i/x_i}{\sum_{i=1}^n x_i/Y_i} \right\}^{1/2}$$

を得る. 原理 (21) は, いわば加法的に外乱が加わる正規分布モデルでの最小二乗法に相当するものであり, 乗法的に外乱が加わるモデルでの 1 つの推定原理を与えている.

注意 確率変数 X が $PIG(\mu, c^2, \lambda)$ に従うとき, $\log X$ の位置母数は $\log \mu$ である. そこで回帰モデル (20) で $\log \varepsilon_i$ に最小二乗法を適用すれば λ, β, c の推定量は容易に作れる. なお, (16) 式の前段で述べた損失関数についての記述に注意されたい.

6. 補 足

2 章でガンマ分布, 対数正規分布, B-S 分布, 逆ガウス型分布の確率素分を示した. これらは B-

S 分布を除くと通常の場合と異なった母数の入れ方をしていた。一般に各分布に対して母数の入れ方は何通りかの表現があり、それぞれの由来があるだろう。本稿で述べたような単位を持つ計測値の場合には母数の入れ方に注意すべきである。逆ガウス型分布の場合、Chhikara and Folks (1989) と異なるが、本稿でその考え方を述べた。対数正規分布についても同様である。通常では $\log X \sim N(\mu, \sigma^2)$ のとき、 X の従う分布として定義されている。この場合 μ の解釈、 σ^2 が無名数であることの解釈、またそれぞれの意味付けが難しい。その点 (3) 式による定義は明確になっている。

べき正規分布についても同様である。べき正規分布は通常 $(X^\lambda - 1)/\lambda \sim \text{truncated } N(\mu, \sigma^2)$ のとき、 X の従う分布として定義されている（この分布については、例えば本誌松原、後藤 (1980) を参照されたい）。この場合も同様に母数の単位や解釈に難点がある。(6) 式によれば正值確率変数 X と、母数 $\mu > 0$, $c > 0$, $\lambda \neq 0$ に対し、 $(1/c) \cdot \{(X/\mu)^\lambda - 1\}/\lambda$ は (i) $\lambda > 0$ のとき、 $N(0, 1)$ の $-1/(c\lambda)$ 以下がトランケートされた分布、(ii) $\lambda < 0$ のとき、 $N(0, 1)$ の $-1/(c\lambda)$ 以上がトランケートされた分布、に従うとすると、 X の従う分布をべき正規分布という。その確率素分は

$$\frac{1}{\Phi(1/(|\lambda|c))} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}c} \left(\frac{x}{\mu}\right)^{\lambda-1} \exp\left\{-\frac{1}{2c^2} \left(\frac{(x/\mu)^\lambda - 1}{\lambda}\right)^2\right\} \frac{dx}{\mu}, \quad x > 0 \quad (22)$$

で与えられる。この定義によれば、 c および λ は無名数であり、尺度母数 μ の単位にかかわらず比較が可能である。

付 録

$X \sim Ga(\mu, c^2)$ のとき

$$E(X^k) = (c^2\mu)^k \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s)}.$$

ただし、 k は非負の任意の実数、 $s = 1/c^2$ である。これを用いると

$$E(X) = \mu, \quad Var(X) = c^2\mu^2, \quad \text{変動係数} = c$$

を得る。また、

$$E\left(\left(\frac{X}{\mu}\right)^k \log \frac{X}{\mu}\right) = \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s)} \left(\frac{1}{s}\right)^k \{\psi(s+k) - \log s\}.$$

ただし、 $k > -s$, $s = 1/c^2$, $\psi(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \log \Gamma(\alpha)$ である。これを用いると

$$E\left(\left(\frac{X}{\mu} - 1\right) \log \frac{X}{\mu}\right) = c^2$$

を得る。積率母関数は

$$E(e^{tX}) = (1 - c^2\mu t)^{-1/c^2}, \quad t < \frac{1}{c^2\mu}$$

である。さらに、

$$E\left(\frac{X}{\mu} - 1 - \log \frac{X}{\mu}\right) = \log \frac{1}{c^2} - \psi\left(\frac{1}{c^2}\right) \approx c^2, \quad (c \ll 1)$$

である。

謝 辞 本稿は、科学研究費総合 A「統計学の数理的基礎と諸分野への応用に関する研究」によるシンポジウム「正の値をとる連続分布に関する研究」(1989.11.20-22 於大阪大学基礎工学部)の予稿を書き改めたものである。統計数理研究所の清水良一氏にはシンポジウムへの参加を勧めて下さり、草稿の不備な点を指摘していただいた。また投稿論文に対して、査読者から建設的な助言をいただいた。これらをもとに書き改めることができた。ここに記して謝意を表したい。この研究は一部、昭和 63 年度、平成 1, 2 年度統計数理研究所共同研究の援助による成果である。

参 考 文 献

- Birnbaum, Z.W. and Saunders, S.C. (1969): A new family of life distributions, *J. Appl. Prob.* **6**, 319-327.
- Chhikara, R.S. and Folks, J.L. (1989): *The Inverse Gaussian Distribution: Theory, Methodology, and Applications*, Statistics: textbooks and monographs, Vol. 95, Marcel Dekker, New York.
- Hirano, K. (1984): A preliminary test procedure for the scale parameter of exponential distribution when the selection parameter is unknown, *Ann. Inst. Statist. Math.*, A **36**, 1-9.
- Hirano, K. and Iwase, K. (1989): Minimum risk scale equivariant estimator: Estimating the mean of an inverse Gaussian distribution with known coefficient of variation, *Commun. in Statist., Theory and Methods* **18**, 189-197.
- Hirano, K. and Iwase, K. (1990): On Fisher's problem of the Nile, *Research Memorandum No. 389, Inst. Statist. Math.*
- Jørgensen, B. (1982): *Statistical Properties of the Generalized Inverse Gaussian Distribution*, Lecture Notes in Statistics, Vol. 9, Springer-Verlag, New York.
- Iwase, K. (1989): Linear regression through the origin with constant coefficient of variation for the inverse Gaussian distribution, *Commun. in Statist., Theory and Methods* **18**, 3587-3593.
- 岩瀬晃盛, 瀬戸信也 (1990): 大気中アルミニウム濃度とスカンジウム濃度との統計的特性, 広島大学工学部研究報告 第 38 巻 第 2 号 153-161.
- 岩瀬晃盛, 瀬戸信也 (1991): 対数正規誤差に基づく原点を通る曲線回帰, 広島大学工学部研究報告 第 39 巻 第 2 号 111-118.
- Kullback, S. (1959): *Information Theory and Statistics*, Wiley, New York.
- 松原義弘, 後藤昌司 (1980): ベキ正規分布に基づく生存時間データの曲線回帰, 応用統計学 **9**, 43-51.
- Shuster, J. (1968): On the inverse Gaussian distribution function, *J. Amer. Statist. Assoc.* **63**, 1514-1516.
- Theil, H. (1967): *Economics and Information Theory*, North Holland, Amsterdam.
- 津村善郎, 瀧脇 学, 築林昭明 (1988): 社会統計入門, 東京大学出版会.
- 浦野 隆, 岩瀬晃盛 (1991): 車両走行時間の統計的特性—逆ガウス型分布誤差に基づく直線回帰の応用—, 交通工学 第 26 巻 2 号 8-16.

(1990 年 11 月 30 日受付 1991 年 2 月 19 日最終修正)

著者連絡先: 〒724 広島県東広島市鏡山 1-4-1
 広島大学工学部岩瀬晃盛 [REDACTED]
 〒106 東京都港区南麻布 4-6-7
 統計数理研究所平野勝臣 [REDACTED]