2つの独立なカイ2乗変量と その積：分布の裾の比較

ロチェスター大学サイモン大学院* 渋谷政昭・住田 潮・宮脇典彦

Two Independent Chi-Square Variates and their Product : Comparison of Tails of Distributions

Masaaki SIBUYA, Ushio SUMITA and Norihiko MIYAWAKI

要 旨

独立なカイ2乗変量の積を作ると、元の变量より、強い意味で裾が重くなる
ことが証明できる。それを応用して、多変量小標本の2標本検定問題にたいす
る Dempster (1958, 1960), 勘場, 井上, 後藤 (1989) の近似検定が、漸近的に
保守的であることが裏付けられる。

1. まえがき

勘場, 井上, 後藤 (1989) は、分散共分散行列が共通・未知の2つの多変量正規母集団で、変
量の数が標本の大きさよりも多いときの、比較と判別を議論した。平均の比較では Dempster
(1958, 1960) の近似 F 検定における‘有効次元’推定のために、観測ベクトルの長さだけでなくベ
クトル間の角度も併用した方が性能が良いことを示した。

Dempster も勘場, 他も、近似検定が漸近的に保守的であることを主張しているが、その裏付け
は完全でない。近似検定では F の自由度がデータに依存し、検定規準値がばらつくために実際の
水準が設定値より低くなる。検定規準値を正規近似すると、裏付けに必要なことは次の通りであ
る。

命題 $V_i, i=1, 2$, が自由度 ν_i のカイ2乗変量で、独立であるとする。 $Z = V_1 V_2 / \nu_1 \nu_2$ とおくと、
検定水準 $\alpha (\div 0.05)$ にたいして、

$$P\{Z \geq \chi^2_{\nu_1}(\alpha) / \nu_1\} \geq \alpha,$$

ただし $\chi^2_{\nu}(\alpha)$ は自由度 ν のカイ2乗分布の上側確率 α の点である。(命題終り)

* 本稿は渋谷, 宮脇がロチェスター大学訪問中の仕事である。

Key words: Dispersion ordering, Heaviness of tail, Highly multivariate small sample, Monotone likelihood ratio, Strong unimodality.

つまり V_1/ν_1 の分布関数を F , Z の分布関数を G としたとき, 図1のように G の方が裾が重いことを示したい. (図1は $\nu_1=1, \nu_2=6$ の場合の粗い数値積分によるもので, 精度は十分でない) 上記の裏付けのためには $\nu_1=1$ に限ってよいのであるが, 命題は一般にしておく.

勘場, 他 (1989) は $\log g(x) - \log f(x)$ (g, f はそれぞれ G, F の密度関数) の数値計算を行い, ある程度大きな x にたいしては, この差が単調増加であることを確かめている.

2. 拡りと裾の重さの順序

確率分布の拡り (spread, dispersion) と裾の重さの強い比較として, 次の2つの定義が用いられている. 詳しくは Yanagimoto and Sibuya (1976), Shaked (1985) などを見よ. 簡単のために分布関数の逆関数が存在することを仮定する.

定義 分布関数 F_1 よりも F_2 の方が拡りが大きいことを,

$$F_2^{-1}(u) - F_1^{-1}(u), 0 < u < 1, \quad \text{が非減少関数,}$$

により定義し, $F_1 < F_2(\mathcal{J})$ と記す. (定義終り)

$F_\theta(x) := F_0(x - \theta)$, x と θ は任意の実数, とすると, $\theta_1 < \theta_2$ のとき $F_{\theta_1} < F_{\theta_2}(\mathcal{J})$ かつ $F_{\theta_2} < F_{\theta_1}(\mathcal{J})$ である. このように, 位置母数 θ を動かしたときの分布族を同値類とすると, $<(\mathcal{J})$ は確率分布の中の半順序となる.

定義2 分布関数 G_1 よりも G_2 の方が裾が重い (ただし $G_1(0) = G_2(0) = 0$) ことを,

$$G_2^{-1}(u)/G_1^{-1}(u), 0 < u < 1, \quad \text{が非減少,}$$

により定義し $G_1 < G_2(\mathcal{J})$ と記す. (定義終り)

図1. V_1/ν_1 の分布関数 F と $V_1 V_2/\nu_1 \nu_2$ の分布関数 G との概略図

表 1. 拡りと裾の比較: 同値の定義と対応

拡りの比較 $F_1 < F_2(\mathcal{S})$ $F_i(x) = G_i(e^x), -\infty < x < \infty$	裾の比較 $G_1 < G_2(\mathcal{T})$ $G_i(y) = F_i(\log y), 0 < y < \infty$
$F_2^{-1}(u) - F_1^{-1}(u) \uparrow \quad 0 < u < 1.$ $F_2^{-1}(F_1(x)) - x \uparrow \quad -\infty < x < \infty.$ $[F_2^{-1}F_1 \text{ が急勾配型}]$ $f_1(F_1^{-1}(u)) \geq f_2(F_2^{-1}(u)), \quad 0 < u < 1.$ 任意の実数 b にたいして $F_1(x-b) - F_2(x), \quad -\infty < x < \infty,$ の符号が高々1回負から正へ変わる. $F_1(F_1^{-1}(u)+x) \geq F_2(F_2^{-1}(u)+x),$ $0 < u < 1, 0 < x < \infty.$	$G_2^{-1}(u)/G_1^{-1}(u) \uparrow \quad 0 < u < 1.$ $G_2^{-1}(G_1(y))/y \uparrow \quad 0 < y < \infty.$ $[G_2^{-1}G_1 \text{ が星型}]$ $g_1(G_1^{-1}(u))G_1^{-1}(u) \geq g_2(G_2^{-1}(u))G_2^{-1}(u), \quad 0 < u < 1.$ 任意の正実数 a にたいして $G_1(y/a) - G_2(y), \quad 0 < y < \infty,$ の符号が高々1回負から正へ変わる. $G_1(G_1^{-1}(u) \cdot y) \geq G_2(G_2^{-1}(u) \cdot y),$ $0 < u < 1, 1 < y < \infty.$

これは、尺度母数を動かした分布族を同値類としたとき、 $G(0)=0$ を満たす分布の中の半順序となる。定義 1, 2 の間には次の対応関係がある。

$F_i(x) = G_i(e^x), -\infty < x < \infty$, すなわち, $G_i(y) = F_i(\log y), 0 < y < \infty, i=1, 2$ とすると,

$$F_1 < F_2(\mathcal{S}) \Leftrightarrow G_1 < G_2(\mathcal{T})$$

である。2つの定義は、いろいろ同値な形に表わせる。これを対応させてまとめると表 1 のようになる。

$F_1 < F_2(\mathcal{S})$ の場合に適当な確率 $p_0, 0 < p_0 < 1$, にたいして

$$F_1(\xi_1) = F_2(\xi_2) = p_0$$

ならば

$$F_1(x) \geq F_2(x - (\xi_1 - \xi_2)), \quad x > \xi_1,$$

である。 $G_1 < G_2(\mathcal{T})$ の場合も同様で、差を比に変えた不等式となる。

3. 主要な理論

半順序 $<(\mathcal{S})$ に関する主要定理を紹介する前に、次の事実を思い出しておく。詳しくは、たとえば Sibuya (1983), Dharmadhikari and Joag-dev (1988) を参照。位置パラメータをもつ確率密度関数の族 $\{h(x-\theta), -\infty < \theta < \infty\}$ が単調尤度比をもつ必要十分条件は; $h(x)$ が対数凹である。これはまた、 h が Ibragimov の意味で強単峰 (strongly unimodal) であるための必要十分条件でもある。

定理 Lewis and Thompson

分布関数 H と、任意の分布関数 L との合成積 (convolution) $H * L$ とが

$$H < H * L(\mathcal{S})$$

を満たす必要十分条件は、 H が対数凹の確率密度関数をもつことである。(定理終り)

この定理は Lewis and Thompson (1981) が最初に述べ、その後 Lynch, Mimmack and Proschan (1983), Sanders (1984), Droste and Wefelmeyer (1985), Klaassen (1985) により修正、改善、証明の改善、がなされている。これらの文献では 'dispersion ordering' という用語と順序の

記号 $\leq_{\text{disp}}$ が主に用いられている。

上の定理は実数確率変数の分布関数について成り立つことであるが、 $K(y)=H(\log y)$, $M(y)=L(\log y)$ と変換して解釈すると、合成積つまり確率変数の和の代りに、正確率変数の積を考えることになる：

系 分布関数 K が $K(0)=0$ を満たし、 $M(0)=0$ を満たす任意の分布関数 M にたいして $K_M(y)=\int_0^\infty K(y/t)dM(t)$ とするとき、 $K < K_M(\mathcal{T})$ となる必要十分条件は、 θ を尺度パラメータとする K の確率密度 $k_\theta(y)=k(y/\theta)/\theta$ の族 $\{k_\theta: 0 < \theta < \infty\}$ が単調尤度比をもつことである。これは $\log k(e^x)$, $-\infty < x < \infty$, が凹であることと同等である。

4. 交点の近似

第1節の問題に戻る。任意のカイ2乗分布あるいはガンマ分布の確率密度関数は系の条件を満たす。したがって第1節の分布関数 F, G は $F < G(\mathcal{T})$ を満たす。したがって F, G のグラフは図1のように、原点以外1点でしか交わらないが、その交点 $F(\xi)=G(\xi)$ の近似値を求めたい。

準備としてガンマ分布の確率密度

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-x}$$

を重みとする Laguerre 直交多項式系（たとえば Abramowitz and Stegun (1964), Barndorff-Nielsen and Cox (1989) 参照）を、

$$(4.1) \quad L_n^\lambda(x) = (-1)^n x^{-\lambda+1} e^x \left(\frac{d}{dx} \right)^n x^{\lambda+n-1} e^{-x}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

で定義する。最高次係数が1となるように標準化してある。微分を展開すれば

$$(4.2) \quad L_n^\lambda(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} (\lambda+n-1)^{(n-j)} x^j$$

である。ただし

$$\lambda^{(n)} = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1).$$

(4.1) より

$$(4.3) \quad \int L_n^\lambda(x) f_\lambda(x) dx = -\lambda L_{n-1}^{\lambda+1}(x) f_{\lambda+1}(x)$$

$$(4.4) \quad \int_0^\infty e^{tx} L_n^\lambda(x) f_\lambda(x) dx = (\lambda+n-1)^{(n)} t^n / (1-t)^{\lambda+n}$$

が得られる。

ある確率密度関数を

$$(4.5) \quad g(x) = \sum_{n=0}^\infty c_n L_n^\lambda(x) f_\lambda(x), \quad 0 < x < \infty$$

と漸近展開できたとすると、そのモーメント母関数は(4.4)から

$$\begin{aligned} \text{MGF}(t; g) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\lambda + n - 1)^{(n)} t^n / (1 - t)^{\lambda + n} \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda + n - 1)^{(n)} t^n \left(\sum_{j=0}^n c_{n-j} / j! \right) \end{aligned}$$

であり、その分布関数は (4.3) より

$$(4.6) \quad G(x) = c_0 F_{\lambda}(x) - \lambda f_{\lambda+1}(x) \sum_{n=1}^{\infty} c_n L_{n-1}^{\lambda+1}(x)$$

である。\$g\$ の原点まわりのモーメント \$\mu_n'\$, \$n=1, 2, \dots\$, が存在するとし, \$\mu_n' = (\lambda + n - 1)^{(n)} m_n\$ と書くと, (4.5) の係数 \$c_n\$ は

$$\sum_{j=0}^n c_{n-j} / j! = m_n / n!$$

で定めればよい。さらに

$$d_j = j! c_j$$

とすると

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} d_j = m_n = \mu_n' / (\lambda + n - 1)^{(n)}$$

を反転公式で解くか、逐次計算すればよい。

元の問題に戻り \$Z = V_1 V_2 / \nu_1 \nu_2\$ の分布を \$V_1 / \nu_1\$ の分布関数 \$F_{\lambda}(\lambda x)\$ (\$\lambda = \nu_1 / 2\$) で近似するためには、\$Z\$ のモーメント

$$E[Z^n] = \frac{(\lambda + n - 1)^{(n)} (\mu + n - 1)^{(n)}}{\lambda^n \mu^n}$$

ただし \$\mu = \nu_2 / 2\$, より

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} d_j = \frac{(\mu + n - 1)^{(n)}}{\mu^n}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

をとく。(\$\lambda Z = 2 V_1 V_2 / \nu_2\$ の分布関数を近似する。)

$$d_0 = 1, \quad d_1 = 0, \quad d_2 = 1/\mu, \quad d_3 = 2/\mu^2, \quad d_4 = 3(\mu + 2)/\mu^3, \quad d_5 = (20\mu + 24)/\mu^4, \dots$$

が定まり, \$d_n = O(1/\mu^3)\$, \$n \ge 5\$, も言える。

\$F_{\lambda}(\lambda \xi) = G(\lambda \xi)\$ を満たす \$\xi\$ を求めるには (4.6) より

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n L_{n-1}^{\lambda+1}(\lambda \xi) = 0$$

を解くことになる。4 項までとると、

$$\xi = \frac{\lambda + 1}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{3\mu} \right) + O(\mu^{-2}),$$

特に \$\lambda = 1/2\$ のとき、交差点での確率 \$F_{\lambda}(\lambda \xi)\$ は \$F_{\lambda}(\lambda + 1) = .9167\$ (自由度 1 のカイ 2 乗分布で 3 以下の確率) より小さい。したがって通常の有意水準と \$\nu_2\$ では保守的となる。

参 考 文 献

- Abramowitz, M. and Stegun, I.A. (1964): *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards/Dover, New York.
- Barndorff-Nielsen, O.E. and Cox, D.R. (1989): *Asymptotic Techniques for Use in Statistics*, Chapman and Hall, London.
- Dempster, A.P. (1958): A high dimensional two sample significant test, *Ann. Math. Statist.* **29**, 995-1010.
- Dempster, A.P. (1960): A significance test for the separation of two highly multivariate small samples, *Biometrics* **16**, 41-50.
- Dharmadhikari, S. and Joag-dev, K. (1988): *Unimodality, Convexity and Applications*, Academic Press, San Diego.
- Droste, W. and Wefelmeyer, W. (1985): A note on strong unimodality and dispersivity, *J. Appl. Prob.* **22**, 235-239.
- Klaassen, C.A.J. (1985): Strong unimodality, *Adv. Appl. Prob.* **17**, 905-907.
- Lewis, T. and Thompson, J.W. (1981): Dispersive distributions, and the connection between dispersivity and strong unimodality, *J. Appl. Prob.* **18**, 76-90.
- Lynch, J., Mimmack, G. and Proschan, F. (1983): Dispersion ordering results. *Adv. Appl. Prob.* **15**, 889-891.
- Saunders, D.J. (1984): Dispersive ordering of distributions, *Adv. Appl. Prob.* **16**, 693-694.
- Shaked, M. (1985): Ordering distributions by dispersion, S. Kotz and N.L. Johnson (eds.) *Encyclopedia of Statistical Sciences*, Vol. 6, 485-490, John Wiley, N.Y.
- Sibuya, M. (1983): Monotonicity of positive partial sums of independent random variables, K. Ito and J. V. Prokhorov (eds.) *Proc. Fourth Japan-USSR Symposium on Probability Theory and Mathematical Statistics, Lecture Notes in Math.* **1021**, 612-616, Springer-Verlag, Berlin.
- Yanagimoto, T. and Sibuya, M. (1976): Isotonic tests of spread and tail, *Ann. Inst. Statist. Math.* **28**, 329-342.
- 勘場 貢・井上俊昭, 後藤昌司 (1989): 多変量小標本の比較と判別, 応用統計学 **18**, 1-15.

(1990年12月19日受付 1991年2月8日最終修正)

著者連絡先: 〒223 横浜市港北区日吉 3-14-1 慶應義塾大学理工学部数理科学科 渋谷