最短格子経路数の母関数による 待ち行列の一解析

大阪府立大学 有 蘭 育 生

太 田 宏

An Analysis of Queueing Systems Based on Generating Function for Number of Minimal Lattice Paths

I. ARIZONO, and H. OHTA

要 旨 組合せ数の一つである最短格子経路数に関する母関数が Sato & Cong により定義されている。古川・太田はこの最短格子経路数に関する母関数を利用して、 $M/M/1$ 待ち行列モデルでの全稼働期間の長さの分布とその期間中に行うサービス回数の分布を求めうることを示している。ただし、古川・太田の研究では最短格子経路数の母関数を利用して $M/M/1$ 待ち行列モデルでの待ち行列長さに関しての平衡状態確率を導出する方法は論じられていない。そこで本研究では、待ち行列モデルの平衡状態確率を最短格子経路数に関する母関数を利用して導出する方法について考察する。

1. はじめに

待ち行列モデルでの待ち行列長さに関しての平衡状態確率を導出する方法としては待ち行列システムの状態推移に関する差分微分方程式を解く方法がよく知られている。Kawamura (1961) は、この差分微分方程式を解く方法を用いて $E_i/E_k/1$ 待ち行列モデルの平衡状態確率を求めるための関係式を与えている。ただし、Kawamura の方法により平衡状態確率を求める場合にはいくつもの行列式の計算などかなり煩雑な計算を必要とする。一方、組合せ論が待ち行列問題における全稼働期間の長さの分布やその期間内におけるサービス回数の分布を決定するのに有効であることが Takacs (1961, 1962a, 1962b) により紹介されている。これらとは別に、古川・太田 (1984, Ohta & Furukawa, 1985) は組合せ数の一つである最短格子経路数に関する母関数 (Sato & Cong, 1983) を利用して、 $M/M/1$ 待ち行列モデルでの全稼働期間の長さの分布とその期間中に行うサービス回数の分布を求めうることを示している。ただし、古川・太田の研究では最短格子経

Key words: Difference-differential equation, $E_i/E_k/1$ queueing systems, Equilibrium state probability, Generating function of minimum lattice paths

路数の母関数を利用して $M/M/1$ 待ち行列モデルでの待ち行列長さに関しての平衡状態確率を導出する方法は論じられていない。また近年, Sato (1989) は上記の最短格子経路数に関する考察をより一般化した結果を示している。具体的には, 2次元平面上での最短格子経路を制限する直線方向係数が整数の場合を考察した Sato & Cong の結果に対して, Sato はこの直線方向係数がより一般的に有理数で与えられる場合に拡張し, 最短格子経路数の母関数を求めている。以上の結果を受けて, 本研究では $M/M/1$ 待ち行列モデルをその特殊な場合として内包する $E_i/E_k/1$ 待ち行列モデルの待ち行列長さに関する平衡状態確率を, 最短格子経路数の母関数を利用して導出する方法について考察する。提案法を用いる場合には, 最短格子経路数の母関数に関するいくつかの結果を利用することにより, いくつもの行列式の計算などかなり煩雑な計算を必要とする Kawamura の方法による場合に対して, 比較的容易に平衡状態確率の一般式を求めることができる。また, 平衡状態確率を数値的に求める場合にも同様のことがいえる。

2. 最短格子経路数の母関数

x - y 平面上の整数座標を格子点として, 移動子が格子点を通りながら, 始点となる格子点から終点となる格子点へ最短の経路で到達する道程を最短格子経路と呼ぶ。ここで, 正整数 l に関して直線 $y=lx$ を横切ることなく, 原点から格子点 $(\eta, l\eta+a)$ に到達する最短格子経路数を $w_l(\eta, a, 0)$ と表すとき

$$w_l(\eta, a, 0) = \frac{a+1}{a+1+(l+1)\eta} \binom{a+1+(l+1)\eta}{\eta}$$

で与えられる。ただし, a, η は非負の整数である。Sato & Cong (1983) はこの最短格子経路に関する母関数 $W_l(x, a, 0)$ を

$$W_l(x, a, 0) = \sum_{\eta=0}^{\infty} w_l(\eta, a, 0) x^{\eta} \quad (1)$$

により定義し, 具体的に与えている。

さらに近年, Sato (1989) は最短格子経路に制限を与える直線方向係数を正整数 l, k を用いて l/k として有理数で与えた場合の最短格子経路について考察している。以下では, 有理数の方向係数をもつ直線で制限された最短格子経路数の母関数について概説する。

下記の直線 L で制限された最短格子経路を考える。

$$L: y = \frac{1}{k}(lx - b) \quad (2)$$

ここで, b は非負整数を表し, l, k は上記のように正整数であり, a, η は非負の整数として与えるものとする。このとき, (2) 式の直線 L を横切ることなく原点から格子点 $(\eta, (l\eta+a-b)/k)$ に至る最短格子経路数を $w_{l/k}(\eta, a, b)$ と表す。ここで, $l\eta+a \equiv b \pmod{k}$ である。このとき, $w_{l/k}(\eta, a, b)$ の母関数を $W_{l/k}(x, a, b)$ とすると

$$W_{l/k}(x, a, b) = \sum_{l\eta+a \equiv b \pmod{k}} w_{l/k}(\eta, a, b) x^{\eta} \quad (3)$$

と定義される。ただし、 $\sum_{l\eta+a \equiv b \pmod k}$ は $l\eta+a \equiv b \pmod k$ を満足するすべての非負整数 η についての和を意味する。(3)式の母関数は具体的に

$$W_{l/k}(\chi, a, b) \equiv \vec{1}^t \Lambda^{a+b} V^{-1} \vec{\varphi}(\chi, b)$$

として Sato (1989) により求められている。ここに、 V および Λ は

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1^{k-1} & u_2^{k-1} & \cdots & u_k^{k-1} \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} u_1 & & & \\ & u_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & u_k \end{pmatrix} \quad (5)$$

で表される $k \times k$ 行列である。また、(4), (5)式における $u_\nu (\nu=1, \dots, k)$ は方程式

$$\chi u^{k+1} + 1 - u^k = 0 \quad (6)$$

の原点で解析的な k 個の根であり、具体的に

$$u_\nu(\chi) = \omega^\nu \sum_{N=0}^{\infty} A_N \left(\frac{1}{k}, \frac{k+l}{k} \right) \{ \omega^{(k+l)\nu} \chi \}^N \quad (\nu=1, \dots, k)$$

により計算される。ここに ω は、 i を虚数単位として

$$\omega = \exp \left\{ \frac{2\pi i}{k} \right\}$$

であり

$$A_N \left(\frac{1}{k}, \frac{k+l}{k} \right) = \frac{1}{1+(k+l)N} \binom{(1+(k+l)N)/k}{N}$$

である。さらに、 $\vec{\varphi}(\chi, b)$ および $\vec{1}$ は

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}(\chi, b) &= (\varphi(\chi, b), \varphi(\chi, b-1), \dots, \varphi(\chi, b-k+1))^t \\ \vec{1} &= (1, 1, \dots, 1)^t \end{aligned}$$

で表される k 行ベクトルであり、肩付きの添え字 t は行列またはベクトルの転置を意味する。また、 $\varphi(\chi, k)$ は

$$\varphi(\chi, h) = \begin{cases} \sum_{0 \leq lj \leq h \text{ and } lj \equiv h \pmod{k}} \binom{\frac{1}{k}(h-lj)}{j} (-\chi)^j, & h \geq 0 \\ 0, & h < 0 \end{cases}$$

で定義される。ここに、 $\sum_{0 \leq lj \leq h \text{ and } lj \equiv h \pmod{k}}$ は $0 \leq lj \leq h$ かつ $lj \equiv h \pmod{k}$ を満たすすべての非負整数 j についての和を意味する。とくに、 $b=0$ のとき母関数 $W_{l/k}(\chi, a, 0)$ は定数 $c_v (v=1, \dots, k)$ を用いて

$$W_{l/k}(\chi, a, 0) = \sum_{v=1}^k c_v u_v^{a+k} \quad (7)$$

と表される。ここで、定数 c_v は (4) 式の行列 V の逆行列における第 v 行第 1 列成分である。行列 V は Vandermonde 型の行列であるから、逆行列は容易に求められる。ちなみに、(3) 式において $k=1$ とした場合に、(3) 式は (1) 式に一致することは言うまでもない。

3. $E_l/E_k/1$ 待ち行列モデル解析への適用

ここでは、到着時間分布として平均 $1/\lambda$ の l -アーラン分布、サービス時間分布として平均 $1/\mu$ の k -アーラン分布を想定し、サービス窓口が一つの場合の $E_l/E_k/1$ 待ち行列モデルの解析に最短格子経路数の母関数の援用を試みる。なお、到着時間分布とサービス時間分布は互いに独立であるとする。このとき、平均 $1/\lambda$ の l -アーラン分布は平均 $1/(l\lambda)$ の独立な指数分布に従う l 個の確率変数の和の分布である。これより到着に関する状態として位相番号 1 から l までの状態を想定すれば、各位相の推移は平均 $1/(l\lambda)$ の独立な指数分布により説明することができる。同様に、サービスに関する状態として k 個の位相の状態を想定するとき、各位相の推移は平均 $1/(k\mu)$ の独立な指数分布により説明できる。ただし、以後の解析での表現の都合上サービスに関する位相番号はサービスの開始から終了に向けて k から 1 へ減少するよう与えるものとする。さて、 $E_l/E_k/1$ 待ち行列モデルを解析するにあたり、つぎに到着する客の到着に関する位相番号 $s (1 \leq s \leq l)$ 、現在サービスを受けている客のサービスに関する位相番号 $m (k \geq m \geq 1)$ および待ち行列長さ n により待ち行列システムの状態 (s, m, n) を定義する。ただし、客の到着は位相番号 $s=l$ の状態からさらに位相が進行した時点で発生し、同時に位相番号 $s=1$ の状態に戻るものとする。また、サービスに関しては位相番号 $m=1$ の状態からさらに位相が進行した時点でサービスが終了し、同時に位相番号 $m=k$ の状態に戻るものとする。ここで、待ち行列システムが状態 (s, m, n) である確率を $p_{s,m,n}$ とし、待ち行列長さが n である確率を P_n で表す。このとき

$$P_n = \sum_{s=1}^l \sum_{m=1}^k p_{s,m,n} \quad (8)$$

である。

上記の仮定および定義のもとで、 $E_l/E_k/1$ 待ち行列モデルでの客の到着と退去の履歴を格子経路表現を用いて表すことを考える。ただし、上記のように到着時間分布またはサービス時間分布

としてアーラン分布が想定される場合、それぞれの位相の進行を状態推移の最小単位として捉えるべきである。よって、客の到着と退去の履歴を格子経路表現を用いて表す場合に以下の二つの事象

A: つぎに到着する客の位相が一つ進行する

D: サービスに関する位相が一つ進行する

を定義する。このように位相の進行を状態推移の最小単位として捉えるとき、 $E_l/E_k/1$ 待ち行列モデルの状態推移をマルコフ過程として捉えることができる。ここで、 $n=0$ の場合には事象 A が確率 1 で生じ、事象 D の生起確率は 0 である。ただし、最短格子経路数の母関数を用いる場合に状態推移確率が一定であることを必要とするためここでは $n \geq 1$ の場合に限定して考えると、指数分布の無記憶性より上記の互いに独立な二つの事象のうちどちらかが生じたとき、それが事象 A である確率 α は

$$\alpha = \frac{l\lambda}{l\lambda + k\mu} \quad (9)$$

で与えられ、一方それが事象 D である確率 β は

$$\beta = \frac{k\mu}{l\lambda + k\mu} \quad (10)$$

で与えられる。以上により、ここでの状態推移の履歴は $n=0$ の状態を吸収状態として、 x 軸に初期状態からのサービスに関する累積位相進行回数、 y 軸に初期状態からの到着に関する累積位相進行回数にとることにより与えることができる。ここで、上記のように状態推移確率 α および β を与えたことに対応して、以下ではまず $n \geq 1$ の状態に関して考察する。このため、上記の x - y 平面において原点を状態 $(1, 1, 1)$ で与えることとし、さらに関数

$$y = \frac{l}{k} x \quad (11)$$

を定義する。このとき、 x - y 平面において (11) 式で定義される直線上のすべての格子点 $(\eta, l\eta/k)$ ($\eta \geq 0$) は同一の状態 $(1, 1, 1)$ を与えている。また同様に、整数 a を

$$a = kl(n-1) + l(m-1) + k(s-1) \quad (1 \leq s \leq l, k \geq m \geq 1, n \geq 1) \quad (12)$$

とすると、格子点 $(\eta, (l\eta + a)/k)$ ($\eta, a \geq 0$) はすべて同一の状態 (s, m, n) を表していることになる。また、格子点 $(\eta, (l\eta + a)/k)$ が関数

$$y = \frac{lx + a}{k} \quad (13)$$

の上で定義される連続する格子点を与えることはいうまでもない。

図 1 に $l=4, k=3$ とした場合の (11) 式で制限された領域内での最短格子経路の一例と (13) 式で定義される直線の一例として $a=18$ の場合の直線を与える。このとき、直線上の●はその直線上での格子点を表しており、直線 $y=(4/3)x$ 上での格子点はすべて状態 $(1, 1, 1)$ を与えている。

図 1. 状態推移に関する最短格子経路の一例

また、直線 $y = (4x+18)/3$ 上のすべての格子点は状態 $(3, 1, 2)$ を与えている。さらに、最短格子経路上で×印の格子点 $(5, 14)$ はサービスに関する累積位相進行回数 5 の時点で状態 $(3, 2, 2)$ ，すなわち待ち行列長さ 2 で客の到着に関しては位相番号 3，サービスに関しては位相番号 2 の状態であることを表している。

さて、平衡状態確率 $p_{s,m,n}$ を導出するために (3) 式で与えられる最短格子経路数の母関数を用いて特性量

$$f_{s,m,n} = \sum_{l\eta+a=0 \bmod k} w_{l/k}(\eta, a, 0) \alpha^{\frac{l\eta+a}{k}} \beta^\eta = \alpha^{a/k} W_{l/k}(\alpha^{l/k} \beta, a, 0) \quad (14)$$

を考える。このとき、 $w_{l/k}(\eta, a, 0) \alpha^{\frac{l\eta+a}{k}} \beta^\eta$ がサービスに関する累積位相進行回数が η までの時点で (11) 式の直線を下回ることなく $(\eta, (l\eta+a)/k)$ が与える状態 (s, m, n) に至る条件付き確率を与えることから、この特性量 $f_{s,m,n}$ ($n \geq 1$) は $E_l/E_k/1$ 待ち行列モデルにおける状態推移の履歴を示す最短格子経路が (11) 式の直線を下回ることなく、 $n \geq 1$ の同一の状態 (s, m, n) を表すすべての格子点 $(\eta, (l\eta+a)/k)$ に至る条件付き確率の総和を与えている。さらに、母関数 $W_{l/k}(\alpha^{l/k} \beta, a, 0)$ は (6) 式に基づく方程式

$$\alpha^{l/k} \beta u^{k+1} + 1 - u^k = 0 \quad (15)$$

の原点で解析的な k 個の根 $u_v (v=1, \dots, k)$ を用いて (7) 式により

$$W_{l/k}(\alpha^{l/k} \beta, a, 0) = \sum_{v=1}^k c_v u_v^{a+k} \quad (16)$$

と表すことができる。よって、(16) 式を (14) 式に代入することにより

$$f_{s,m,n} = \alpha^{a/k} \sum_{v=1}^k c_v u_v^{a+k} \quad (17)$$

が与えられる。このとき、 $f_{s,m,n}$ は $n \geq 1$ の条件付き確率の総和であり、(17) 式が有限であるためには $|\alpha^{1/k} u_v| < 1$ でなければならない。 $|\alpha^{1/k} u_v| < 1$ の条件のもとで

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^k \sum_{s=1}^l f_{s,m,n} = \sum_{v=1}^k \frac{c_v u_v^k \{1 - (\alpha^{1/k} u_v)^{kl}\}}{\{1 - (\alpha^{1/k} u_v)^l\} \{1 - (\alpha^{1/k} u_v)^k\}} \quad (18)$$

が定数となることがわかる。既述のように到着またはサービスに関する位相の進行を状態推移の最小単位とする $E_l/E_k/1$ 待ち行列モデルの状態推移をマルコフ過程として捉えることができることに鑑み、(18) 式で与えられる定数を利用して $f_{s,m,n}$ を規準化することで平衡状態確率 $p_{s,m,n}$ を求めることを考える。ただしこの場合、 $f_{s,m,n}$ が $n \geq 1$ の条件付き確率の総和として求められていることを考慮する必要がある。

ここで、窓口が一つの待ち行列モデルにおいては

$$\rho = \lambda / \mu$$

として $n=0$ の場合の平衡状態確率は常に

$$P_0 = 1 - \rho$$

であることが知られている。よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = \rho \quad (19)$$

である。これより、(18) 式が $E_l/E_k/1$ 待ち行列モデルにおいて $n \geq 1$ のすべての状態についての総和であることに鑑み、定数 C を用いて

$$p_{s,m,n} = \frac{1}{C} f_{s,m,n} \quad (20)$$

とにおいて、(19) 式を考慮して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^k \sum_{s=1}^l f_{s,m,n} = \sum_{v=1}^k \frac{c_v u_v^k \{1 - (\alpha^{1/k} u_v)^{kl}\}}{\{1 - (\alpha^{1/k} u_v)^l\} \{1 - (\alpha^{1/k} u_v)^k\}} = \rho C \quad (21)$$

となるよう $f_{s,m,n}$ を規準化することにより平衡状態確率 $p_{s,m,n}$ を求めうる。このとき、定数 C は (21) 式より

$$C = \frac{1}{\rho} \sum_{v=1}^k \frac{c_v u_v^k \{1 - (\alpha^{1/k} u_v)^{k_l}\}}{\{1 - (\alpha^{1/k} u_v)^l\} \{1 - (\alpha^{1/k} u_v)^k\}} \quad (22)$$

である。よって、(17) 式および (20), (22) 式より

$$p_{s,m,n} = \frac{1}{C} \alpha^{a/k} \sum_{v=1}^k c_v u_v^{a+k} \quad (23)$$

が求められる。これより、平衡状態確率 P_n は (23) 式 (8) 式に代入することにより得られる。以上のように、最短格子経路の母関数に関する Sato (1989) の結果を利用することにより Kawamura (1961) の方法に比べてかなり平易に $E_i/E_k/1$ 待ち行列モデルの平衡状態確率の一般式を導出することができる。

4. 提案法による解析例

ここでは、最短格子経路数の母関数に基づく待ち行列モデルの平衡状態確率の導出法によるいくつかの解析例を示し、(8) 式および (23) 式の一般式と既存の解析結果との対応を明らかにする。まずはじめに、提案導出法において $k=l=1$ とおくことによる $M/M/1$ 待ち行列モデルの解析例を示す。このとき、(9), (10) 式より

$$\alpha = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

$$\beta = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

がそれぞれ求められる。また、(15) 式に基づく方程式

$$a\beta u^2 + 1 - u = 0$$

に関して、 $|\alpha u_v| < 1$ を満足する根として唯一根

$$u_1 = 1/\beta \quad (24)$$

を得る。これより、(8), (23) 式を用いて

$$P_n = p_{1,1,n} = \frac{\alpha^a c_1 u_1^{a+1}}{C} \quad (25)$$

が求められる。また、 $k=l=1$ であるから (12) 式より

$$a = n - 1 \quad (26)$$

となり、(24), (26) 式を (22) 式に代入して

$$C = \frac{c_1 u_1}{\rho(1 - \alpha u_1)} \quad (27)$$

が求められる。これより、(24),(27)式を(25)式に代入して

$$P_n = \rho(1 - \rho)\rho^{n-1} = (1 - \rho)\rho^n \quad (28)$$

を得ることができる。(28)式がよく知られた $M/M/1$ 待ち行列モデルの待ち行列長さに関する平衡状態確率であることは明らかである。

つぎに、 $k=1$ の場合として $E_l/M/1$ 待ち行列モデルの解析結果を示す。このとき同様の手順により

$$\alpha = \frac{l\lambda}{l\lambda + \mu} \quad (29)$$

$$\beta = \frac{\mu}{l\lambda + \mu} \quad (30)$$

のもとで、方程式

$$\alpha^l \beta u^{l+1} + 1 - u = 0 \quad (31)$$

を考える。ここで、(29),(30)式から $\alpha + \beta = 1$ かつ $\alpha/\beta = l\rho$ であるので、(31)式は

$$(\alpha u - 1)\{(\alpha u)^l + (\alpha u)^{l-1} + \cdots + \alpha u - l\rho\} = 0$$

のように変形される。このとき、 $|\alpha u_v| < 1$ であるので結局(31)式は

$$\{(\alpha u)^l + (\alpha u)^{l-1} + \cdots + \alpha u - l\rho\} = 0 \quad (32)$$

を満足するただ一つの根をもつことがわかる。よって、この根を u_1 と表すことにより、平衡状態確率

$$p_{s,1,n} = \frac{\alpha^a c_1 u_1^{a+1}}{C}$$

が求められる。ただし、 $k=1$ であるので

$$a = l(n-1) + (s-1)$$

である。よって、(8)式より

$$P_n = \frac{c_1}{C} \frac{\alpha^{l(n-1)} u_1^{l(n-1)+1} (1 - \alpha^l u_1^l)}{1 - \alpha u_1}$$

となる。さらに、(22)式を用いてここでも

$$C = \frac{c_1 u_1}{\rho(1 - au_1)}$$

であるので

$$P_n = (au_1)^{l(n-1)} \{1 - (au_1)^l\} \rho \quad (33)$$

を得る。ここで、(32)式において $z = au$ と書き換えると

$$\{z^l + z^{l-1} + \dots + z - l\rho\} = 0 \quad (34)$$

となり、(34)式のただ一つの根 z_1 は $z_1 = au_1$ と対応することから(33)式も

$$P_n = z_1^{l(n-1)} \{1 - z_1^l\} \rho \quad (35)$$

と表すことができる。(34), (35)式は $E_l/M/1$ 待ち行列モデルの平衡状態確率と同一の式であることがわかる。

さらに、 $E_l/E_k/1$ 待ち行列モデルについて検討する。提案法において l, k の最大公約数を g として

$$\begin{cases} k = gk' \\ l = gl' \end{cases}$$

とする。さらに

$$\begin{cases} \gamma_v = (\alpha^{1/k'} u_v^g)^{l'} \\ \delta_v = (\alpha^{1/k'} u_v^g)^{k'} \end{cases}$$

を定義し、 ε_v を

$$\varepsilon_v = \gamma_v^k = \delta_v^l \quad (36)$$

とおくと、(23)式は

$$p_{s,m,n} = \sum_{v=1}^k \frac{1}{C} c_v u_v^{gk'+gl'} \varepsilon_v^{n-1} \gamma_v^{m-1} \delta_v^{s-1}$$

となる。このとき、 $\frac{1}{C} c_v u_v^{gk'+gl'}$ は定数であるからこれらをまとめて d_v と表すことにより

$$p_{s,m,n} = \sum_{v=1}^k d_v \varepsilon_v^{n-1} \gamma_v^{m-1} \delta_v^{s-1} \quad (37)$$

を得る。また、(9), (10)式より

表 1. $\lambda=3, \mu=4, l=7$ および $k=4$ の場合の平衡状態確率

n	P_n
0	0.2500
1	0.6165
2	0.1034
3	0.0233
4	0.0053
5	0.0012
6	0.0003
7	0.0001
8	0.0000
9	0.0000
10	0.0000

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{l}{k} \rho = \tau$$

とにおいて, (36) 式の関係を用いて (15) 式を書き換えることにより

$$\delta\gamma + \tau - (1 + \tau)\delta = 0 \quad (38)$$

を得る. 以上により求められた (37) 式および (36), (38) 式もまた差分微分方程式を解くことにより得られた $E_l/E_k/1$ 待ち行列モデルの平衡状態確率およびこれを与える関係式 (Kawamura, 1961) に一致する. 以上のように, 本研究で導出された (8) 式および (23) 式の一般式と既存の解析結果との対応が示された.

最後に, 提案法を用いて容易に平衡状態確率を数値的に得ることができることを示すために, $\lambda=3, \mu=4$ として $l=7, k=4$ の場合の平衡状態確率の数値例を表 1 に示す. 既述のように, 本研究で与えられた $E_l/E_k/1$ 待ち行列モデルの平衡状態確率の導出法によると平衡状態確率を与える一般式だけでなく最短格子経路の母関数に関する Sato の結果を利用して極めて容易に数値解を得ることができる.

5. おわりに

本研究では, 組合せ数に基づく待ち行列モデルの行列長さに関する平衡状態確率の導出法について考察した. 具体的には, 従来のシステムの状態推移に関する差分微分方程式を解く待ち行列モデルの解析法とは別に, 最短格子経路数の母関数に基づく新しい解析法を提案し, いくつかの待ち行列モデルの平衡状態確率を導出した. また, 最短格子経路数の母関数に関する各種定義式を用いて待ち行列モデルの平衡状態確率を具体的に求めることができることを数値結果を与えることにより示した.

参 考 文 献

- 古川雅史, 太田 宏 (1984): カタラン数の待ち行列理論への応用に関する一試案, 応用統計学 **13**, 139-144.
- Kawamura, T. (1961): Equilibrium Behaviors of Certain Queueing Systems and Numerical Tables, *General Culture, Keio University* **8**, 1-48.
- Ohta, H., and Furukawa, M. (1985): An Application of Number of Minimal Lattice Paths to the Theory of Queues, *J. Opt. Res. Soc.* **36**, 1117-1124.
- Sato, M., and Cong, T.T. (1983): The Number of Minimal Lattice Paths Restricted by Two Parallel Lines, *Discrete Math.* **43**, 249-261.
- Sato, M. (1989): Generating Functions for the Number of Lattice Paths between Two Parallel Lines with a Rational Incline, *Math. Japonica* **34**, 123-137.
- Takacs, L. (1961): The Probability Law of the Busy Period for Two Types of Queueing Processes, *Oper. Res.* **9**, 402-407.
- Takacs, L. (1962a): A Single-Server Queue with Recurrent Input and Exponentially Distributed Service Time, *Oper. Res.* **10**, 395-399.
- Takacs, L. (1962b): A Generalization of the Ballot Problem and its Application in the Theory of Queues, *J. Am. Statist. Ass.* **57**, 327-377.

(1993年6月1日受付 11月6日最終修正)

著者連絡先: 〒593 堺市学園町 1-1 大阪府立大学工学部経営工学科 有蘭育生