L12 から導かれる 2 水準過飽和 実験の構成

慶応義塾大学理工学部管理工学科 飯田孝久

A Construction Method of Two Level Supersaturated Designs Derived from L12

Takahisa IIDA

要 旨 時間や資源に制限がある場合に、因子数の大きい実験を行う方法に、2 水準の過飽和実験がある。その一つとして、L12 の各列とそれらの 2 列交互作用列に因子を割付ける Wu の計画がある。しかし、この計画では因子間に交互作用が存在した場合に、それらが他の主効果と完全に交絡する場合がある。本論文では、L12 の 11 列に一般平均を加えた 12 列を 6 列ずつの集合に分け、各々の集合から 1 列ずつ取り出した 2 列の間の交互作用列である 36 列からなる計画を提案した。これにより、主効果が他の列と完全に交絡することを避けることができた。また、このような配列が 2 通りあることが L12 の 5 列の同値類から示すことができた。この計画の性質として、内積の平方の平均による評価が、今までに提案された 2 水準過飽和実験と比較してもそれほど悪くないことが確認できた。さらに、因子間に交互作用がありそのような因子については、因子の割付けに工夫すれば、その影響を抑えることができることを示した。これらの性質は、L12 の 3 列および 4 列間の関係の一意性から導くことができた。

1. はじめに

新製品の開発や技術開発の初期の段階においては、多くの因子の中から品質特性に対して影響を与える因子を選び出さなければならない。しかし、時間や資金などの制約のため、大きな実験を行うことはできない。つまり、多くの因子を取り扱える小さな実験を行う必要がある。2 水準の直交計画は、このための一つの方法である。しかし、要因の数が実験数より多ければ、直交実験ではすべての要因を割付けることはできない。このような場合には、2 水準の過飽和実験が有効である。2 水準の過飽和実験とは、各因子が 2 水準で因子の数が実験数より大きい実験のことである。この配列を用いて実験を行うことにより、少ない実験回数で、多くの可能性のある因子を取り扱うことができる。そのため、時間と費用が節約できる。本論文の目的は、L12 の性質を利用し

Key words: Hadamard matrix, Interaction columns, Partial aliasing, Plackett-Burman designs, Screening designs, Supersaturated designs

て、列間の交絡 (§2 で説明する) が弱く、さらに交互作用の影響を軽減できる実験数 12 の 2 水準過飽和実験を構成することにある。候補とする列は、従来の研究と同様に一般平均と直交する 1 と -1 (－と表記する) が同数あるベクトルとする。これは、一般平均が常に説明変数に入ることと考えて、その影響の少ない計画を構成しようとするものである。

これまでにいくつかの 2 水準の過飽和実験が提案されている。Satterthwaite (1959) は、ランダムバランス実験を提案した。例えば 2 水準の場合には、1 と -1 が同数ある列からランダムに列を選択する方法や、各水準が確率 1/2 で 1 と -1 を取る方法などが考えられる。どちらの方法も、構成方法にはバランスがあるが、結果として得られた計画には必ずしもバランスがあるとは限らないという欠点がある。Booth and Cox (1962) は、元の配列 (実験数が 12 の場合は L12) に内積が大きい列を順に付け加えることにより 2 水準の過飽和実験を構成した。実験数 12 の場合については、16, 20, 24 列の 3 通りの計画を構成した。Lin (1993) は、アダマール行列の 1/2 実施計画を提案した。これは、 n 次のアダマール行列から、ある一つの列の水準値によって半分の行を選択する方法である。これにより、実験数が $n/2$ で $n-2$ 列の計画が得られた。実験数が 12 の場合には、24 次のアダマール行列を用いて 22 列の計画が得られた。Wu (1993) は、Plackett-Burman の計画に各列間の交互作用に対応する列を付け加えることにより過飽和実験を構成した。実験数が 12 の場合には、最終的に 66 列からなる計画を構成した。しかし、これらの計画では、各列に因子を割り付けた場合に因子間の交互作用が他の列にどのような影響を与えているかについての考慮はなされていない。

2. L12 から導かれる 2 水準過飽和実験

すでに述べたように、候補とする列は一般平均と直交する列のみである。この中から 2 列選んだとき、その 2 列の近さは内積で表現することができる。これは、すべてのベクトルの長さが等しいためである。内積の絶対値の取り得る値は 0, 4, 8, 12 である。0 が直交の場合で、12 が自分と同じ列 (完全交絡) の場合である。ここでは、4 の場合を弱い交絡、8 の場合を強い交絡と呼ぶことにする。

2.1. L12 の列間の関係

L12 の 2 列交互作用は、その 2 つの列の要素同士の積を要素に持つベクトルである。この元になる 2 列を交互作用列の生成子と呼ぶ。この交互作用列は、L12 のどの列とも一致しない。また、L12 が 2 水準の直交配列であるので、これらの 2 列交互作用列は一般平均と直交する。この性質を利用して、L12 の実験から有意な交互作用を検出しようという試みもある (芳賀 (1990), 宮川・吉田 (1992), Hamada and Wu (1992))。あるいは、これらの列に他の要因を割り付けることも可能である。この場合に、割り付けた要因の主効果やそれらの交互作用効果の間の関連を明らかにするには、L12 の 3 列または 4 列の関係を明らかにする必要がある。

定義 1

2 つの列集合は、その列からなる計画行列が (a) 行の入れ替え (b) 列の入れ替え (c) 各列での水準の入れ替え、によりもう一方の計画行列に変換できるとき **同値**であるという。

定義 2

L12 の始めの k 列で構成される集合を **主 k 列集合**という。

L12 の 3 列または 4 列については、以下の性質がある。

性質 1

L12 の任意の 3 列集合は主 3 列集合に同値である。

系 1

L12 の交互作用列は、生成子以外の列と弱い交絡をする。

性質 2

L12 の任意の 4 列集合は主 4 列集合に同値である。

系 2

L12 の 2 つの交互作用列は、

- a) 生成子の一つ共有していれば直交し、
- b) 共通の生成子がない場合は弱い交絡をする。

性質 1, 2 は補足 A で説明してある。a 列×b 列で第 a 列と第 b 列の交互作用列を表すとき、系 1 は 1 列×2 列と 3 列の、系 2a は 1 列×2 列と 1 列×3 列の、系 2b は 1 列×2 列と 3 列×4 列の内積を計算すればよい。また、1 列×2 列と 1 列との内積を計算することにより、L12 の任意の交互作用列は生成子に相当する列と直交することがわかる。

1 とーが 6 ケ所ずつある列ベクトルは全部で 924 通りである。これらを L12 の列との関係により分類する。L12 のある列と完全に交絡するものは L12 自身の 11 列を含めて 22 列ある。L12 の 1 つの列と強い交絡をするものは 36 列あるので、L12 の列のどれかと強い交絡をするものは 792 列ある。残りは 110 列であるが、これらはすべて L12 の交互作用列とそれらの水準入れ替えて表現できるベクトルに限られることがわかる。これより、次の性質が示される。

性質 3

一般平均と直交する列で、L12 のどの列とも強い交絡をしないものは、L12 の 2 列交互作用の列に限られる。

これより、L12 にそれらの列間の交互作用列を追加することにより、どの 2 列も高々弱い交絡しかない 2 水準過飽和実験を構成することができる。これは、Wu (1993) が構成した計画である。また、L12 の 11 列を含み一般平均と直交する列で構成され、どの 2 列も高々弱い交絡しかない 2 水準過飽和実験は、これに限られることがわかる。しかし、Wu は性質 3 やこの一意性については言及していない。

2.2. 新しい計画の構成

Wu (1993) が提案した、L12 とその全ての 2 列交互作用列からなる 2 水準過飽和実験は、実験数 12 に対して 2 水準因子を最大 66 取り込むことができるので、因子のスクリーニングの段階においては有効な実験である。しかし、因子間に交互作用がある場合には、それが他の因子と完全に交絡することがあるので、因子の割付けや結果の解析に注意する必要がある。ここでは、列間の交互作用が他の列と完全に交絡するのを避けるため、以下の方法により新しい計画を構成する。

新しい計画の構成方法

- 1) L12 の 11 列に一般平均を加えて 12 列とする。
- 2) これを 6 列ずつの 2 つの集合 A と B に分ける。
- 3) A と B から 1 列ずつ取り出して、2 列交互作用列を作る。
- 4) これら 36 列からなる計画を構成する。

このように構成すれば、2 列交互作用が他の列と完全に一致することを避けることができる。これは、次のように示される。2 つの列が共通の生成子を持たない場合は、2 列交互作用は L12 の 4 列交互作用となり、他の列に一致することはない。2 列が生成子を共有する場合は、それらを $(\alpha\beta)$ $(\alpha\gamma)$ とすると、これらの 2 列交互作用は $(\beta\gamma)$ となる。計画の構成方法から、 β と γ は同じ集合に属しているので、これに対応する列は計画の中にはない。したがって、この方法で計画を構成すれば、列間の交互作用が他の列と完全に交絡するのを避けることができる。

計画の構成において、一般平均が含まれている側の集合は L12 から 5 列を選んでいるが、L12 から 5 列選ぶのには 2 通りある（補足 B 参照）ので、計画も 2 通りある。そのうちの一方による計画が表 1 である。これは、一般平均の含まれる側に L12 の第 1~4 列と 6 列を入れた場合の計画である。各列は、その上に書いてある記号を生成子とする 2 列交互作用となっている。ただし、0 は一般平均を、A と B は第 10, 11 列を表すものとする。

もう一方の計画が表 2 である。この計画は、一般平均の含まれる側に L12 の第 1~5 列を入れた場合の計画である。第 1 行はすべて 1 で第 2 行はすべて -1 となっている。したがって、タグチメソッドにおけるいわゆる「誤差因子の調合」を含んだ計画を与えることができる。誤差因子の調合とは、誤差因子の水準組み合わせとして、特性値に対してプラス側に働く水準同士の組み合わせと、マイナス側に働く水準同士の組み合わせの 2 通りのものを考えることをいう。

また、12 列の分け方を変えることにより異なった計画を構成することができる。例えば、12 列を 2 列と 10 列に分ければ、20 列からなる計画を構成できる。

2.3. 新しい計画の性質と割り付けの指針

ここで提案した計画は、66 列から成る Wu の計画の部分計画である。この計画の 2 列の関係については、系 1 と系 2 より次の性質を導くことができる。

性質 4

提案した計画の 2 列は、その 2 列の生成子に同じものがあれば直交し、同じものがなければ弱い交絡をする。

このことより、この計画を用いて因子を割り付けたとき、その主効果同士は直交するか弱い交絡をすることがわかる。したがって、主効果が他の主効果に及ぼす影響は小さいと考えられる。

一方、ここで提案した計画の 2 列の交互作用は、L12 においては最大で 4 列の交互作用になるので、これと他の主効果とは強い交絡をする可能性がある。しかし、性質 1, 2 より次のことがいえる。

性質 5

提案した計画の生成子を共有する 2 列の交互作用は、他の列とは高々弱い交絡しかない。

(証明)

生成子を共有する列間の交互作用は、残りの 2 つの生成子で表される交互作用列となる。したがって、この列と他の列との関係は、それらの生成子の中に一般平均が含まれる場合は性質 1 より、そうでない場合は性質 2 より、高々弱い交絡しかない。(証明終)

この性質より、交互作用がありそうな因子は生成子を共有する所に割り付ければよい。表 1, 2 では 36 列が片方の生成子が共通な 6 列ずつのブロックになっているので、交互作用がありそうな因子は同じブロックに割り付けられればよい。こうすれば、交互作用効果が他の主効果に与える影響を小さく押さえることができる。

表 1. 新しい計画 (1)

	050708090A0B	151718191A1B	252728292A2B	353738393A3B	454748494A4B	656768696A6B
1	1 1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1
2	1 - - - - -	1 - - - - -	1 - - - - -	1 - - - - -	1 - - - - -	- 1 1 1 1 1
3	- 1 1 - - -	- 1 1 - - -	- 1 1 - - -	1 - - 1 1 1	1 - - 1 1 1	- 1 1 - - -
4	- - - 1 1 -	- - - 1 1 -	1 1 1 - - 1	- - - 1 1 -	1 1 1 - - 1	- - - 1 1 -
5	- 1 - 1 - 1	- 1 - 1 - 1	1 - 1 - 1 -	1 - 1 - 1 -	- 1 - 1 - 1	1 - 1 - 1 -
6	1 - 1 - 1 1	1 - 1 - 1 1	- 1 - 1 - -	- 1 - 1 - -	- 1 - 1 - -	- 1 - 1 - -
7	1 - - 1 - 1	- 1 1 - 1 -	1 - - 1 - 1	- 1 1 - 1 -	- 1 1 - 1 -	1 - - 1 - 1
8	- - 1 1 1 -	1 1 - - - 1	- - 1 1 1 -	1 1 - - - 1	- - 1 1 1 -	1 1 - - - 1
9	- 1 - - 1 1	1 - 1 1 - -	- 1 - - 1 1	- 1 - - 1 1	1 - 1 1 - -	1 - 1 1 - -
10	1 1 - - 1 -	- - 1 1 - 1	- - 1 1 - 1	- - 1 1 - 1	1 1 - - 1 -	1 1 - - 1 -
11	1 1 1 1 - -	- - - - 1 1	- - - - 1 1	1 1 1 1 - -	- - - - 1 1	- - - - 1 1
12	- - 1 - - 1	1 1 - 1 1 -	1 1 - 1 1 -	- - 1 - - 1	- - 1 - - 1	- - 1 - - 1

表 2. 新しい計画 (2)

	060708090A0B	161718191A1B	262728292A2B	363738393A3B	464748494A4B	565758595A5B
1	1 1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1
2	- - - - - -	- - - - - -	- - - - - -	- - - - - -	- - - - - -	- - - - - -
3	1 1 1 - - -	1 1 1 - - -	1 1 1 - - -	- - - 1 1 1	- - - 1 1 1	- - - 1 1 1
4	1 - - 1 1 -	1 - - 1 1 -	- 1 1 - - 1	1 - - 1 1 -	- 1 1 - - 1	- 1 1 - - 1
5	- 1 - 1 - 1	- 1 - 1 - 1	1 - 1 - 1 -	1 - 1 - 1 -	- 1 - 1 - 1	1 - 1 - 1 -
6	- - 1 - 1 1	- - 1 - 1 1	1 1 - 1 - -	1 1 - 1 - -	1 1 - 1 - -	- - 1 - 1 1
7	1 - - 1 - 1	- 1 1 - 1 -	1 - - 1 - 1	- 1 1 - 1 -	- 1 1 - 1 -	1 - - 1 - 1
8	- - 1 1 1 -	1 1 - - - 1	- - 1 1 1 -	1 1 - - - 1	- - 1 1 1 -	1 1 - - - 1
9	- 1 - - 1 1	1 - 1 1 - -	- 1 - - 1 1	- 1 - - 1 1	1 - 1 1 - -	1 - 1 1 - -
10	1 1 - - 1 -	- - 1 1 - 1	- - 1 1 - 1	- - 1 1 - 1	1 1 - - 1 -	1 1 - - 1 -
11	- 1 1 1 - -	1 - - - 1 1	1 - - - 1 1	- 1 1 1 - -	1 - - - 1 1	- 1 1 1 - -
12	1 - 1 - - 1	- 1 - 1 1 -	- 1 - 1 1 -	1 - 1 - - 1	1 - 1 - - 1	- 1 - 1 1 -

3. 計画の評価

ここで提案した計画を従来の計画と比較する。評価基準は、Booth and Cox (1962) や Lin (1993) 等と同様に列間の内積の平方の平均を用いる。列間の内積の平方は、主効果同士の交絡度をはかる尺度である。また、その 2 列のみに効果があるときの推定量の誤差分散は、内積の値を s とするとき、 $1/(144-s^2)$ に比例する。したがって、列間の内積の平方の値が小さいほどよい計画であると判断することができる。ここでは、この値の平均を計画の評価に用いる。提案した計画についての評価値は以下ようになる。

提案した計画の内積の平方の平均値

一般平均を含めた 12 列を、共通の要素を持たない k 列と m 列 ($k+m \leq 12$) の 2 つの集合に分ける。これらから構成される計画では、ある 1 列は生成子を共有する $k+m-2$ 列と直交し残りの $(k-1)(m-1)$ 列と弱い交絡をするので、評価値は $16(k-1)(m-1)/(km-1)$ である。 $k=m=6$ のときは約 11.43 である。

表 3. 各計画の評価値 (内積の平方の平均値)

列 数	BC	Lin	Wu	Iida
16	7.06	6.27	6.00	7.47
18		6.59	6.59	7.53
20	9.68			7.58
22		6.86	7.40	
24	10.26		8.17	9.74
27				9.85
30			8.94	
32				10.84
35				11.29
36			9.83	11.43

(注 1) ランダムバランス実験の評価値は 13.09 である

(注 2) BC=Booth & Cox

(注 3) BC の値は, Booth & Cox (1962) による

Lin の値は, Lin (1993) による

Wu の値は, Wu (1993) による

従来の計画と新しい計画の評価値を表 3 に示す。

提案した計画では, 交互作用との交絡を避けたため, Lin や Wu の計画と比べて評価値が悪くなっている。しかし, 表の値を見ればわかるように, それほど悪いわけではない。平方和のみた影響の大きさの平均は 8% 程度である (11.43/144) ので, 実用上は十分であると思われる。今後は, 交互作用の影響を考慮した評価基準を考える必要がある。

4. 結 論

ここで提案した実験数 12 の 2 水準過飽和実験の計画は, アダマール行列の半分実施計画より列数が多い。また, Wu の計画より交互作用効果に対して配慮している。列同士の交絡の度合いはこれらの計画より少し劣っているが, 実験の初期の段階における因子のスクリーニングに有効な計画であると思う。主効果が他の主効果に及ぼす影響は小さく, 因子の割り付けに注意すれば 2 因子交互作用が主効果に及ぼす影響も小さく押さえることができる。

謝 辞 有益なコメントを与えてくれたレフリーに感謝します。

参 考 文 献

- Booth, K.H.V. and Cox, D.R. (1962): Some Systematic Supersaturated Designs. *Technometrics* 4, 489-495.
 芳賀, 野沢, 江川(1990): L12 などから交互作用を見付ける方法, 第 20 回品質管理学会研究発表会予稿, 41-44.
 Hamada, M. and Wu, C.F.J. (1992): Analysis of Designed Experiments with Complex Aliasing. *Journal of Quality Technology* 24, 130-137.
 Lin, D.K.J. (1993): A New Class of Supersaturated Designs. *Technometrics* 35, 28-31.

- 宮川, 吉田 (1992): L18 直交配列表における交互作用の出現パターンと割りつけの指針. 品質 22, 12-18.
 Satterthwaite, F.E. (1959): Random Balance Experimentation. *Technometrics* 1, 111-137.
 Wu, C.F.J. (1993): Construction of Supersaturated Designs through Partially Aliased Interactions, *Biometrika* 80, 661-669.

補 足

A. L12 の 4 列の同値性

L12 の任意の 3 列が主 3 列集合に同値であることは明らかである。ここでは、4 列の関係について説明する。

始めの 2 列の水準組合せにより、12 行を 3 行ずつの 4 ブロックに分ける。すなわち、第 1, 2 列の水準組合せが (1, 1) (1, -) (-, 1) (-, -) である部分をそれぞれ第 1~4 ブロックとする。3 列目以降は、第 1 ブロックで 2 度現れる水準を 1 とする (必要ならば水準の入れ替えを行う)。ここで、3 列目と 4 列目の内積を考える。各ブロックでの内積は 3 か -1 である。3 列目と 4 列目の内積は 0 (直交) なので、3 が 1 ケ所で -1 が 3 ケ所ある。内積が 3 のブロックは、3 列目と 4 列目の水準が一致しているので、これを 3 列と 4 列の一致ブロックと呼ぶ。すべての列についてこのブロックで多く現れている水準を 1 とする変換を行い、必要ならばブロック内で行の順番を変えることにより、この 4 列が主 4 列集合に変換される。したがって、L12 の任意の 4 列は主 4 列集合に同値である。

B. L12 の 5 列の関係

3 列と 4 列の一致ブロックと、3 列と 5 列の一致ブロックが同じ場合には、4 列と 5 列の一致ブロックも同じブロックになる。この場合、このブロックで多く現れる水準を 1 とする変換を行い、必要ならばブロック内で行の入れ替えを行えば、主 5 列集合に変換できる。

3 列と 4 列の一致ブロックと、3 列と 5 列の一致ブロックが異なる場合には、4 列と 5 列の一致ブロックはどちらも異なるブロックになる。この場合には、どの一致ブロックにもなっていない部分が第 4 ブロックになるように水準変換し (第 1, 2 列は -、その他の列は多く現れる水準を 1 とする)、必要ならばブロック内で行の入れ替えと 3, 4, 5 列の入れ替えを行うことにより、L12 の第 1, 2, 3, 4, 11 列に変換できる。これは、簡単な変換により L12 の第 1, 2, 3, 4, 6 列に同値であることがわかる。

この 2 つの場合が同値でないことは、前者の場合にはある水準組合せが 2 度現れるのに対して、後者ではすべての水準組合せが異なることからわかる。

以上より、L12 から 5 列選ぶのは 2 通りあることがわかる。

(1993 年 10 月 22 日受付 1995 年 1 月 13 日最終修正)

著者連絡先: 〒 223 横浜市港北区日吉 3-14-1 慶応義塾大学理工学部管理工学科