カテゴリカルデータの散布度について

統計数理研究所 鈴木 義一郎

Some Concept of Dispersion Measure for Categorical Data

Giitiro SUZUKI

要 旨 順序尺度のあるカテゴリカルデータに対して、隣あったカテゴリー間には1, 2つ離れていれば2というように数値を与えてやれば、「平均差」に対応するもので散布度の尺度を与えることができる。また名目尺度のデータに対しては、異なるカテゴリー間全てに1の距離があるものと解釈すれば、同様の散布度の尺度が定義できる。

『日本人の国民性調査』のデータを例に、これらの尺度が質問に対する回答パターンの相違を端的にはじきだすのに有用であることを示す。なお順序尺度の場合には、標準偏差とほぼ同じような値をとるが、平方値をとらないので、標準偏差よりも散布パターンを的確に与える尺度であることも示される。

さらに、大相撲のデータなどの分析に対しても、これらの尺度が有用であることを示す。また、大相撲の各力士の勝相撲での決り手のパターンなどのように、カテゴリーの数が多いデータの散布度を捉えるときなどには、名目尺度のデータに対する散布度を多少修正して用いるほうがよいという事例も紹介する。

1. 順序尺度データの散布度

n 個のデータ $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ に対して

$$d = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j|$$

によって定義されるものが、Gini (1913) によって導入された「平均差」である。標準偏差が平均からのずれの平均であるのに対して、この平均差のほうは各データ間のずれの平均である。

順序尺度のカテゴリカルデータが与えられている場合に、 i 番目のカテゴリーの観測度数を f_i とする ($i=0, 1, \dots, m$)。隣あったカテゴリー間の距離を1と考えると

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j| \Leftrightarrow \sum_{i \neq j}^m |i - j| f_i f_j$$

といった対応になる。

そこで、次のような第1, 第2累積度数を定義する。

Key words: mean difference, dispersion measure, ordinal or nominal-scale data, Japanese Nationality, OUZUMOU data (Professional Japanese Wrestling).

$$g_j = \sum_{i=j}^m f_i \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

$$h_k = \sum_{j=k}^m g_j = \sum_{j=k}^m \sum_{i=j}^m f_i = \sum_{i=k}^m \sum_{j=k}^i f_j = \sum_{i=k}^m (i-k+1)f_i \quad (k=1, 2, \dots, m).$$

すると

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{j+1}^m (i-j)f_i f_j = \sum_{j=0}^{m-1} f_j \sum_{j+1}^m (i-j)f_i \\ &= \sum_{k=1}^m f_{k-1} \sum_{i=k}^m (i-k+1)f_i = \sum_{k=1}^m f_{k-1} h_k \end{aligned}$$

であるから

$$v = \frac{2}{n(n-1)} u, \quad n = \sum_{j=0}^m f_j$$

で与えられるものが、順序尺度データの散布度を表わすことになる。

さらに、絶対差の代わりに差の平方を考えてみると

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j}^m (i-j)^2 f_i f_j &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (i-j)^2 f_i f_j \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (i^2 - 2ij + j^2) f_i f_j \\ &= \sum_i i^2 f_i \sum_j f_j - 2 \sum_i i f_i \sum_j j f_j + \sum_j j^2 f_j \sum_i f_i \\ &= 2n \sum_{i=1}^m i^2 f_i - 2 \left(\sum_{i=1}^m i f_i \right)^2 = 2n^2 s^2 \end{aligned}$$

ここで

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^m i^2 f_i - \left[\frac{1}{n} \sum_{i=0}^m i f_i \right]^2$$

表 1. 親族と過ごす (国民性調査 平成 5 年)

	①	②	③	④	v	s
男	194	516	73	41	0.694	0.722
女	248	606	81	39	0.673	0.700
計	442	1,122	154	80	0.683	0.710
20~24	20	104	13	7	0.575	0.649
25~29	33	82	16	9	0.780	0.779
30~34	21	97	19	6	0.624	0.665
35~39	34	106	11	4	0.571	0.620
40~44	49	163	17	12	0.633	0.687
45~49	57	121	19	8	0.709	0.718
50~54	42	106	20	6	0.691	0.701
55~59	43	111	10	7	0.638	0.679
60~64	59	107	10	9	0.715	0.734
65~69	42	54	11	6	0.831	0.808
70~	42	71	8	6	0.735	0.743

① 必ず過ごしたいと思う

② できれば過ごしたいと思う

③ あまり過ごしたいとは思わない

④ 過ごしたいとは思わない

は、カテゴリーが順次 $0, 1, \dots, m$ という数値をとるものとしたときの通常の標本分散に他ならない。したがって、この平方根（つまり標準偏差）が順序尺度データの散布度を表わすとみなすこともできる。

表1は、『日本人の国民性調査』で、「お盆の頃、いつもは別々に住んでいる親族と一緒に時を過ごしたいと思いますか」という質問に対する回答パターンを性別と年齢別に集計した結果である（統計数理研究所国民性調査委員会（1994））。右端の2列に v と s の値を示してみたが、両者はほぼ似たようなパターンで変動していることが分かる。ただ、 v の値では、40～44歳より55～59歳のグループの方が高い。一方 s の値では大小関係が逆転している。これは、最も離れたカテゴリーである①と④での度数の積が40～44歳で588、55～59歳で301のように差が大きい。このケースで、カテゴリー間の相違を v では $|1-4|=3$ 、 s では $(1-4)^2=9$ という値で評価しているために生じた“逆転劇”である。カテゴリーの数がさらに大きくなると、平方差による評価が離れたカテゴリーを不当に離れさせてしまう傾向が顕著になる。

そこで図1に、両グループのパターンの違いをパーセント表示してみた。感覚的にみると、40～44歳グループのほうがやや集中していると思われるので、 s より v というスコアのほうが数値も小さく適当なように思われる。

男女別では、回答の散布度はほとんど変わらない（図2参照）。年齢別では、35～39歳階級の v の値が最小で、②のカテゴリーに3分の2の回答が集中しているためである。反対に v の値が大きいのは65～69歳階級で、両グループでの回答の散布パターンの相違を示してみたのが図3であ

図1. 40～44歳と55～59歳の相違

図2. 男と女の解答パターン

図3. 35～39歳と65～69歳の相違

る。65～69 歳階級は親戚と過ごしたいという思いが強くなる年代で、カテゴリ①への比率が高くなる。また一方では、③、④への回答も 40～44 歳グループより高く、意識が多様化している傾向もみられる。ともあれ v の値で 0.26 もの差があると、散布度はかなり異なることが分かる。

2. 名目尺度のカテゴリカルデータの場合

次に、名目尺度のカテゴリカルデータが与えられている場合を考える。順番はないが、便宜上カテゴリに番号を付して、 i カテゴリの観測度数を f_i とする ($i=1, 2, \dots, m$)。カテゴリ間には距離のようなものがないから

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j| \Leftrightarrow \sum_{i \neq j}^m f_i f_j = n^2 - \sum_{i=1}^m f_i^2 \quad \left(n = \sum_{i=1}^m f_i \right)$$

のように考えると

$$D = 1 - \left(\sum_{i=1}^m f_i^2 \right) / n^2$$

といったものが平均差に対応する散布度と解釈できる。

カテゴリの数が m 個あり、それらのカテゴリに属する確率が $p_1, p_2, \dots, p_m$ のように与えられているとする。観測個数が n の場合に、 $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ という観測度数ベクトルは

$$\begin{aligned} p_{n,m}(f) &= p_{n,m}(f_1, f_2, \dots, f_m) \\ &= \frac{n!}{f_1! f_2! \cdots f_m!} p_1^{f_1} p_2^{f_2} \cdots p_m^{f_m} \\ &= \{n p_i / f_i\} p_{n-1,m}(f_1, f_2, \dots, f_i - 1, \dots, f_m) \\ &= \{n(n-1) / f_i(f_i-1)\} p_i^2 p_{n-2,m}(f_1, f_2, \dots, f_i - 2, \dots, f_m) \end{aligned}$$

という多項分布に従う。

そこで

$$1 \leq f_i \leq n, 1 \leq f_j \leq n \quad (j \neq i), \quad f_1 + f_2 + \cdots + f_m = n$$

を満足する全ての整数値の組合せについての和を $\sum_1$ とすると

$$\begin{aligned} E\{f_i\} &= \sum f_i \cdot p_{n,m}(f_1, f_2, \dots, f_m) \\ &= n p_i \sum_1 p_{n-1,m}(f_1, f_2, \dots, f_i - 1, \dots, f_m) = n p_i \end{aligned}$$

同様に

$$2 \leq f_i \leq n, 2 \leq f_j \leq n \quad (j \neq i), \quad f_1 + f_2 + \cdots + f_m = n$$

を満足する組合せの和を $\sum_2$ とすると

$$\begin{aligned} E\{f_i(f_i-1)\} &= \sum f_i(f_i-1) \cdot p_{n-2,m}(f_1, f_2, \dots, f_m) \\ &= n(n-1) p_i^2 \sum_2 p_{n-2,m}(f_1, f_2, \dots, f_i - 2, \dots, f_m) \\ &= n(n-1) p_i^2 \end{aligned}$$

であるから

$$E\{f_i^2\} = E\{f_i\} + E\{f_i(f_i-1)\} = n^2 p_i^2 + n p_i(1 - p_i)$$

表 2. 人のくらし方 (日本人の国民性調査 平成 5 年)

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	d	
男	323	55	695	363	126	90	28	44	0.748	
女	307	44	794	593	99	66	35	76	0.729	
計	680	99	1,489	956	225	156	63	120	0.740	
20~24	47	10	162	58	12	3	4	7	0.661	① 一生懸命働き金持ちになる
25~29	55	11	131	58	12	7	1	5	0.710	② まじめに勉強し名をあげる
30~34	54	8	154	61	7	10	3	13	0.688	③ 自分の趣味にあった暮らし
35~39	52	10	133	89	16	11	7	11	0.759	④ クヨクヨせずのんきに暮らす
40~44	96	10	205	97	21	19	10	21	0.737	⑤ 清く正しく暮らす
45~49	74	10	178	95	23	18	9	15	0.724	⑥ 社会のために全てささげる
50~54	62	8	149	79	30	14	11	13	0.779	⑦ その他 (記入)
55~59	65	11	128	86	29	25	7	13	0.785	⑧ D.K.
60~64	51	8	123	132	29	16	5	9	0.767	
65~69	37	5	65	89	28	15	3	5	0.772	
70~	36	9	61	112	18	18	3	8	0.727	

$$E\{\sum f_i^2\} = \sum E\{f_i^2\} = n^2 \sum p_i^2 + n(1 - \sum p_i^2)$$

これより、統計量 D の期待値は

$$E\{D\} = 1 - \frac{1}{n^2} E\{\sum f_i^2\} = \frac{n-1}{n} \{1 - \sum p_i^2\}$$

この値は $n \rightarrow \infty$ とすると

$$\delta = \{1 - \sum p_i^2\}$$

に近づくから、これが母集団の散布度を表わすパラメータであると解釈できる。従って、

$$d = \frac{n}{n-1} D = \{n - (\sum f_i^2)/n\} / (n-1)$$

が σ に対する不偏推定量となる。

表 2 も日本人の国民性調査で、人のくらし方に関する質問の回答パターンを性別と年齢別に集計した結果である。最終列に d の値を示してみた。男女別では、回答の散布度はそれほど違わな

図 4. 20~24 歳と 55~59 歳の相違

図 5. 65~69 歳と 55~59 歳の相違

い。ただし内容の違いには言及していない。年齢別では、20～24 歳階級で d の値が最小で、③の趣味にあった暮らしを志向するタイプが半分以上いるためである。反対に d の値が大きいのは 55～59 歳階級で、暮らし方が多様化する年代である。

20～24 歳と 55～59 歳のグループでの回答の散布パターンの相違を示してみたのが図 4 である。 d の値で 0.124 もの差があると、散布度はかなり異なることが分かる。さらに図 5 には、55～59 歳階級と 65～69 歳階級での相違を示してみた。 d の値では 0.013 しか違いがないので、この程度の差では散布パターンの違いは識別できない。ただ前者での最大の回答は③の「趣味にあった暮らし」であるのに対して、後者では④のカテゴリの「のんきに暮らす」が 1 位を占めているので、回答の内容まで含めてパターンの違いを示してはいたに注意する必要がある。

3. 大相撲のデータへの適用例

表 3 に示したのは、横綱貴乃花が大関になる前 10 場所についての勝敗の系列（1 が勝ち、0 が負け）である（読売新聞社（1990-92）の複数年より集積したデータ）。このデータから、表 4 のような連敗のパターンを作成する。つまり、最初が 0 敗（つまり勝数）、次が単敗、2 連敗、……といった回数を示している。例えば 8 場所前の系列を眺めると、勝ちが 7、単敗が 1 度、2 連敗が

表 3. 貴花田の大関前 10 場所の勝敗系列

場所数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
10	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
9	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1
8	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1
7	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
5	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1
4	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
3	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0

表 4. 貴花田の連敗度のパターン

場所数	0	1	2	3	4	5	ν	s
10	11	2	1				0.505	0.589
9	7	0	0	1	0	1	1.611	1.728
8	7	1	2	1			1.127	1.052
7	14	1					0.133	0.249
6	5	0	1	1	0	1	2.000	1.785
5	9	4	1				0.637	0.623
4	8	2	1	1			0.955	0.954
3	14	1					0.133	0.249
2	10	1	0	0	1		0.803	1.115
1	11	2	1				0.505	0.573

表 5. 3 場所の連敗と連敗度のパターン

場所数	0	1	2	3	4	5	v	s
8	25	3	3	2	0	1	0.934	1.166
7	28	2	2	2	0	1	0.857	1.131
6	26	2	3	2	0	1	0.954	1.168
5	28	2	2	1	0	1	0.790	1.029
4	22	6	3	2	0	1	1.053	1.156
3	31	7	2	1			0.556	0.685
2	32	4	1	1	1		0.599	0.857
1	35	4	1	0	1		0.449	0.725

2 度, 3 連敗が 1 度ある。この表で v の値が 2 と最大になるときは, 2 連敗, 3 連敗, 5 連敗を 1 回ずつしている。反対に, 7 場所前と 3 場所前のように, 単敗が 1 度しかない場合には, v の値は 0.133 のように, 小さな値になる (全勝なら v は 0 になる)。

また表 5 には, 連続した 3 場所の成績をまとめたときの連敗と連敗度のパターンを示してみた。大関になる直前の 5 場所目以降から, 3 場所まとめた成績のパターンでの v の値が 0.6 以下となっていて, 安定した力のついてきたことなどが読みとれる。ただ s の値のほうで眺めてみると, 5 場所前から 3 場所前までのデータに対して小さな値になっている。これは, s^2 の値の計算で差の平方値を用いているために, 4 連敗が 1 度あるということがより大きな値を与える結果になる。その点, 絶対差で評価する v のほうが離れたカテゴリーに余り影響されないので, 特にカテゴリー数が多いようなデータに対しては, v を用いたほうが安全であることが分かる。

次に名目尺度のデータに対する D という尺度も, データ数があまり大きくない場合には少し難点がある。図 6~図 11 は, いろんな力士が勝ったときの決り手の分布パターンである。これらのデータに対して D の値を示してみたが, たとえば貴乃花の図 6 と図 7 に対する D の値はほぼ同じである。しかし 14 勝のうち 5 種類の手を用いるよりも, 80 勝を 17 種類で済ましているほうがむしろ安定しているとも考えられる。また図 9 (双葉山) と図 10 (大鵬) の D の値もほぼ同じだが, 大鵬の散布度のほうが大きい感じがする。つまり D という尺度は, 少ないデータのときには小さめの値を与える傾向のあることが分かる。

表 6. カテゴリー数とウェイト (10,000 回のシミュレーション)

n	NEC	k	D	$\alpha=1/10$	$\alpha=1/8$	$\alpha=1/6$	$\alpha=1/4$	$\alpha=1/2$
5	3.40	3.297	0.618	0.596	0.591	0.583	0.566	0.521
10	5.21	5.230	0.697	0.654	0.643	0.627	0.594	0.509
15	6.59	6.580	0.722	0.665	0.651	0.629	0.588	0.480
20	7.75	7.735	0.735	0.668	0.653	0.627	0.580	0.458
25	8.77	8.769	0.743	0.669	0.651	0.623	0.571	0.441
30	9.69	9.681	0.747	0.667	0.648	0.619	0.563	0.425
40	11.32	11.329	0.754	0.664	0.644	0.611	0.550	0.401
50	12.76	12.782	0.759	0.661	0.639	0.603	0.539	0.383
60	14.06	14.072	0.761	0.659	0.634	0.597	0.530	0.368
80	16.36	16.382	0.764	0.652	0.626	0.586	0.513	0.345
100	18.39	18.389	0.766	0.646	0.619	0.576	0.501	0.328

図 6. 貴乃花の決り手 (平成 8 年初場所)

図 7. 貴乃花 80 勝 (平成 8 年) の決り手

図 8. 曙三連覇 (40 勝) の決り手

図 9. 双葉山 69 連勝の決り手

図 10. 大鵬 45 連勝の決り手

図 11. 千代の富士 53 連勝の決り手

そこで、とり得るカテゴリーの数が多く、データが多くなればより多くのカテゴリーに散らばる傾向があるときには、 $\alpha > 0$ として

$$W_\alpha = r^\alpha D = r^\alpha \left\{ 1 - \left(\frac{\sum_{i=1}^k f_i^2}{n^2} \right) \right\}, \quad r = \frac{k}{n}$$

のように修正した係数を考えてみる。

さて、朝日新聞社 (1997) の 169 ページに、96 年の幕内全取組の決まり手の集計結果が与えられている。それによると、寄り切り 29%、押出し 16% で、この 2 つで全体の 45% を占め、さらに上位 10 種類では全体の 82% になる。全ての力士が同じとは限らないから、第 1、第 2 の手で 6 割、上位 10 種類までで 9 割の確率となるようにすればよさそうであると見当がつけられる。そこで、全部で 70 あるカテゴリーに入る確率を (パーセント表示で)

$$\{42, 18, 10, 6, 4, 2, \dots, 2, 1/3, \dots, 1/3, 1/6, \dots, 1/6, 1/9, \dots, 1/9\}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \lfloor & 5 & \rfloor & \lfloor & 10 & \rfloor & \lfloor & 20 & \rfloor & \lfloor & 30 & \rfloor \end{array}$$

のように与えて、いろいろな n についてのカテゴリー数 (k) と散布度 (D)、そして D に $r^\alpha = (k/n)^\alpha$ を掛けた値を算出する実験の、10,000 回のシミュレーション結果を示したのが表 6 である。なお表 6 の NEC の列には、上記確率分布に対する非 0 のカテゴリー数の期待値が示してある。これは、筆者が鈴木(1997)で理論的に導出した結果で、 k の列の値と対比してみて、シミュレーションがほぼ妥当な結果であることが分かる。

さて k の値を眺めると、 n と共に増大する傾向がみられる。この k の値を実際のデータと比較してみると、図 9 の双葉山や図 10 の大鵬が平均より多めで、図 6 (貴乃花) と図 8 (曙) は平均以下、そして図 7 (貴乃花) と図 11 (千代の富士) はほぼ平均の値であるといったことから、想定した確率の値がほぼ妥当なものであることも分かる。

また、上記の確率に対する δ の値は 0.7738 であり、 $n=100$ のときの D に対するシミュレーション値は 0.766 であるから、

$$\alpha = \frac{n}{n-1} D = \frac{100}{99} \times 0.766 = 0.7737$$

が δ のよい推定値になっていることも確かめられる。ただ n が小さいところでは、 D の値がやや小さめになっていることが分かる。そこで、この D にウェイトを掛けた場合の数値を眺めてみると、 $\alpha=1/2$ とした $r^\alpha = \sqrt{r}$ では n と共に減少してしまうので失格である。比較的 n に左右されないのは、 $\alpha=1/10$ か、 $\alpha=1/8$ としたときのウェイトである。ルートを 3 回とればよいから、 $\alpha=1/8$ を採用して、このときの W_α を

$$W = r^{1/8} D = r^{1/8} \left\{ 1 - \left(\sum_{i=1}^k f_i^2 \right) / n^2 \right\}, \quad r = \frac{k}{n}$$

と置いて、散布度の指標として用いてみる。

図 6～図 11 には、この W の値も示してある。図 7 の W のほうが図 6 より小さく、また図 9 の W も図 10 より小さめになっているから、 W という指標はサンプル数に関係しない散布度を示していると解釈できる。なおシミュレーションの結果から、 W の値が 0.65 を標準値とみなせば、大鵬、次いで双葉山が多彩な技を使うタイプで、千代の富士が標準的、そして (三連覇当時の) 曙と貴乃花が比較的一定の型で勝負をつけるタイプということになる。

なおここで定めたウェイトについては、カテゴリーの数や確率分布の与え方によっても結論が多少変わるかもしれないので、この修正法はあくまでも大相撲の場合に限っていえることをお断りしておく。最後に有益な助言を頂いた査読者の方々に感謝致します。

参 考 文 献

- 朝日新聞社 (1997) : 朝日キーナンバー 新訂第 3 版。
 C. Gini (1913) : Sulla misura della concentrazione e della variabilit dei caratteri, *Atti del R. Istituto Veneto di S.L.A.*, 73.
 鈴木義一郎 (1997) : 多項分布からの標本の非 0-セル (NEC) の分布について JAPLA '97 シンポジウム日本 APL 協会。
 統計数理研究所国民性調査委員会 (1994) : 国民性の研究, 第 9 回全国調査, 統計数理研究所 研究リポート 75.

カテゴリカルデータの散布度について

読売新聞社 (1990-92) : 大相撲 (月刊誌) 1990. 8~1992. 2 (偶数月).

(1997 年 1 月 17 日受付 1998 年 7 月 30 日最終修正)

著者連絡先: 〒 106-0047 東京都港区南麻布 4-6-7 統計数理研究所