二次元確率場の変化点検知に関する 保守的な検定の構成

総合研究大学院大学 二 宮 嘉 行

Construction of Conservative Testing for Detection of Two-way Change-point

Yoshiyuki NINOMIYA

要 旨 本論文では確率場の変化点検知に関する検定を扱う。特に例として、正規分布に従う二元配置のデータにおける交互作用の変化点を取りあげる。このような検定では、帰無仮説のもとで尤度比統計量が、同一の正規分布に従いかつ正の相関をもつ複数の確率変数の最大値となることが多々あり、棄却域を構成するためにはその統計量の裾確率の評価が必要となる。この裾確率の導出は多重積分の数値評価を必要とし、場が大きくなると計算が困難になる傾向をもつ。そこで正確な裾確率を得ることはあきらめ、かわりに裾確率の上限を容易な計算で与えることを考える。これは保守的な検定を構成することを意味する。まず、本来は異なるタイプの裾確率を評価するチューブ法に工夫を加え、今の問題に適応させることによって上限を得る。次に、これと過去の結果である一次 Bonferroni 不等式、改良 Bonferroni 不等式とを組み合わせ、正確な裾確率により近い上限を得る。この手法をチューブ適用法と名付け、Bonferroni 不等式による方法と比較するため、ある正の相関をもつ正規定常確率場の最大値の裾確率と、上で述べた検定統計量の裾確率とを各手法で評価する。そして、特に確率変数間の相関が高い時にチューブ適用法が有効であることを確認する。

1. はじめに

時系列データに変化点問題があるように、添字が多次元となっているデータにも変化点問題が考えられる。広津 (1996) では、行及び列の水準に自然な順序がある二元分割表に交互作用の変化点モデルをたて、臨床試験における至適用量設定問題に応用している。また、Hirotsu (1997) では正規分布に従う二元配置データにも同様の变化点モデルを考えている。また、MacNeill & Jandhyala (1993) では空間データの変化点、変化線問題を、Siegmund & Worsley (1995) では画像データにおける変化点問題を扱っている。

本論文では正規分布に従う二次元確率場の変化点の有無の検定を考える。変化点の位置が未知

Key words: Bonferroni inequality, tube method, upper bound of tail probability

であるとすれば、変化点がないという帰無仮説のもとでの尤度比検定統計量の分布が、標準正規分布に従う複数の確率変数 $\{T_{ij}\}$ の最大値の分布となるような設定が多々考えられる。しかしこの統計量の裾確率 $\Pr(\max_{ij} T_{ij} > c)$ を厳密に求める方法 (Naiman & Wynn (1992) や Hirotsu (1997)) は、多重積分の数値評価を必要とし、場が大きくなると計算が困難になる傾向がある。そこで、チューブ法と呼ばれる方法を適用し、工夫を加え、容易な計算で保守的な検定の構成を可能にすることを考える。ちなみに保守的な検定の構成は Worsley (1982) の提案する改良 Bonferroni 法でも可能である。そして、問題設定の代表として Hirotsu (1997) のモデルを選び、2 節で時系列の変化点モデルとともに紹介する。

チューブ法は、標準正規分布に従う確率変数の集合がある時に、その最大値の裾確率を微分幾何を用いて評価することのできる方法である。ここで、集合の添字は連続集合 Θ の要素であり、その確率変数の集合のサンプルパスは滑らかであるものとする。例えば Θ が $\Theta = [\theta_1, \theta_2]$ という一次元の集合である時は $\Pr(\max_{\tau \in [\theta_1, \theta_2]} T_\tau > c)$ を近似する。この方法は、次元回帰におけるある非線形項の有無の検定問題において Hotelling (1939) によって提案されたものである。その後 Naiman (1986) がこの問題の保守的な検定の構成に応用し、特にそれ以降、様々な設定で用いられ、発展している方法である。例えば Sun (1993) はこの方法を用いて、 Θ に境界がない場合の裾確率 $\Pr(\max_{\tau \in \Theta} T_\tau > c)$ の、閾値 c に関する漸近展開を議論している。

3 節でチューブ法を説明し、4, 5 節で各々時系列、二次元確率場の変化点の有無について保守的な検定を構成する。6 節ではこの問題に対する Worsley (1982) の方法を紹介し、チューブ法と組み合わせることを考える。そして 7 節で簡単なモデルに対して種々の方法で裾確率を評価し、Monte Carlo 法による裾確率の評価と比較することによって提案する方法が有効であることを確認する。

2. 問題の設定

2.1. 時系列の変化点問題

各時点で独立かつ正規分布に従う時系列 $\{X_i, 1 \leq i \leq I\}$ において、次のような変化点モデルを考える。

$$X_i \sim N(\mu_1, 1), 1 \leq i \leq \tau_1; \quad X_i \sim N(\mu_2, 1), \tau_1 + 1 \leq i \leq I; \quad \mu_1 > \mu_2 \quad (1)$$

そして、帰無仮説として変化点はない、つまり $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ という仮説を、対立仮説としてある点 τ_1 で (1) のような変化が起こっている、という仮説をたてる。ただし、 μ_1, μ_2, τ_1 は未知であるとする。すると、尤度比検定統計量は

$$\max_{\tau \in \{1, \dots, I-1\}} \sqrt{\frac{\tau(I-\tau)}{I}} \left(\frac{\sum_{i=1}^{\tau} X_i}{\tau} - \frac{\sum_{i=\tau+1}^I X_i}{I-\tau} \right) \quad (2)$$

となり、これをベクトル表示して $\max_{\tau} \omega_{\tau}^T X$ と書くことにする。ここで、 $\|\omega_{\tau}\|^2 = \omega_{\tau}^T \omega_{\tau} = 1, 1 = (1, \dots, 1)^T$ として $1^T \omega_{\tau} = 0$ となっている。従って有意水準を α とすれば、帰無仮説のもとで $\Pr(\max_{\tau} \omega_{\tau}^T X > c) = \alpha$ を満たす c を求めればそれが棄却限界となる。帰無仮説のもとでは $X_i \sim N(\mu, 1)$ であることより、

$$\omega_{\tau}^T X = \omega_{\tau}^T (X - \mu 1) = \omega_{\tau}^T Z$$

と書けば $\mathbf{Z}=(Z_1, \dots, Z_I) \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_I)$ がいえる. ここで $\mathbf{I}_I$ は $I \times I$ の単位行列を意味する. 結局棄却限界 c は $\Pr(\max_{\tau_1} \omega_{\tau_1}^T \mathbf{Z} > c) = \alpha$ を満たすことになる. この c の厳密な値を求められないならば, 保守的な検定をおこなう, つまり $\Pr(\max_{\tau_1} \omega_{\tau_1}^T \mathbf{Z} > c) \leq \alpha$ となる c を求めるのが通常である. 言いかえると, 裾確率 $\Pr(\max_{\tau_1} \omega_{\tau_1}^T \mathbf{Z} > c)$ の上限を求める問題になる. ただし (2) に関しては, その裾確率の厳密な値を求める高速なアルゴリズムが存在し, Worsley (1986) や Hirotsu *et al.* (1992) などで用いられている.

2.2. 二元配置における変化点問題

Hirotsu (1997) は, 独立に正規分布 $N(\mu_{ij}, 1)$ に従う二元配置のデータ $\{X_{ij}\}$ ($i=1, \dots, I; j=1, \dots, J$) に対して次のような変化点モデルを考えている.

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \theta + \alpha_i + \beta_j + \gamma & (i \leq \tau_1 \text{ かつ } j \leq \tau_2, \gamma > 0) \\ \theta + \alpha_i + \beta_j & (i \geq \tau_1 + 1 \text{ または } j \geq \tau_2 + 1) \end{cases} \quad (3)$$

ここで, $\theta, \alpha_i, \beta_j, \gamma$ や変化点の位置 (τ_1, τ_2) は未知であるとする. 前節と同様の検定を考えると, 尤度比検定統計量は, $\bar{X}_{kl} = \sum_{i \leq k} \sum_{j \leq l} X_{ij} / kl$ として

$$\max_{1 \leq \tau_1 \leq I-1, 1 \leq \tau_2 \leq J-1} \frac{\sqrt{IJ\tau_1\tau_2}}{(I-\tau_1)(J-\tau_2)} (\bar{X}_{\tau_1\tau_2} - \bar{X}_{\tau_1J} - \bar{X}_{I\tau_2} + \bar{X}_{IJ}) \quad (4)$$

のようになる. これをベクトル表示し, つまり $\mathbf{X}$ は X_{ij} を並べたベクトル, $\text{vec}(X_{ij})$, として $\max_{\tau_1\tau_2} \omega_{\tau_1\tau_2}^T \mathbf{X}$ と記す.

$$\omega_{\tau_1\tau_2}^T \mathbf{X} = \omega_{\tau_1\tau_2}^T \text{vec}(X_{ij} - \theta - \alpha_i - \beta_j) = \omega_{\tau_1\tau_2}^T \mathbf{Z}$$

と書けば, 帰無仮説のもとでは X_{ij} は独立に $N(\theta + \alpha_i + \beta_j, 1)$ に従うことより, $\mathbf{Z}=(Z_1, \dots, Z_{IJ}) \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{IJ})$ がいえる. ここで, 最初の等式は ω の定義に従って計算すれば得られる. 統計量の集合 $\{\omega_{\tau_1\tau_2}^T \mathbf{Z}\}$ は, $\|\omega_{\tau_1\tau_2}\|=1$ だからすべて標準正規分布に従い, また, その中の二つの要素 $\omega_{\tau_1\tau_2}^T \mathbf{Z}$ と $\omega_{\tau_1'\tau_2'}^T \mathbf{Z}$ は, 添字 $\tau_1\tau_2$ と $\tau_1'\tau_2'$ が近ければ相関が高くなる.

3. チューブ法

チューブ法は $\|\omega_\tau\|=1, \mathbf{1}^T \omega_\tau = 0$ を満たすベクトル ω_τ の添字 τ が d 次元連続集合 Θ の要素である時の裾確率 $\Pr(\max_{\tau \in \Theta} \omega_\tau^T \mathbf{Z} > c)$ (ただし $\mathbf{Z} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p)$) を評価することのできる方法である. ただし, ω_τ は τ に関して二回微分可能とし, $\{\omega_\tau, \tau \in \Theta\}$ は球面上の滑らかな d 次元多様体とみなせるものとする. これを κ と記す. $\mathbf{Z}$ の各要素 Z_i は他の要素と独立に $N(0, 1)$ に従うから, $\mathbf{Z}/\|\mathbf{Z}\|$ と $\|\mathbf{Z}\|$ は独立となり, 裾確率は

$$\Pr(\max_{\tau \in \Theta} \omega_\tau^T \mathbf{Z} > c) = \int_c^\infty \Pr\left(\max_{\tau \in \Theta} \omega_\tau^T \frac{\mathbf{Z}}{\|\mathbf{Z}\|} > \frac{c}{a}\right) \Pr(\|\mathbf{Z}\| \in da) \quad (5)$$

のように展開される. ここで ω_τ と $\mathbf{Z}/\|\mathbf{Z}\|$ は単位球面 S^{p-1} 上にある. (5) 式右辺の二番目の確率 $\Pr(\|\mathbf{Z}\| \in da)$ は $\|\mathbf{Z}\|^2$ が自由度 p のカイ二乗分布に従うことより求められる. 任意の多様体 κ , 距離 ϕ において, κ からの距離が ϕ 未満となる領域を, κ に対する半径 ϕ のチューブと呼び, $\text{Tube}(\kappa, \phi)$ と記すことにする. ただし, 球面上の二点 u, v 間の距離は $\arccos(u^T v)$ を意味する. 多様体 κ が一次元の場合はチューブは図 1 (左) のように書ける. すると (5) 式右辺の最初の確率

図 1. チューブ領域 (左) と球の和集合の領域 (右)

$\Pr(\max_{\tau \in \Theta} \omega_{\tau}^T \mathbf{Z} / \|\mathbf{Z}\| > c/a)$ は、 $\mathbf{Z} / \|\mathbf{Z}\|$ が $\text{Tube}(\mathbf{x}, \arccos(c/a))$ の中に入る確率といえる。ある領域 A に対し、その体積を $V[A]$ と記すことにする。 $\mathbf{Z} / \|\mathbf{Z}\|$ は単位球面上に一樣に分布されるので、 $\mathbf{Z} / \|\mathbf{Z}\|$ がチューブ領域の中に入る確率は単位球面の体積に対するチューブ領域の体積 $V[\text{Tube}(\mathbf{x}, \arccos(c/a))]$ の割合となる。

境界のない d 次元多様体 x のチューブ領域の体積は次のような Weyl (1939) の公式

$$V_{\text{Weyl}}(x, \phi) = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)} \sum_{e=0, \text{even}}^d x^{[e]} J_e(\phi)$$

で評価される。ここで $m=p-d-1$, $x^{[0]} = V[x]$, $\{x^{[e]}; e=2, 4, \dots\}$ は多様体 x のある積分不変量, $\{J_e(\phi); e=0, 2, 4, \dots\}$ は不完全ベータ関数

$$J_0(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\cos^2 \phi}^1 t^{(d-1)/2} (1-t)^{(m-2)/2} dt$$

$$m(m+2) \cdots (m+e-2) J_e(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\cos^2 \phi}^1 t^{(d-e-1)/2} (1-t)^{(m+e-2)/2} dt; \quad e=2, 4, \dots$$

である。

この Weyl の公式は、チューブの半径 ϕ が十分に小さい時はチューブの体積を正しく与える。しかし (5) 式は大きな半径のチューブの体積も必要とし、Weyl の公式は近似を与えるにとどまるわけだが、Sun (1993) はこれをもとに、裾確率の閾値に関する漸近展開を議論している。

4. 一次元状に並んだ統計量の最大値の裾確率の上限

この節では、標準正規分布に従う統計量の集合 $\{\omega_{\tau_1}^T \mathbf{Z}; \tau_1=1, \dots, I-1\}$ の最大値の分布の裾確率 $\Pr(\max_{\tau_1 \in \{1, \dots, I-1\}} \omega_{\tau_1}^T \mathbf{Z} > c)$ (ただし $\mathbf{Z} \sim N(0, I_p)$) の評価を与える。ここで、 ω_{τ_1} は単位球面 S^{p-1} 上に一次元格子状に並んでいる、言いかえると添字 τ_1^1, τ_1^2 が離れるほど統計量 $\omega_{\tau_1^1}^T \mathbf{Z}, \omega_{\tau_1^2}^T \mathbf{Z}$ 間の相関が小さくなるものとする。これは 2.1 節の時系列の変化点問題で扱われる設定である。

(5) 式が今の場合

$$\Pr(\max_{\tau_1 \in \{1, \dots, I-1\}} \omega_{\tau_1}^T \mathbf{Z} > c) = \int_c^\infty \Pr\left(\max_{\tau_1 \in \{1, \dots, I-1\}} \omega_{\tau_1}^T \frac{\mathbf{Z}}{\|\mathbf{Z}\|} > \frac{c}{a}\right) \Pr(\|\mathbf{Z}\| \in da)$$

となる。単位球面上における中心 ω , 半径 ϕ の球領域を

$$D_{p-1}(\omega, \phi) = \{\mathbf{x}: \mathbf{x}, \omega \in S^{p-1}, \arccos(\mathbf{x}^T \omega) < \phi\}$$

と記せば、上の式の最初の確率は、図 1(右)のような、球の和集合領域 $\bigcup_{\tau_1=1}^{I-1} D_{p-1}(\omega_{\tau_1}, \arccos(c/a))$ の中に $\mathbf{Z}/\|\mathbf{Z}\|$ が入ってくる確率となる。 $\mathbf{Z}/\|\mathbf{Z}\|$ はこの単位球面上の一様分布に従うので、この確率は単位球面の体積に対する $\bigcup_{\tau_1=1}^{I-1} D_{p-1}(\omega_{\tau_1}, \arccos(c/a))$ の体積の割合ということになる。

この球の和集合領域の体積 $V[\bigcup_{\tau_1=1}^{I-1} D_{p-1}(\omega_{\tau_1}, \arccos(c/a))]$ の厳密な値を求めるのは難しく、上限を与えることを考える。まず球の和集合領域の体積のかわりに一つの球の体積の $I-1$ 倍、 $(I-1)V[D_{p-1}(\omega, \arccos(c/a))]$ を与えることが考えられる。これより

$$\Pr(\max_{\tau_1 \in \{1, \dots, I-1\}} \omega_{\tau_1}^T \mathbf{Z} > c) = \int_c^\infty \frac{V[\bigcup_{\tau_1=1}^{I-1} D_{p-1}(\omega_{\tau_1}, \arccos(c/a))]}{V[S^{p-1}]} \Pr(\|\mathbf{Z}\| \in da) \quad (6)$$

$$\leq \int_c^\infty (I-1) \frac{a^{p-1} \exp(-a^2/2)}{2^{p/2}} \left(\int_{c^2/a^2}^1 \frac{\alpha(t)}{\pi^{1/2} \Gamma((p-1)/2)} dt \right) da \quad (7)$$

$$= (I-1) \{1 - \phi(c)\} \quad (8)$$

がいえ、一次 Bonferroni 法と呼ぶことにする。ここで、

$$\alpha(t) = t^{-1/2}(1-t)^{(p-3)/2}, \quad \beta(t) = (1-t)^{(p-4)/2}, \quad \gamma(t) = t^{1/2}(1-t)^{(p-5)/2} \quad (9)$$

である。 $\beta(t)$ と $\gamma(t)$ は後のために定義している。

次に、 $\{\omega_{\tau_1}, 1 \leq \tau_1 \leq I-1\}$ を大円でつないでできる x_1^* を考える。 x_1^* は点 $\omega_1, \omega_2, \dots$ において滑らかなではなく、いわゆる“区分的に滑らかな”多様体といえる。厳密な議論は省略するが、これは滑らかな多様体で限りなく近く近似でき (Takemura & Kuriki (1999) 参照)、 x_1^* のチューブ領域の体積はその滑らかな多様体に対する Weyl の公式を適用することによって評価できる。ちなみに上の記述は x_1^* が自分自身で交わらないことも前提となっている。しかし、その前提がなかったり、実際は $\{\omega_{\tau_1}, 1 \leq \tau_1 \leq I-1\}$ は一次元格子状に並んでいなかったりしても、近似の精度は落ちるものの、以下の理論は適用可能である。同様のことは $\{\omega_{\tau_1 \tau_2}\}$ が二次元格子状に並んでいる 5 節でもいえる。 x_1^* に対するチューブを球の和集合領域のかわりに用いることを考える。前節で述べたように Weyl の公式は一般にはチューブの体積の上限を保証しないが、一次元多様体 x_1 に関しては、 $V_{\text{Weyl}}(x_1, \phi) + V[D_{p-1}(\omega, \phi)]$ がチューブの体積 $V[\text{Tube}(x_1, \phi)]$ の上限を与えることを Naiman (1986) が示している。従って次のような裾確率の不等式

$$\begin{aligned} & \Pr(\max_{\tau_1 \in \{1, \dots, I-1\}} \omega_{\tau_1}^T \mathbf{Z} > c) \\ & \leq \int_c^\infty \frac{V[\text{Tube}(x_1^*, \arccos(c/a))]}{V[S^{p-1}]} \Pr(\|\mathbf{Z}\| \in da) \\ & \leq \int_c^\infty \frac{V_{\text{Weyl}}(x_1^*, \arccos(c/a)) + V[D_{p-1}(\omega, \arccos(c/a))]}{V[S^{p-1}]} \Pr(\|\mathbf{Z}\| \in da) \\ & = \int_c^\infty \frac{a^{p-1} \exp(-a^2/2)}{2^{p/2}} \left\{ \int_{c^2/a^2}^1 \left(\frac{\alpha(t)}{\pi^{1/2} \Gamma((p-1)/2)} + V[x_1^*] \frac{\beta(t)}{\pi \Gamma((p-2)/2)} \right) dt \right\} da \quad (10) \\ & = 1 - \Phi(c) + V[x_1^*] \frac{\phi(c)}{(2\pi)^{1/2}} \end{aligned}$$

が与えられる。ここで $\phi(c)$ と $\Phi(c)$ は各々標準正規分布の密度関数と分布関数である。また、ここで出てくる多様体の体積は、 ω_i と ω_{i+1} をつなぐ大円の体積が $\arccos(\omega_i^T \omega_{i+1})$ であることより、

$$V[x_1^*] = \sum_{i=1}^{I-2} \arccos(\omega_i^T \omega_{i+1})$$

で与えられる。

半径 $\arccos(c/a)$ が大きい時にチューブ法 (10), 小さい時に一次 Bonferroni 法 (7) を用いることを考え, 裾確率の上限を

$$\inf_{c'} \left[\int_{c'}^{\infty} \frac{a^{p-1} \exp(-a^2/2)}{2^{p/2}} \left\{ \int_{c^2/a^2}^1 \left(\frac{\alpha(t)}{\pi^{1/2} \Gamma((p-1)/2)} + V[x_1^*] \frac{\beta(t)}{\pi \Gamma((p-2)/2)} \right) dt \right\} da \right. \\ \left. + \int_c^{c'} \frac{a^{p-1} \exp(-a^2/2)}{2^{p/2}} \left(\int_{c^2/a^2}^1 (I-1) \frac{\alpha(t)}{\pi \Gamma((p-1)/2)} dt \right) da \right] \quad (11)$$

で与えることもできる。内側の積分で a が関わってくるのは積分範囲のところであり, この二重積分の数値計算は実質二回の一重積分の数値計算の計算量でおこなうことができる。ちなみに (11) 式の c' は

$$\int_{c^2/a^2}^1 \left((I-2) \frac{\alpha(t)}{\pi^{1/2} \Gamma((p-1)/2)} - V[x_1^*] \frac{\beta(t)}{\pi \Gamma((p-2)/2)} \right) dt = 0$$

を解く a として得られる。

5. 二次元状に並んだ統計量の最大値の裾確率の上限

この節では, 標準正規分布に従う統計量の集合 $\{\omega_{\tau_1 \tau_2}^T \mathbf{Z}\}$ ($\tau_1=1, \dots, I-1$; $\tau_2=1, \dots, J-1$) の最大値の分布の裾確率 $\Pr(\max_{\tau_1 \in \{1, \dots, I-1\}, \tau_2 \in \{1, \dots, J-1\}} \omega_{\tau_1 \tau_2}^T \mathbf{Z} > c)$ (ただし $\mathbf{Z} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p)$) を, 前節と同様に上から抑えることを考える。ここで, $\omega_{\tau_1 \tau_2}$ は単位球面 S^{p-1} 上に二次元格子状に並んでいるものとする。これは 2.2 節で要求される問題である。(6) 式右辺の分子が今の場合 $V[\cup_{\tau_1=1}^{I-1} \cup_{\tau_2=1}^{J-1} D_{p-1}(\omega_{\tau_1 \tau_2}, \arccos(c/a))]$ となる。

まず, (7), (8) 式で $(I-1)$ を $(I-1)(J-1)$ で置きかえることによって一次 Bonferroni 法を構成することができる。

次にチューブ法を用いることを考える。単位球面上に二次元状に並ぶ点の集合 $\{\omega_{\tau_1 \tau_2}; 1 \leq \tau_1 \leq I-1, 1 \leq \tau_2 \leq J-1\}$ において, $\omega_{\tau_1 \tau_2}$ と $\omega_{\tau_1+1, \tau_2}$, $\omega_{\tau_1 \tau_2}$ と $\omega_{\tau_1, \tau_2+1}$, $\omega_{\tau_1+1, \tau_2}$ と $\omega_{\tau_1, \tau_2+1}$ を直線で結び, 囲まれた三角領域に平面を張る。この“区分的に滑らかな”境界をもつ“区分的に滑らかな”二次元多様体を x_2^* と記す。ただし, 球面上の直線は大円 S^1 を, 球面上の平面は二次元球面 S^2 を意味しているものとする。 x_2^* に対する半径 ϕ のチューブの体積は, Weyl の公式に, ある境界を考慮した項を付け加えたもの, $V_{\partial \text{Weyl}}(x_2^*, \phi) + V_{\text{Weyl}}(x_2^*, \phi)$, によって評価され, チューブの半径 ϕ が十分に小さければこれは体積の厳密な値を与えることになる。Knowles & Siegmund (1989) は Gauss-Bonnet の定理を用い, 曲率の計算なしにこの $V_{\text{Weyl}}(x_2^*, \phi) + V_{\partial \text{Weyl}}(x_2^*, \phi)$ が得られることを示した。そして Ninomiya (2000) は, $V_{\text{Weyl}}(x_2^*, \phi) + V_{\partial \text{Weyl}}(x_2^*, \phi)$ にある項を付け加えることによって, x_2^* に対するチューブの体積の上限を得た。これは Naiman の不等式の拡張といえる。また, その導出は厄介であるものの, その項は小さい値をとることを確認した。そこで本論文では $V_{\text{Weyl}}(x_2^*, \phi) + V_{\partial \text{Weyl}}(x_2^*, \phi)$ が球の和集合領域の体積の近似的な上限を与えるものと考え, 二次元多様体 x_2^* の Euler 標数を $\chi(x_2^*)$, 境界を ∂x_2^* としてこの考え方を用いると, 次のような裾確率の上限の近似

$$\Pr\left(\max_{\tau_1 \in \{1, \dots, I-1\}, \tau_2 \in \{1, \dots, J-1\}} \omega_{\tau_1 \tau_2}^T \mathbf{Z} > c\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_c^\infty \frac{V[\bigcup_{r_1=1}^{l-1} \bigcup_{r_2=1}^{l-1} D_{p-1}(\boldsymbol{\omega}_{r_1 r_2}, \arccos(c/a))]}{V[S^{p-1}]} \Pr(\|\mathbf{z}\| \in da) \\
 &\leq \int_c^\infty \frac{V[\text{Tube}(x_2^*, \arccos(c/a))]}{V[S^{p-1}]} \Pr(\|\mathbf{Z}\| \in da) \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\approx \int_c^\infty \frac{V_{\text{weyl}}(x_2^*, \arccos(c/a)) + V_{\partial \text{weyl}}(x_2^*, \arccos(c/a))}{V[S^{p-1}]} \Pr(\|\mathbf{Z}\| \in da) \\
 &= \int_c^\infty \frac{a^{p-1} \exp(-a^2/2)}{2^{p/2}} \\
 &\quad \left\{ \int_{c^2/a^2}^1 \left(\frac{V[x_2^*] \{((p-3)\gamma(t) - \alpha(t))\}}{\Gamma((p-1)/2) 2\pi^{3/2}} + \frac{V[\partial x_2^*] \beta(t)}{2\pi \Gamma((p-2)/2)} + \frac{\chi(x_2^*) \alpha(t)}{\pi^{1/2} \Gamma((p-1)/2)} \right) dt \right\} da \quad (13) \\
 &= V[x_2^*] \frac{c\phi(c)}{2\pi} + V[\partial x_2^*] \frac{\phi(c)}{2(2\pi)^{1/2}} + \{1 - \Phi(c)\} \chi(x_2^*)
 \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ は (9) で定義されたものである。 $V[\partial x_2^*]$ については、 ∂x_2^* 上の隣り合う二点を $\boldsymbol{\omega}_{r_1}$ と $\boldsymbol{\omega}_{r_2}$ とし、これをつないでできる線分 $\boldsymbol{\omega}_{r_1} \boldsymbol{\omega}_{r_2}$ が境界 ∂x_2^* の一部であるとすれば、この線分の体積は $\arccos(\boldsymbol{\omega}_{r_1}^T \boldsymbol{\omega}_{r_2})$ だから、

$$V[\partial x_2^*] = \sum_{\boldsymbol{\omega}_{r_1}, \boldsymbol{\omega}_{r_2} \in \partial x_2^*} \arccos(\boldsymbol{\omega}_{r_1}^T \boldsymbol{\omega}_{r_2})$$

と求められる。また、 P_{tri} を x_2^* に含まれる、三角領域に張られた平面とし、 $\theta_{\text{sum}}(P_{\text{tri}})$ をその内角の和とする。 P_{tri} は単位球面 S^{p-1} 上にあるから、その体積は $\theta_{\text{sum}}(P_{\text{tri}}) - \pi$ で与えられる。従って

$$V[x_2^*] = \sum_{P_{\text{tri}} \in x_2^*} \{\theta_{\text{sum}}(P_{\text{tri}}) - \pi\}$$

が得られる。(11) 式のように半径 $\arccos(c/a)$ が大きい時にチューブ法 (13)、小さい時に一次 Bonferroni 法 (7) を用いることを考えれば、裾確率の近似的な上限を

$$\begin{aligned}
 \inf_{c'} \left[\int_{c'}^\infty \frac{a^{p-1} \exp(-a^2/2)}{2^{p/2}} \right. \\
 \left. \left\{ \int_{c^2/a^2}^1 \left(\frac{V[x_2^*] \{((p-3)\gamma(t) - \alpha(t))\}}{\Gamma((p-1)/2) 2\pi^{3/2}} + \frac{V[\partial x_2^*] \beta(t)}{2\pi \Gamma((p-2)/2)} + \frac{\chi(x_2^*) \alpha(t)}{\pi^{1/2} \Gamma((p-1)/2)} \right) dt \right\} da \right. \\
 \left. + \int_c^{c'} \frac{a^{p-1} \exp(-a^2/2)}{2^{p/2}} \left(\int_{c^2/a^2}^1 (I-1)(J-1) \frac{\alpha(t)}{\pi \Gamma((p-1)/2)} dt \right) da \right] \quad (14)
 \end{aligned}$$

で与えることができる。この上限を与えることを次元 2 のチューブ適用法と呼ぶことにする。

次に、裾確率の正確な上限を容易に与えるため、球の和集合領域を一次元多様体の集合に関するチューブ領域でおきかえ、Naiman の不等式を用いることを考える。第 i 行の $\{\boldsymbol{\omega}_{r_1 r_2}\}$ を大円をつないだ多様体を $x_i^*[i]$ とすれば

$$\begin{aligned}
 V\left[\bigcup_{r_1=1}^{l-1} \bigcup_{r_2=1}^{l-1} D_{p-1}\left(\boldsymbol{\omega}_{r_1 r_2}, \arccos \frac{c}{a}\right)\right] &\leq \sum_{r_1=1}^{l-1} V\left[\bigcup_{r_2=1}^{l-1} D_{p-1}\left(\boldsymbol{\omega}_{r_1 r_2}, \arccos \frac{c}{a}\right)\right] \\
 &\leq \sum_{r_1=1}^{l-1} V\left[\text{Tube}\left(x_i^*[r_1], \arccos \frac{c}{a}\right)\right] \\
 &\leq \sum_{r_1=1}^{l-1} \left\{ V_{\text{weyl}}\left(x_i^*[r_1], \arccos \frac{c}{a}\right) + V\left[D_{p-1}\left(\boldsymbol{\omega}, \arccos \frac{c}{a}\right)\right] \right\} \quad (15)
 \end{aligned}$$

がいえ、この不等式を (12) 式で用いれば裾確率の上限を与えることができる。この方法を簡易チューブ適用法と呼ぶことにする。

さらに、二重積分以上の数値積分は含まないという制約の下で、つまり計算量をふやさないで、裾確率の厳密な値により近い上限を与えることを考える。第 j 列の $\{\omega_{\tau_1 \tau_2}\}$ を大円でつないだ多様体を $x_c^*[j]$ とする。もし $m+1$ 列をなす任意の球の集合の積集合が空であれば、つまり $I^{(m+1)}$ を集合 $\{1, \dots, J-1\}$ の要素数 $m+1$ の任意の部分集合として

$$\bigcap_{\tau_2 \in I^{(m+1)}} \left(\bigcup_{\tau_1=1}^{J-1} D_{p-1}(\omega_{\tau_1 \tau_2}) \right) = \phi$$

ならば、

$$\begin{aligned} & V \left[\bigcup_{\tau_1=1}^{J-1} \bigcup_{\tau_2=1}^{J-1} D_{p-1}(\omega_{\tau_1 \tau_2}) \right] \\ & \leq \left(m \sum_{\tau_1=1}^{J-1} V[\text{Tube}(x_c^*[\tau_1])] + \sum_{\tau_2=1}^{J-1} V[\text{Tube}(x_c^*[\tau_2])] - (I-1)(J-1) V[D_{p-1}(\omega)] \right) \div m \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \leq \left(m \sum_{\tau_1=1}^{J-1} V_{\text{Weyl}}(x_c^*[\tau_1]) + \sum_{\tau_2=1}^{J-1} V_{\text{Weyl}}(x_c^*[\tau_2]) - N \times V[D_{p-1}(\omega)] \right) \div m \quad (17) \\ & \equiv H[m] \end{aligned}$$

がいえる。ここで、

$$N = (I-1)(J-1) - m(I-1) - (J-1) \quad (18)$$

である。また、このようにチューブや球の半径として共通の長さのものを用いている時は記述を省くこともあるものとする。(17) は Naiman の不等式を用いた結果であり、(16) については付録で示す。積集合があるかないかはチューブの半径 $\arccos(c/a)$ の大きさに依存する。 m 列をなす球の集合の積集合があつて $m+1$ 列以上をなす球の集合の積集合がない、という条件を満たすような半径を与える a の範囲を $[c[m], c[m+1]]$ とする。ここで $c[1]=c$, $c[J]=\infty$ である。球の和集合領域の体積に関する (16), (17) といった不等式を (12) で用いれば、

$$\begin{aligned} & \Pr \left(\max_{\tau_1 \in \{1, \dots, I-1\}, \tau_2 \in \{1, \dots, J-1\}} \omega_{\tau_1 \tau_2}^T \mathbf{Z} > c \right) \\ & \leq \sum_{m=1}^{J-1} \int_{c[m]}^{c[m+1]} \frac{H[m]}{V[S^{p-1}]} \Pr(\|\mathbf{Z}\| \in da) \\ & = \sum_{m=1}^{J-1} \int_{c[m]}^{c[m+1]} \frac{a^{p-1} \exp(-a^2/2)}{2^{p/2}} \\ & \quad \left\{ \int_{c^2/a^2}^1 \left(\frac{m \sum_{\tau_1=1}^{J-1} V[x_c^*[\tau_1]] + \sum_{\tau_2=1}^{J-1} V[x_c^*[\tau_2]]}{m\pi\Gamma((p-2)/2)} \beta(t) - \frac{Na(t)}{m\pi^{1/2}\Gamma((p-1)/2)} \right) dt \right\} da \quad (19) \end{aligned}$$

が得られる。ここで $\alpha(t)$, $\beta(t)$, N は (9), (18) で定義されたものである。(11) や (14) のように、半径 $\arccos(c/a)$ が大きい時に上の (19)、小さい時に一次 Bonferroni 法 (7) を用いることを考え、これを次元 1 のチューブ適用法と呼ぶことにする。

6. 改良 Bonferroni 法

Worsley (1982) は $V[\cup_{\tau} D_{p-1}(\omega_{\tau}, \phi)]$ の上限を与える方法として、改良 Bonferroni 法を提案した。頂点の集合 $\{\tau\}$ と二頂点の組 (辺) の集合 $E \subset \{\tau^1 \tau^2\}$ とから作られるグラフを考え、それがグラフ理論という木、つまりサーキットのないグラフになっている時に

$$V\left[\bigcup_{\tau} D_{p-1}(\omega_{\tau}, \psi)\right] \leq \sum_{\tau} V[D_{p-1}(\omega_{\tau}, \psi)] - \sum_{\tau_1, \tau_2 \in E} V[D_{p-1}(\omega_{\tau_1}, \psi) \cap D_{p-1}(\omega_{\tau_2}, \psi)]$$

が成り立つことを用いるのがこの方法である。 $\{\omega_{\tau}\}$ が一次元状に並んでいる 4 節の状況では例えば

$$V\left[\bigcup_{\tau_1=1}^{I-1} D_{p-1}(\omega_{\tau_1}, \psi)\right] \leq \sum_{\tau_1=1}^{I-1} V[D_{p-1}(\omega_{\tau_1}, \psi)] - \sum_{\tau_1=1}^{I-2} V[D_{p-1}(\omega_{\tau_1}, \psi) \cap D_{p-1}(\omega_{\tau_1+1}, \psi)] \quad (20)$$

が、 $\{\omega_{\tau}\}$ が二次元状に並んでいる 5 節の状況では例えば

$$\begin{aligned} V\left[\bigcup_{\tau_1=1}^{I-1} \bigcup_{\tau_2=1}^{J-1} D_{p-1}(\omega_{\tau_1 \tau_2}, \psi)\right] &\leq \sum_{\tau_1=1}^{I-1} \sum_{\tau_2=1}^{J-1} V[D_{p-1}(\omega_{\tau_1 \tau_2}, \psi)] \\ &- \sum_{\tau_1=1}^{I-1} \sum_{\tau_2=1}^{J-2} V[D_{p-1}(\omega_{\tau_1 \tau_2}, \psi) \cap D_{p-1}(\omega_{\tau_1, \tau_2+1}, \psi)] - \sum_{\tau_1=1}^{I-2} V[D_{p-1}(\omega_{\tau_1, 1}, \psi) \cap D_{p-1}(\omega_{\tau_1+1, 1}, \psi)] \end{aligned} \quad (21)$$

が考えられる。(20) 式において、 $\omega_{\tau_1}^T \omega_{\tau_1+1}$, つまり $\omega_{\tau_1}^T \mathbf{Z}$ と $\omega_{\tau_1+1}^T \mathbf{Z}$ の相関係数を $r_{\tau_1+1}^{\tau_1}$ とおけば,

$$\begin{aligned} &V[D_{p-1}(\omega_{\tau_1}, \psi) \cap D_{p-1}(\omega_{\tau_1+1}, \psi)] \\ &= \frac{4\pi^{(p-2)/2}}{\Gamma((p-2)/2)} \int_{\arccos(r_{\tau_1+1}^{\tau_1}/2)}^{\psi} (\sin^{p-2} t) \left(\int_0^{\arccos(\tan(r_{\tau_1+1}^{\tau_1}/2) \tan t)} (\sin^{p-3} s) ds \right) dt \end{aligned}$$

と書け,

$$\begin{aligned} &\Pr\left(\max_{\tau_1 \in \{1, \dots, I-1\}} \omega_{\tau_1}^T \mathbf{Z} > c\right) \\ &\leq \int_c^{\infty} (I-1) \frac{a^{p-1} \exp(-a^2/2)}{2^{p/2}} \left\{ \int_{c^2/a^2}^1 \frac{\alpha(t)}{\pi^{1/2} \Gamma((p-1)/2)} dt \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\tau_1=1}^{I-2} \int_{\arccos(r_{\tau_1+1}^{\tau_1}/2)}^{\arccos(c/a)} \frac{4 \sin^{p-2} t}{\pi \Gamma((p-2)/2)} \left(\int_0^{\arccos(\tan(r_{\tau_1+1}^{\tau_1}/2) \tan t)} (\sin^{p-3} s) ds \right) dt \right\} da \end{aligned} \quad (22)$$

$$= (I-1) \{1 - \Phi(c)\} - \sum_{\tau_1=1}^{I-2} \int_c^{\infty} dx \int_c^{\infty} dy \left\{ \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - r_{\tau_1+1}^{\tau_1}}} \exp\left(\frac{x^2 - 2r_{\tau_1+1}^{\tau_1} xy + y^2}{2(r_{\tau_1+1}^{\tau_1} - 1)}\right) \right\} \quad (23)$$

が得られる。 $\Pr(\max_{\tau_1 \in \{1, \dots, I-1\}, \tau_2 \in \{1, \dots, J-1\}} \omega_{\tau_1 \tau_2}^T \mathbf{Z} > c)$ においても (21) を用いて同様の式が得られる。(22) 式の三重積分の数値計算は、(11) 式と同様の考えで、三回の一重積分の数値計算の計算量でおこなえることに注意する。(11) や (14) のように、半径 $\arccos(c/a)$ が大きい時に (13) や (19), 小さい時にこの改良 Bonferroni 法 (22) を用いることができ、つまり今まで一次 Bonferroni 法を用いてきたところを改良 Bonferroni 法でおきかえることができる。(13), (19) に (22) を組み合わせたものを、各々次元 2, 次元 1 の改良チューブ適用法と呼ぶことにする。例えば次元 1 の改良チューブ適用法は裾確率の上限を

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{I-1} \int_{c[m]}^{c[m+1]} \frac{a^{p-1} \exp(-a^2/2)}{2^{p/2}} \min \left[\left\{ \int_{c^2/a^2}^1 \frac{\alpha(t)}{\pi^{1/2} \Gamma((p-1)/2)} dt \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{\tau_1=1}^{I-2} \int_{\arccos(r_{\tau_1+1}^{\tau_1}/2)}^{\arccos(c/a)} \frac{4 \sin^{p-2} t}{\pi \Gamma((p-2)/2)} \left(\int_0^{\arccos(\tan(r_{\tau_1+1}^{\tau_1}/2) \tan t)} (\sin^{p-3} s) ds \right) dt \right\}, \right. \\ &\quad \left. \left\{ \int_{c^2/a^2}^1 \left(\frac{m \sum_{\tau_1=1}^{I-1} V[x_{\tau_1}^*] + \sum_{\tau_2=1}^{J-1} V[x_{\tau_2}^*]}{m \pi \Gamma((p-2)/2)} \beta(t) - \frac{N \alpha(t)}{m \pi^{1/2} \Gamma((p-1)/2)} \right) dt \right\} \right] da \end{aligned} \quad (24)$$

で与える方法である。

7. 数値実験

一次 Bonferroni 法 (7), 改良 Bonferroni 法 (23), 簡易チューブ適用法 ((15) を (12) で用いたもの), 次元 2 のチューブ適用法 (14), 次元 1 のチューブ適用法 ((7) と (19) を組み合わせたもの), 次元 2 の改良チューブ適用法 ((13) と (22) を組み合わせたもの), 次元 1 の改良チューブ適用法 (24), そして Monte Carlo 法を比較するため, ある定常確率場の最大値の裾確率を 7.1 節で, 2.2 節の検定統計量の裾確率を 7.2 節で扱う。

7.1. 定常確率場の最大値の分布の裾確率

独立に標準正規分布に従う確率場 $\{z_{ij}\}$ を窓 $\{w_{st}\}$ ($s=t=0$ ならば $w_{st}=a$, $s=t=0$ でなくて $-d \leq s, t \leq d$ ならば $w_{st}=1$, それ以外は 0) でスムージングし, その後基準化してできる分散 1 の定常確率場を $\{T_{\tau_1 \tau_2}\}$ とする。つまり

$$T_{\tau_1 \tau_2} = \frac{1}{\sqrt{(2d+1)^2 - 1 + a^2}} \left(\sum_{i=\tau_1}^{\tau_1+2d} \sum_{j=\tau_2}^{\tau_2+2d} z_{ij} + (a-1)z_{\tau_1+d, \tau_2+d} \right), \quad z_{ij} \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0,1)$$

であり, a の値が大きくなると $T_{\tau_1 \tau_2}$ 間の相関が低くなる。確率場 $\{x_{ij}\}$ は雑音 $\{z_{ij}\}$ に $\{w_{st}\}$ という形の信号が加わっているか否か, つまり

$$x_{ij} = z_{ij} + \gamma \times w_{i-d-\tau_1, j-d-\tau_2}$$

というモデルにおいて, 帰無仮説として $\gamma=0$ を, 対立仮説として (ある τ_1, τ_2 に対して) $\gamma>0$ を考える。すると, その尤度比検定統計量の帰無仮説のもとでの分布は $\max T_{\tau_1 \tau_2}$ の分布となる (Siegmund & Worsley (1995))。今 τ_1, τ_2 の範囲を $1 \leq \tau_1 \leq I-1, 1 \leq \tau_2 \leq J-1$ として裾確率 $\Pr(\max_{1 \leq \tau_1 \leq I-1, 1 \leq \tau_2 \leq J-1} T_{\tau_1 \tau_2} > c)$ を考える。一次 Bonferroni 法による裾確率が 0.05 となるように閾値 c をとり, a を横軸にして裾確率の上限を評価したのが図 2 ($d=4, I=J=5$) と図 3 ($d=3, I=J=7$) である。ここで, Monte Carlo 法における実験回数は 100000 回であり, この値が裾確率の真の値に近いものとする。すると, 簡易チューブ適用法から次元 1 のチューブ適用法, さらに次元 1 の改良チューブ適用法へと上限が理論通り真の値に近付いていることがわかる。次元 2 のチューブ適用法から次元 2 の改良チューブ適用法へも同様のことがいえる。そして, 特に統計量間の相関が高い時, 次元 1, 2 の改良チューブ適用法が Worsley (1982) の手法である改良 Bonferroni 法に比べて有効であることがわかる。

7.2. 変化点問題の検定統計量の帰無仮説のもとでの分布の裾確率

2.2 節の二元配置における変化点問題に対し, その変化点の有無を検定する統計量 (4) の, 変化はないという帰無仮説のもとでの分布の裾確率を前節同様種々の方法で比較する。ここで, 変化点は二元配置の表の中心部にありと仮定する。つまり (3) 式でいえば, $I \times J$ の二元配置モデルに対し, 変化点 (τ_1, τ_2) は $k \leq \tau_1 \leq I-k, k \leq \tau_2 \leq J-k$ を満たすものとする。適当な I, J, k に対し, 一次 Bonferroni 法による裾確率が 0.05 となるように閾値を設定して裾確率を求めたのが表 1 である。 k が大きければ今回提案する次元 1, 2 の改良チューブ適用法が有効であることが確認できる。

図 2. $d=4, I=J=5$ の時の各手法による裾確率の上限の評価

図 3. $d=3, I=J=7$ の時の各手法による裾確率の上限の評価

表 1. 各手法による裾確率の上限の評価

I	J	k	Bonf.	改良 Bonf.	簡易 チューブ	次元 1 チューブ	次元 1 改良 チューブ	次元 2 チューブ	次元 2 改良 チューブ	Monte Carlo
7	7	1	0.05	0.0396	0.0431	0.0418	0.0372	0.0399	0.0380	0.0268
7	7	2	0.05	0.0386	0.0406	0.0378	0.0350	0.0346	0.0339	0.0263
7	9	1	0.05	0.0401	0.0443	0.0429	0.0377	0.0391	0.0378	0.0254
7	9	2	0.05	0.0393	0.0422	0.0394	0.0356	0.0340	0.0336	0.0255
9	9	2	0.05	0.0372	0.0403	0.0383	0.0345	0.0334	0.0330	0.0236
9	9	3	0.05	0.0367	0.0384	0.0351	0.0327	0.0303	0.0300	0.0248
9	11	2	0.05	0.0377	0.0413	0.0394	0.0350	0.0327	0.0325	0.0225
9	11	3	0.05	0.0374	0.0398	0.0365	0.0333	0.0296	0.0294	0.0224

8. おわりに

標準正規分布に従う統計量 T_τ の添字 τ が離散集合 Θ_{dis} の要素である時の裾確率 $\Pr(\max_{\tau \in \Theta_{\text{dis}}} T_\tau > c)$ の上限を得る問題で, $\{T_\tau\}$ を適当につなぎ, チューブ法を用いることを提案した. そして二元配置の変化点問題で必要となる $\Theta_{\text{dis}} = \{(\tau_1, \tau_2); 1 \leq \tau_1 \leq (I-1), 1 \leq \tau_2 \leq (J-1)\}$ という状況を例として扱い, まず次元多様体に関するチューブ法と一次 Bonferroni 法 (7), もしくは少し計算を複雑にして改良 Bonferroni 法 (22) を組み合わせ, 次元 1 のチューブ適用法, もしくは次元 1 の改良チューブ適用法 (24) を構成した. また, 二次元多様体に関するチューブ法を用い, 上限の近似を与える次元 2 のチューブ適用法 (14), さらに (13) と (22) を組み合わせた次元 2 の改良チューブ適用法を構成した.

そして, ある定常確率場の最大値の裾確率と, 二元配置の変化点の有無を検定する統計量の裾確率とを各手法で評価し, 上のようにして構成したチューブ適用法が過去に提案されている Bonferroni 法に比べて有効であることを確認した. この結果は, より一般の変化点問題に対するチューブ法の適用も有効であることを示唆する.

付録. 次元 1 のチューブ適用法で用いる不等式の導出

$(I-1) \times (J-1)$ の二次元格子状に並んだ球の中心 $\{\omega_{\tau_1 \tau_2}\}$ があり, 第 i 行の点の集合, 第 j 列の点の集合を大円でつないだ“区分的に滑らかな”多様体を各々 $x_i^*[i]$, $x_j^*[j]$ とする. この節で示すことは, $m+1$ 列をなす任意の球の集合の積集合がないという仮定のもとでの

$$\begin{aligned}
 & V \left[\bigcup_{\tau_1=1}^{I-1} \bigcup_{\tau_2=1}^{J-1} D_{p-1}(\omega_{\tau_1 \tau_2}) \right] \\
 & \leq \left(m \sum_{\tau_1=1}^{I-1} V[\text{Tube}(x_i^*[\tau_1])] + \sum_{\tau_2=1}^{J-1} V[\text{Tube}(x_j^*[\tau_2])] - \sum_{\tau_1=1}^{I-1} \sum_{\tau_2=1}^{J-1} V[D_{p-1}(\omega_{\tau_1 \tau_2})] \right) \div m \quad (25)
 \end{aligned}$$

の成立である.

$I_a, I_a^c (a=1, 2, \dots)$ を $I_a \cup I_a^c = \{1, \dots, I\}$, $I_a \cap I_a^c = \emptyset$ を満たす $\{1, \dots, I\}$ の任意の部分集合, D_{Iaj} を, 第 j 列の球の集合の中で, 第 i 行目 ($i \in I_a$) の球には含まれて第 i^c 行目 ($i^c \in I_a^c$) の球には含まれないような領域, つまり

図4. 球の和集合領域

$$D_{I_{aj}} = \bigcap_{i \in I_a} D_{p-1}(\omega_{ij}) \cap \bigcap_{i \in I_c^c} D_{p-1}(\omega_{ij})^c$$

と, $D_{j_1 \dots j_k}^c$ を第 j 列目 ($j \neq j_1, \dots, j_k$) のどの球にも含まれないような領域, つまり

$$D_{j_1 \dots j_k}^c = \bigcap_{i=1, j \neq j_1, \dots, j_k}^l D_{p-1}(\omega_{ij})^c$$

とする. ここで $D_{p-1}(\omega)^c$ は球 $D_{p-1}(\omega)$ の補集合領域を意味する. そして球の和集合領域 $\bigcup_{\tau_1=1}^{m-1} \bigcup_{\tau_2=1}^{m-1} D_{p-1}(\omega_{\tau_1 \tau_2})$ を $D_{I_{1j_1}} \cap D_{I_{2j_2}} \cap \dots \cap D_{I_{h j_h}} \cap D_{j_1 \dots j_k}^c$ という領域にわけて考える. $m+1$ 列をなす任意の球の集合の積集合がないという仮定より, 任意の点は $k \leq m$ におけるいずれかの $D_{I_{1j_1}} \cap D_{I_{2j_2}} \cap \dots \cap D_{I_{h j_h}} \cap D_{j_1 \dots j_k}^c$ に属し, $k \geq m+1$ においてはこの領域は必ず空となる.

$m=2$ の例として図4(左)を与える. 球の和集合領域が細かく区分されているが, 各領域は必ず $D_{I_{1j_1}} \cap D_{j_1}^c$ か $D_{I_{1j_1}} \cap D_{I_{2j_2}} \cap D_{j_1 j_2}^c$ と表現できることがわかる. 例えば領域 A は $D_{(1)1} \cap D_{1}^c$, 領域 B は $D_{(1,2)1} \cap D_{(1,2)2} \cap D_{1,2}^c$, 領域 C は $D_{(2)1} \cap D_{(1,2,3)2} \cap D_{1,2}^c$ である. 図4(右)はチューブ領域の例を挙げている. 領域 A, B, C が上の式(25)で何回数えられているかを考える. 領域 A は $\text{Tube}(\kappa_r^*[1])$, $\text{Tube}(\kappa_c^*[1])$, $D_{p-1}(\omega_{1,1})$ に含まれるから, $(2 \times 1 + 1 - 1) \div 2 = 1$ 回である. 同様に, 2行2列にまたがる球集合の積集合である領域 B , 3行2列にまたがる球集合の積集合である領域 C が数えられる回数は各々 $(2 \times 2 + 2 - 4) \div 2 = 1$, $(2 \times 3 + 2 - 5) \div 2 = 1.5$ 回であり, いずれも1回以上である.

一般に $k \leq m$ において領域 $D_{I_{1j_1}} \cap D_{I_{2j_2}} \cap \dots \cap D_{I_{h j_h}} \cap D_{j_1 \dots j_k}^c$ が上の式(25)で何回数えられているかを考える. 上の I_a ($a=1, \dots, k$) の取り方によってこの領域が h 行にまたがる球集合の積集合となっているとすれば, $\sum_{\tau_1=1}^{l-1} V[\text{Tube}(\kappa_r^*[\tau_1])]$, $\sum_{\tau_2=1}^{l-1} V[\text{Tube}(\kappa_c^*[\tau_2])]$, $\sum_{\tau_1=1}^{l-1} \sum_{\tau_2=1}^{l-1} V[D_{p-1}(\omega_{\tau_1 \tau_2})]$ でこの領域は各々 $h, k, (|I_1| + |I_2| + \dots + |I_k|)$ 回数えられている. ここで $|I|$ は集合 I の要素数を意味するものとする. $|I_1| + |I_2| + \dots + |I_k| \leq hk$ が成り立つから,

$$\{mh + k - (|I_1| + |I_2| + \dots + |I_k|)\} \div m \geq (mh + k - hk) \div m = 1 + \frac{(m-k)(k-1)}{m} \geq 1$$

となり, 数えられる回数は1以上であることがいえる.

謝 辞 統計数理研究所の尾形良彦先生、栗木哲先生ならびに査読者の方々からは貴重なコメントをいただきました。ここに心より感謝申し上げます。

参 考 文 献

- Hirotsu, C. (1997) : Two-way change-point model and its application, *Austral. J. Statist.* **39**(2), 205-218.
- Hirotsu, C., Kuriki, S., Hayter, A. J. (1992) : Multiple comparison procedures based on the maximal component of the cumulative chi-squared statistic, *Biometrika* **79**, 381-392.
- 広津千尋 (1996) : 分割表における交互作用変化点モデルとその応用, 応用統計学 **24**, 93-101.
- Hotelling, H. (1939) : Tubes and spheres in n -spaces, and a class of statistical problems, *Amer. J. Math.* **61**, 440-460.
- Knowles, M., Siegmund, D. O. (1989) : On Hotelling's approach to testing for a nonlinear parameter in regression, *Internat. Statist. Rev.* **57**, 205-220.
- MacNeill, I. B., Jandhyala, V. K. (1993) : Change-point methods for spatial data, *Multivariate Environmental Statist.*, 289-306.
- Naiman, D. Q. (1986) : Conservative confidence bands in curvilinear regression, *Ann. Statist.* **14**, 896-906.
- Naiman, D. Q., Wynn, H. P. (1992) : Inclusion-exclusion-Bonferroni identities and inequalities for discrete tube-like problems via Euler characteristics, *Ann. Statist.* **20**, 43-76.
- Ninomiya, Y. (2000) : Construction of conservative testing for change-point problems in two-dimensional random fields, *Research Memorandum No. 746, The Institute of Statistical Mathematics*.
- Siegmund, D. O., Worsley, K. J. (1995) : Testing for a signal with unknown location and scale in a stationary Gaussian random fields, *Ann. Statist.* **23**, 608-639.
- Sun, J. (1993) : Tail probabilities of the maxima of Gaussian random fields, *Ann. Probab.* **21**, 34-71.
- Takemura, A., Kuriki, S. (1999) : Maximum of Gaussian field on piecewise smooth domain : Equivalence of tube method and Euler characteristic method, *Discussion Paper 99-F-54, Faculty of Economics, Univ. of Tokyo*.
- Weyl, H. (1939) : On the volume of tubes, *Amer. J. Math.* **61**, 461-472.
- Worsley, K. J. (1982) : An improved Bonferroni inequality and applications, *Biometrika* **69**, 297-302.
- Worsley, K. J. (1986) : Confidence regions and tests for a change-point in a sequence of exponential family random variables, *Biometrika* **73**, 91-104.

(2000年5月12日受付 12月18日最終修正)

著者連絡先 : 〒106-8569 港区南麻布4-6-7 総合研究大学院大学