2つの正規分布の同等性に関する尤度比検定の検出力特性に関する考察

大阪府立大学大学院工学研究科 竹 本 康 彦

大阪府立大学大学院工学研究科 有 蘭 育 生

要 旨 複数のパラメータにより定義される帰無仮説に関する一般的な検定方法に尤度比検定がある。この尤度比検定に関する一般理論において、帰無仮説のもとでの検定統計量の大量サンプルを前提とした漸近的性質が明らかにされている。一方、対立仮説のもとでの検定統計量の漸近展開に基づく近似分布についても考察されている。ただし、サンプル・サイズの増加に対して大量サンプルを前提とする漸近分布への収束の速度は必ずしも速くなく、これより有限サンプル・サイズのもとでの検定統計量の分布を漸近分布で与えることには近似精度上の問題があるということが知られている。すなわち、現実的な状況下でのこのような検定の設計問題や検出力特性の評価法については多くの課題が残されている。そこで本研究では、このような複数のパラメータにより定義される帰無仮説に関する問題の一つとして、2つの正規母集団分布の同等性に関する検定問題として正規2標本同時検定問題を考える。この正規2標本同時検定問題に関しては先に有蘭らの成果により、尤度比検定における検定統計量の帰無仮説のもとでのより精度のよい近似分布が任意のサンプル・サイズに対応する形で与えられ、これにより精度のよい検定が設計されるに至った。ただし、これまでに有限サンプル・サイズのもとでの尤度比検定における正規2標本同時検定問題に関する対立仮説のもとでの検定統計量の近似分布やその近似分布に基づく検定における検出力特性の評価法について十分言及されていない。そこで、われわれはこの検定問題において、検定統計量の任意の仮説および任意のサンプル・サイズのもとでの近似分布に関して考察し、その近似分布に基づき検出力特性の評価にまで考察を広げるものとする。

1. はじめに

本研究では、2つの正規母集団分布の同等性に関する検定問題、すなわち仮説「 $\mu_1 = \mu_2$ and $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 」を検定する問題について考察する。このような2標本の同等性に関する検定問題において、しばしば仮説「 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 」を検定する分散比に関する F 検定と $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ を前提にして仮説「 $\mu_1 = \mu_2$ 」を検定する平均の差に関する t 検定をそれぞれ用いて、平均や分散といった対象となるパラメータを各々検定する方法が採用される場合がある(竹内, 1972)。ところで、2標本の同等性の検定に対して、これらの F 検定と t 検定を並列に利用することはその判定を煩雑にすることが考えられる。一方、複数のパラメータを同時に取扱う最も一般的な検定方法として尤度比検

定があり、この尤度比検定は帰無仮説からのあらゆる方向へのずれに対して一様に概ねよい検定方式となっていることが知られている (Anderson, 1958; Kendall and Stuart, 1979). そこで本研究では、仮説「 $\mu_1 = \mu_2$ and $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 」を同時に取扱う検定問題を正規 2 標本同時検定問題と呼び、この検定問題に対する尤度比検定について考察する. このとき、尤度比検定においては一つの統計量において判定が行われるため、上述のような F 検定と t 検定を併用する場合に比べてその判定を平易なものとしうる. ここで尤度比検定に関する一般理論より、この正規 2 標本同時検定では従来、尤度比の対数を (-2) 倍した統計量の漸近分布である自由度 2 のカイ二乗分布に基づいて検定が設計されている (Serfling, 1980). ただし、任意のサンプル・サイズにおいて漸近分布の近似精度は必ずしもよいとはいえず、設計された検定が所定の有意水準に対する要求を満足しているという保証はない. これに対し、有蘭ら (1997) は先に正規 2 標本同時検定における検定統計量である対数尤度比統計量の帰無仮説のもとでのキウムラント母関数を導出し、これを用いて求められるキウムラントをもとに任意のサンプル・サイズのもとでの対数尤度比統計量により精確な近似分布を与え、所定の有意水準を精度よく実現する検定法の設計を可能とした.

一方、検出力の評価においては検定統計量の対立仮説のもとでの分布特性についての知識が必要である. 尤度比検定における検定統計量の対立仮説のもとでの漸近分布に関して Wald (1943) や Stroud (1972) の考察がよく知られている. Wald (1943) の考察によれば、本研究での正規 2 標本同時検定では対立仮説での母集団分布の平均および分散によって与えられる非心度をもつ自由度 2 の非心カイ二乗分布に従うこととなる. ただし、この漸近分布はサンプル・サイズ n に関して $1/\sqrt{n}$ のオーダーで帰無仮説に近づく対立仮説のもとでの分布と限定されており、それ以外の対立仮説のもとでの漸近性は保証されないことが Stroud (1972) により確認されている. さらに、検定統計量の対立仮説のもとでの漸近分布に関しては多くの研究がなされている (塩谷, 1976, 1977; Kendall and Stuart, 1979; Muirhead, 1982; Siotani, 1985; Anderson, 1987). しかし、サンプル・サイズの増加に対して大サンプルを前提とする漸近分布への収束の速度は必ずしも速くなく、これより有限サンプル・サイズのもとでの現実的な検定における検出力を精度よく評価するための近似分布が与えられているとはいえない. そこで本研究では、任意のサンプル・サイズに対応する任意の仮説のもとでの正規 2 標本同時検定における対数尤度比統計量の分布に関してより精確な近似分布を与え、その近似分布に基づき検定における検出力特性を評価することを目的とする.

2. 対数尤度比統計量

本研究では、2 つの正規母集団分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ と $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ に関して、帰無仮説

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad \text{and} \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

を考え、帰無仮説 H_0 の正規 2 標本同時検定問題に関して尤度比検定を適用する. このとき、母集団分布 $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ から得たそれぞれサイズ $n_i, i = 1, 2$ のサンプル $x_{ij}, j = 1, \dots, n_i$ に基づき、正規分布 $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ のパラメータ μ_i, σ_i^2 の最尤推定量 $\bar{x}_i, s_i^2$ は

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}, \quad s_i^2 = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$$

により与えられる. また、帰無仮説のもとで便宜上 μ_0, σ_0^2 を $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0, \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_0^2$ と表わ

す. ただし, μ_0, σ_0^2 はともに未知である. このとき, μ_0, σ_0^2 の最尤推定量 $\bar{x}_0, s_0^2$ は

$$\bar{x}_0 = \frac{1}{n_1 + n_2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

$$s_0^2 = \frac{1}{n_1 + n_2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_0)^2 = \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2} + \frac{n_1 n_2 (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2}{(n_1 + n_2)^2}$$

として求められる. これらを用いて, 尤度比 ρ は

$$\rho = \frac{s_1^{n_1} s_2^{n_2}}{s_0^{n_1 + n_2}} \quad (1)$$

と表わされる. ここで式 (1) の対数を取り, 符号を反転させることにより, 検定統計量である対数尤度比統計量

$$\lambda = -\log \rho = \log \frac{s_0^{n_1 + n_2}}{s_1^{n_1} s_2^{n_2}} \quad (2)$$

を与える. ただし, 本研究では対数はすべて自然対数を意味する.

3. 対数尤度比統計量のキュムラント母関数

本研究で考察する正規 2 標本同時検定を設計するためには, 式 (2) の対数尤度比統計量 λ の分布についての知識が必要である. 尤度比検定に関する一般論によると, 本研究で扱う正規 2 標本同時検定においては帰無仮説 H_0 のもとでの統計量 2λ が大サンプルのもとで漸近的に自由度 2 のカイ二乗分布に従うことが知られる (Serfling, 1980). これに対し, 近年有蘭 (1997) は, 本研究で扱う正規 2 標本同時検定における帰無仮説 H_0 のもとでの対数尤度比統計量 λ の統計的性質について考察し, 任意のサンプル・サイズでのキュムラント特性を明らかにした. さらに, それらをもとに帰無仮説 H_0 のもとでの対数尤度比統計量 λ の分布により精度のよい近似分布を与えた. これにより, 正規 2 標本同時検定問題において, 漸近理論に基づく近似分布による検定法に比べてより精度よく有意水準の実現値を与える検定法を設計することが可能となった.

一方, 設計された検定法における各種対立仮説に対する検出力を評価することが必要になる場合がある. 検出力の評価に関してはシミュレーションに基づき推定する方法が採られる場合がある. ただし, 例えば対立仮説に対する検出力の要求が存在し, 有意水準を指定した帰無仮説に関する検定がこの検出力に関する要求を同時に満足するよう設計しなければならない場合を考えれば, シミュレーションによる検出力の推定による方法ばかりでなく, 対立仮説のもとでの検定統計量の分布を考慮した検出力の評価法の構築がより重要になる. これに関して, 既述のように対立仮説のもとでの検定統計量の漸近分布に関して Wald (1943) および Stroud (1972) の考察があり, さらに漸近展開に基づく対立仮説のもとでの検定統計量の漸近分布に関しても多くの研究がなされている (塩谷, 1976, 1977; Kendall and Stuart, 1979; Muirhead, 1982; Siotani, 1985; Anderson, 1987). ただし, 大サンプルを前提とする漸近分布への収束の速度は必ずしも速くなく, これより有限サンプル・サイズのもとでの現実的な検定における検出力を精度よく与えることのできる検定統計量の近似分布が与えられているとはいえない. そこで本研究では, 正規 2 標本同時検定

における帰無仮説 H_0 に対する対立仮説のもとでの検定統計量の分布について考察し、これによる成果に基づく検出力特性の評価法の構築を目的とする。

まず本研究では、式 (2) の対数尤度比統計量 λ の各種対立仮説のもとでのキュムラント母関数について考察する。ここで、便宜上検出力を評価すべき対立仮説のもとでの 2 つの正規分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ と $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ の母数の関係を

$$\mu_1 - \mu_2 = \varepsilon \sigma_1 \quad \text{and/or} \quad \sigma_2^2 / \sigma_1^2 = \delta$$

とする。ただし、 $\delta > 0$ は自明である。このとき

$$s^2 = \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2}, \quad u = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2}{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}$$

とおき、さらに $v = n_1 s_1^2 / n_2 s_2^2$ と与えることにより、式 (1) の ρ に関して

$$(\rho)^{-1} = \left(\frac{n_1}{n_1 + n_2} \right)^{n_1/2} \left(\frac{n_2}{n_1 + n_2} \right)^{n_2/2} v^{-n_1/2} (v+1)^{(n_1+n_2)/2} (1+u)^{(n_1+n_2)/2}$$

と表すことができる。よって対数尤度比統計量 λ の積率母関数 $\phi(\theta)$ は

$$\begin{aligned} \phi(\theta) &= E[e^{\lambda\theta}] = E[(\rho)^{-\theta}] \\ &= \left(\frac{n_1}{n_1 + n_2} \right)^{\frac{n_1\theta}{2}} \left(\frac{n_2}{n_1 + n_2} \right)^{\frac{n_2\theta}{2}} E \left[v^{-\frac{n_1\theta}{2}} (v+1)^{\frac{(n_1+n_2)\theta}{2}} (1+u)^{\frac{(n_1+n_2)\theta}{2}} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

により与えられる。このとき、確率変数 u と v は対立仮説のもとでは相関をもつため、積率母関数 $\phi(\theta)$ をさらに展開するためには確率変数 u, v の同時確率密度関数が必要となる。ここで、確率変数 u, v の同時確率密度関数を本研究において

$$\begin{aligned} f(u, v) &= e^{-\frac{\gamma}{2}\delta - \frac{n_2-1}{2}\tau} \tau^{\frac{n_1+n_2-2}{2}} (1+v)^{-\frac{n_1+n_2-2}{2}} v^{\frac{n_1-1}{2}-1} \\ &\times \sum_{i_1=0}^{\infty} \frac{1}{i_1!} \left(\frac{\gamma}{2} \right)^{i_1} \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2-1}{2} + i_1\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + i_1\right)} u^{\frac{1}{2}+i_1-1} \left(\frac{V}{\tau + Vu} \right)^{\frac{n_1+n_2-1}{2}+i_1} \end{aligned} \quad (4)$$

と導出した。ただし、式 (4) における γ, τ および V は

$$\gamma = \frac{n_1 n_2 \varepsilon^2}{n_1 \delta + n_2}, \quad \tau = \frac{n_1 \delta + n_2}{n_1 + n_2}, \quad V = \frac{(1+v)\delta}{1 + \delta v}$$

である(付録 A 参照)。式 (3), (4) に基づき、対数尤度比統計量 λ のキュムラント母関数 $\eta_1(\theta)$ を

$$\begin{aligned} \eta_1(\theta) &= \frac{n_1\theta}{2} \log\left(\frac{n_1}{n_1 + n_2}\right) + \frac{n_2\theta}{2} \log\left(\frac{n_2}{n_1 + n_2}\right) + \log \Gamma\left(\frac{n_1(1-\theta)-1}{2}\right) - \log \Gamma\left(\frac{n_1-1}{2}\right) \\ &+ \log \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{i_3=0}^{\infty} e^{-\gamma/2\delta - (n_2-1)/2\tau} \tau^{(n_1+n_2-2)/2+i_2} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{i_1} \left(1 - \frac{1}{\delta}\right)^{i_2} \frac{(1-\tau)^{i_3}}{i_1! i_2! i_3!} \end{aligned}$$

$$\times \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2-1}{2} + i_1 + i_2 + i_3\right)}{\Gamma\left(\frac{(n_1+n_2)(1-\theta)-1}{2} + i_1 + i_2 + i_3\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{(n_1+n_2)(1-\theta)-2}{2} + i_2 + i_3\right)}{\Gamma\left(\frac{(n_1+n_2)(1-\theta)-2}{2} + i_2\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{n_2(1-\theta)-1}{2} + i_2\right)}{\Gamma\left(\frac{n_2-1}{2}\right)} \quad (5)$$

として導出した(付録 B 参照). 式 (5) から統計量 λ の分布は ε と δ のみに依存し, $\mu_1, \sigma_1^2, \mu_2, \sigma_2^2$ の値そのものには直接影響されないことが知られる. また, 式 (5) において ε は ε^2 の形でしか含まれない. さらに, $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ と $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ の添数は交換可であるから, δ に関して, $0 < \delta < 1$ の場合には $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ と $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ の添数を交換して, 改めて δ を定義すればよいことから検出力の評価法を構築するにあたっては $\varepsilon \geq 0, \delta \geq 1$ を考えれば十分である. ここで, $\varepsilon = 0.0$ かつ $\delta = 1.0$ とおけば $\mu_1 = \mu_2$ かつ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ を意味し, 帰無仮説 H_0 に一致する. このとき, $\gamma = 0.0, \tau = 1.0$ となり, 式 (5) のキウムラント母関数は

$$\begin{aligned} \eta_0(\theta) = & \frac{n_1\theta}{2} \log\left(\frac{n_1}{n_1+n_2}\right) + \frac{n_2\theta}{2} \log\left(\frac{n_2}{n_1+n_2}\right) + \log\Gamma\left(\frac{n_1(1-\theta)-1}{2}\right) - \log\Gamma\left(\frac{n_1-1}{2}\right) \\ & + \log\Gamma\left(\frac{n_2(1-\theta)-1}{2}\right) - \log\Gamma\left(\frac{n_2-1}{2}\right) \\ & - \log\Gamma\left(\frac{(n_1+n_2)(1-\theta)-1}{2}\right) + \log\Gamma\left(\frac{n_1+n_2-1}{2}\right) \end{aligned} \quad (6)$$

となり, 先に有蘭ら(1997)が導出した帰無仮説のもとでのキウムラント母関数と一致することは明らかである.

さて, 式 (5) として導出したキウムラント母関数 $\eta_1(\theta)$ に基づき統計量 λ の対立仮説のもとでの 1 次, 2 次キウムラント $\kappa_{1||}, \kappa_{2||}$ を

$$\kappa_{1||} = \frac{n_1}{2} \log\left(\frac{n_1}{n_1+n_2}\right) + \frac{n_2}{2} \log\left(\frac{n_2}{n_1+n_2}\right) - \frac{n_1}{2} \psi^{(0)}\left(\frac{n_1-1}{2}\right) - \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad (7)$$

$$\kappa_{2||} = \left(\frac{n_1}{2}\right)^2 \psi^{(1)}\left(\frac{n_1-1}{2}\right) + \frac{\omega_3}{\omega_1} - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \quad (8)$$

と与えることができる. ここで式 (7), (8) 中の ω_1, ω_2 および ω_3 は

$$\begin{aligned} \omega_1 = & \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{i_3=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + i_2 + i_3\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + i_2\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{n_2-1}{2} + i_2\right)}{\Gamma\left(\frac{n_2-1}{2}\right)} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{i_1} \left(1 - \frac{1}{\delta}\right)^{i_2} (1-\tau)^{i_3} \\ & \times \frac{e^{-\frac{\gamma}{2}\delta - \frac{n_2-1}{2}\tau} \tau^{\frac{n_1+n_2-2}{2} + i_2}}{i_1! i_2! i_3!} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\omega_2 = -\frac{n_1+n_2}{2} \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{i_3=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + i_2 + i_3\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + i_2\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{n_2-1}{2} + i_2\right)}{\Gamma\left(\frac{n_2-1}{2}\right)} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{i_1} \left(1 - \frac{1}{\delta}\right)^{i_2} (1-\tau)^{i_3}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \frac{e^{-\frac{\gamma}{2}} \delta^{-\frac{n_2-1}{2}} \tau^{\frac{n_1+n_2-2}{2}+i_2}}{i_1! i_2! i_3!} \psi^{(0)} \left(\frac{n_1+n_2-1}{2} + i_1 + i_2 + i_3 \right) \\
 & + \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{i_3=0}^{\infty} \frac{\Gamma \left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + i_2 + i_3 \right) \Gamma \left(\frac{n_2-1}{2} + i_2 \right)}{\Gamma \left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + i_2 \right) \Gamma \left(\frac{n_2-1}{2} \right)} \left(1 - \frac{1}{\delta} \right)^{i_2} (1-\tau)^{i_3} \frac{\delta^{-\frac{n_2-1}{2}} \tau^{\frac{n_1+n_2-2}{2}+i_2}}{i_2! i_3!} \\
 & \quad \times \left\{ \frac{n_1+n_2}{2} \psi^{(0)} \left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + i_2 + i_3 \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{n_2}{2} \psi^{(0)} \left(\frac{n_2-1}{2} + i_2 \right) - \frac{n_1+n_2}{2} \psi^{(0)} \left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + i_2 \right) \right\} \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \omega_3 = & - \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{i_3=0}^{\infty} \frac{\Gamma \left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + i_2 + i_3 \right) \Gamma \left(\frac{n_2-1}{2} + i_2 \right)}{\Gamma \left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + i_2 \right) \Gamma \left(\frac{n_2-1}{2} \right)} \left(\frac{\gamma}{2} \right)^{i_1} \left(1 - \frac{1}{\delta} \right)^{i_2} (1-\tau)^{i_3} \\
 & \times \frac{e^{-\frac{\gamma}{2}} \delta^{-\frac{n_2-1}{2}} \tau^{\frac{n_1+n_2-2}{2}+i_2}}{i_1! i_2! i_3!} \left\{ \left(\frac{n_1+n_2}{2} \right)^2 \psi^{(1)} \left(\frac{n_1+n_2-1}{2} + i_1 + i_2 + i_3 \right) \right. \\
 & \quad - \left(\frac{n_1+n_2}{2} \right)^2 \left(\psi^{(0)} \left(\frac{n_1+n_2-1}{2} + i_1 + i_2 + i_3 \right) \right)^2 \\
 & \quad + \frac{n_2(n_1+n_2)}{2} \psi^{(0)} \left(\frac{n_2-1}{2} + i_2 \right) \psi^{(0)} \left(\frac{n_1+n_2-1}{2} + i_1 + i_2 + i_3 \right) \\
 & \quad + \frac{(n_1+n_2)^2}{2} \psi^{(0)} \left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + i_2 + i_3 \right) \psi^{(0)} \left(\frac{n_1+n_2-1}{2} + i_1 + i_2 + i_3 \right) \\
 & \quad \left. - \frac{(n_1+n_2)^2}{2} \psi^{(0)} \left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + i_2 \right) \psi^{(0)} \left(\frac{n_1+n_2-1}{2} + i_1 + i_2 + i_3 \right) \right\} \\
 & + \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{i_3=0}^{\infty} \frac{\Gamma \left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + i_2 + i_3 \right) \Gamma \left(\frac{n_2-1}{2} + i_2 \right)}{\Gamma \left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + i_2 \right) \Gamma \left(\frac{n_2-1}{2} \right)} \left(1 - \frac{1}{\delta} \right)^{i_2} (1-\tau)^{i_3} \frac{\delta^{-\frac{n_2-1}{2}} \tau^{\frac{n_1+n_2-2}{2}+i_2}}{i_2! i_3!} \\
 & \quad \times \left\{ \left(\frac{n_2}{2} \right)^2 \psi^{(1)} \left(\frac{n_2-1}{2} + i_2 \right) - \left(\frac{n_1+n_2}{2} \right)^2 \psi^{(1)} \left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + i_2 \right) \right. \\
 & \quad + \left(\frac{n_1+n_2}{2} \right)^2 \psi^{(1)} \left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + i_2 + i_3 \right) + \left(\frac{n_1+n_2}{2} \right)^2 \left(\psi^{(0)} \left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + i_2 + i_3 \right) \right)^2 \\
 & \quad + \left(\frac{n_2}{2} \psi^{(0)} \left(\frac{n_2-1}{2} + i_2 \right) - \frac{n_1+n_2}{2} \psi^{(0)} \left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + i_2 \right) \right)^2 \\
 & \quad + \frac{n_2(n_1+n_2)}{2} \psi^{(0)} \left(\frac{n_2-1}{2} + i_2 \right) \psi^{(0)} \left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + i_2 + i_3 \right) \\
 & \quad \left. - \frac{(n_1+n_2)^2}{2} \psi^{(0)} \left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + i_2 \right) \psi^{(0)} \left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + i_2 + i_3 \right) \right\} \quad (11)
 \end{aligned}$$

である。ただし、 $\psi^{(k)}(z), k = 1, 2$ は

$$\psi^{(k)}(z) = \frac{d^{k+1}}{du^{k+1}} \log \Gamma(z)$$

と与えられるポリ・ガンマ関数を意味する．ここに， $\eta_1(0) = 0$ であることより $\omega_1 = 1$ と定まる．またここで，統計量 λ の各種対立仮説のもとでの 1 次，2 次キュムラント $\kappa_{1|1}, \kappa_{2|1}$ とは別に，帰無仮説のもとでの 1 次，2 次キュムラント $\kappa_{1|0}, \kappa_{2|0}$ を与えておく．統計量 λ の帰無仮説のもとでの 1 次，2 次キュムラント $\kappa_{1|0}, \kappa_{2|0}$ は，式 (6) のキュムラント母関数 $\eta_0(\theta)$ に基づき

$$\begin{aligned} \kappa_{1|0} = & \frac{n_1}{2} \log \left(\frac{n_1}{n_1 + n_2} \right) + \frac{n_2}{2} \log \left(\frac{n_2}{n_1 + n_2} \right) - \frac{n_1}{2} \psi^{(0)} \left(\frac{n_1 - 1}{2} \right) - \frac{n_2}{2} \psi^{(0)} \left(\frac{n_2 - 1}{2} \right) \\ & + \frac{n_1 + n_2}{2} \psi^{(0)} \left(\frac{n_1 + n_2 - 1}{2} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\kappa_{2|0} = \left(\frac{n_1}{2} \right)^2 \psi^{(1)} \left(\frac{n_1 - 1}{2} \right) + \left(\frac{n_2}{2} \right)^2 \psi^{(1)} \left(\frac{n_2 - 1}{2} \right) - \left(\frac{n_1 + n_2}{2} \right)^2 \psi^{(1)} \left(\frac{n_1 + n_2 - 1}{2} \right) \quad (13)$$

と導出される．式 (12) と (13) の $\kappa_{1|0}$ と $\kappa_{2|0}$ は，各種対立仮説のもとでの 1 次，2 次キュムラント $\kappa_{1|1}, \kappa_{2|1}$ を表す式 (7), (8) において $\varepsilon = 0.0$ かつ $\delta = 1.0$ ，すなわち $\gamma = 0.0, \tau = 1.0$ とすることからも得られることは明らかである．

4. キュムラントの数値計算法

本研究で導出した式 (5) のキュムラント母関数を用いることにより，任意の仮説のもとでの対数尤度比統計量 λ についての任意の次数のキュムラントの表現式を求めることが可能となる．ここで，式 (9)~(11) のようにキュムラントの表現式は 2 重や 3 重の無限級数の和の中にガンマ関数や階乗関数を含む形で与えられる．一般にガンマ関数や階乗関数の数値計算においては，それらに含まれる変数が正の大きな値をとる場合，その関数値は爆発的に大きな値をとり，その値を数値計算上扱うのは容易ではない．しかし，本研究における対立仮説のもとでの統計量 λ のキュムラントの表現式にはガンマ関数や階乗関数に含まれる変数が無限級数の項数に関する添数を含む変数で与えられており，それらを数値計算により求める必要がある．このことより，これらのキュムラントの表現式をそのまま用い τ コンピュータ・プログラムを作成し，その数値計算を行うことはきわめて困難である．すなわち，これらのキュムラントの数値計算を行うための計算方法に工夫が必要となる．

これを目的として，式 (9) に示される ω_1 をもとにキュムラントの計算法を例示する．ここでまず，式 (9) の右辺に実数 $t^{i_1+i_2+i_3}$ を掛けることにより

$$\begin{aligned} & \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{i_3=0}^{\infty} \frac{\Gamma \left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + i_2 + i_3 \right) \Gamma \left(\frac{n_2-1}{2} + i_2 \right)}{\Gamma \left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + i_2 \right) \Gamma \left(\frac{n_2-1}{2} \right)} \left(\frac{\gamma}{2} \right)^{i_1} \left(1 - \frac{1}{\delta} \right)^{i_2} (1 - \tau)^{i_3} \\ & \quad \times \frac{e^{-\frac{\gamma}{2}} \delta^{-\frac{n_2-1}{2}} \tau^{\frac{n_1+n_2-2}{2} + i_2}}{i_1! i_2! i_3!} t^{i_1+i_2+i_3} \\ & = \frac{e^{-\varrho_1} (1 - \varrho_2 - \varrho_3)^{\frac{n_2-1}{2}} (1 - \varrho_3)^{\frac{n_1-1}{2}}}{e^{-\varrho t} (1 - \varrho_2 t - \varrho_3 t)^{\frac{n_2-1}{2}} (1 - \varrho_3 t)^{\frac{n_1-1}{2}}} \end{aligned} \quad (14)$$

を得る。ただし、式 (14) の右辺において表記上の煩雑さを避けるため

$$\varrho_1 \equiv \frac{\gamma}{2}, \quad \varrho_2 \equiv \tau \left(1 - \frac{1}{\delta}\right), \quad \varrho_3 \equiv 1 - \tau$$

とおいた。また、代数関数の冪級数展開に関する

$$(1-z)^{-\zeta} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\zeta+i)}{\Gamma(\zeta)} \frac{z^i}{i!} \quad (|z| < 1) \quad (15)$$

の関係(森口ら, 1998)に基づき

$$\sum_{i_3=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + i_2 + i_3\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + i_2\right)} \frac{(1-\tau)^{i_3} t^{i_3}}{i_3!} = (1-\varrho_3 t)^{-\frac{n_1+n_2-2}{2} - i_2},$$

$$\sum_{i_2=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n_2-1}{2} + i_2\right)}{\Gamma\left(\frac{n_2-1}{2}\right)} \frac{\left\{\tau\left(1 - \frac{1}{\delta}\right)\right\}^{i_2} t^{i_2} (1 - (1-\tau)t)^{-i_2}}{i_2!} = \left(1 - \frac{\varrho_2 t}{1 - \varrho_3 t}\right)^{-\frac{n_2-1}{2}}$$

と変形した。ここで、式 (14) の左辺に関して

$$j_1 = i_1 + i_2 + i_3, \quad j_2 = i_2 + i_3, \quad j_3 = i_2$$

と級数項の表現を変更する。これにより式 (14) の左辺は

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{j_1} \sum_{j_3=0}^{j_2} \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + j_2\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + j_3\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{n_2-1}{2} + j_3\right)}{\Gamma\left(\frac{n_2-1}{2}\right)} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{j_1-j_2} \left(1 - \frac{1}{\delta}\right)^{j_3} (1-\tau)^{j_2-j_3}$$

$$\times \frac{e^{-\frac{\gamma}{2}} \delta^{-\frac{n_2-1}{2}} \tau^{\frac{n_1+n_2-2}{2} + j_3}}{(j_1-j_2)!(j_2-j_3)!j_3!} t^{j_1} \equiv \sum_{j_1=0}^{\infty} b_{j_1} t^{j_1} \quad (16)$$

と表すことができる。また式 (14) の右辺に関して、自然対数を取り、さらに自然対数を級数展開することにより

$$\log \frac{e^{-\varrho_1} (1 - \varrho_2 - \varrho_3)^{\frac{n_2-1}{2}} (1 - \varrho_3)^{\frac{n_1-1}{2}}}{e^{-\varrho_1 t} (1 - \varrho_2 t - \varrho_3 t)^{\frac{n_2-1}{2}} (1 - \varrho_3 t)^{\frac{n_1-1}{2}}} \equiv \log b_0 + \sum_{j_1=1}^{\infty} \frac{a_{j_1} t^{j_1}}{j_1} \quad (17)$$

を得る。したがって、式 (14) の両辺に関して自然対数をとることにより、式 (16), (17) を用いて

$$\log \sum_{j_1=0}^{\infty} b_{j_1} t^{j_1} \equiv \log b_0 + \sum_{j_1=1}^{\infty} \frac{a_{j_1} t^{j_1}}{j_1} \quad (18)$$

という形の関係式を得ることができる。この式 (18) の関係式に基づき、係数 b_{j_1} は右辺における係数 a_{j_1} , $j_1 = 1, 2, \dots$ により

$$a_1 = \varrho_1 + \frac{n_1-1}{2} \varrho_3 + \frac{n_2-1}{2} (\varrho_2 + \varrho_3) \quad (19)$$

$$a_{j_1} = \frac{n_1-1}{2} \varrho_3^{j_1} + \frac{n_2-1}{2} (\varrho_2 + \varrho_3)^{j_1} \quad (20)$$

$$b_0 = e^{-\varrho_1}(1 - \varrho_2 - \varrho_3)^{\frac{n_2-1}{2}}(1 - \varrho_3)^{\frac{n_1-1}{2}} \quad (21)$$

$$b_{j_1} = \frac{1}{j_1!} \sum_{h=0}^{j_1-1} a_{j_1-h} b_h \quad (22)$$

と漸化式表現することができる(柴田, 1980). ここで, 式 (14) において上述の漸化式表現を得るため実数 t を利用したが, 式 (9) は式 (14) において $t = 1$ に対応する. このとき, 式 (14) に $t = 1$ を代入することより左辺は式 (9) に一致し, 右辺は 1 となることは明らかである. すなわち, $\omega_1 = 1$ が確認される. ここに, 式 (16) での係数 b_{j_1} を式 (19)~(22) の漸化式に基づき表現することができる. すなわち, ガンマ関数や階乗関数の個々においては, その関数に含まれる変数の増加に伴う爆発的な関数値の増加のためその数値計算を行うことは非常に厄介なものとなるが, ガンマ関数や階乗関数の比の形を利用することによって, 無限級数和の中にガンマ関数や階乗関数を含む式 (7), (8) のキュムラントの表現式を具体的に数値評価することができる. これらの漸化式を利用することにより, コンピュータ・プログラムを与えることが可能となる. さらに, 式 (10), (11) に含まれるその他のガンマ関数や階乗関数を含む無限級数項も同様の係数によって書き改めることができ, その数値計算のためのコンピュータ・プログラムも漸化式表現を適用することで与えることができる(付録 C 参照). したがって, キュムラントに含まれる計算が困難なガンマ関数や階乗関数を含む多重の無限級数の和を本研究で導いた係数の漸化式表現を用いて数値計算することが可能となり, キュムラントを具体的に数値評価することができる. これらの表現法を適用することにより, 式 (7), (8) で与えられる 1 次, 2 次キュムラント $\kappa_{1|1}, \kappa_{2|1}$ における ω_2, ω_3 を

$$\begin{aligned} \omega_2 = & -\frac{n_1+n_2}{2} \sum_{j_1=0}^{\infty} b_{j_1} \psi^{(0)}\left(\frac{n_1+n_2-1}{2} + j_1\right) + \frac{n_1+n_2}{2} \sum_{j_2=0}^{\infty} b_{j_2}^{(2)} \psi^{(0)}\left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + j_2\right) \\ & + \sum_{j_3=0}^{\infty} b_{j_3}^{(3)} \left\{ \frac{n_2}{2} \psi^{(0)}\left(\frac{n_2-1}{2} + j_3\right) - \frac{n_1+n_2}{2} \psi^{(0)}\left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + j_3\right) \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \omega_3 = & -\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)^2 \sum_{j_1=0}^{\infty} b_{j_1} \left\{ \psi^{(1)}\left(\frac{n_1+n_2-1}{2} + j_1\right) - \left(\psi^{(0)}\left(\frac{n_1+n_2-1}{2} + j_1\right)\right)^2 \right\} \\ & + \left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)^2 \sum_{j_2=0}^{\infty} b_{j_2}^{(2)} \left\{ \psi^{(1)}\left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + j_2\right) + \left(\psi^{(0)}\left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + j_2\right)\right)^2 \right\} \\ & + \sum_{j_3=0}^{\infty} b_{j_3}^{(3)} \left\{ \left(\frac{n_2}{2}\right)^2 \psi^{(1)}\left(\frac{n_2-1}{2} + j_3\right) - \left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)^2 \psi^{(1)}\left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + j_3\right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{n_2}{2} \psi^{(0)}\left(\frac{n_2-1}{2} + j_3\right) - \frac{n_1+n_2}{2} \psi^{(0)}\left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + j_3\right)\right)^2 \right\} \\ & - \frac{(n_1+n_2)^2}{2} \sum_{j_2=0}^{\infty} \sum_{j_4=0}^{\infty} b_{j_2}^{(2)} b_{j_4}^{(4)} \psi^{(0)}\left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + j_2\right) \psi^{(0)}\left(\frac{n_1+n_2-1}{2} + j_2 + j_4\right) \\ & + \sum_{j_3=0}^{\infty} \sum_{j_5=0}^{\infty} b_{j_3}^{(3)} b_{j_5}^{(5)} \left\{ \frac{n_2(n_1+n_2)}{2} \psi^{(0)}\left(\frac{n_2-1}{2} + j_3\right) \psi^{(0)}\left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + j_3 + j_5\right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{(n_1+n_2)^2}{2}\psi^{(0)}\left(\frac{n_1+n_2-2}{2}+j_3\right)\psi^{(0)}\left(\frac{n_1+n_2-2}{2}+j_3+j_5\right)\Big\} \\
 & +\sum_{j_3=0}^{\infty}\sum_{j_4=0}^{\infty}\sum_{j_5=0}^{\infty}b_{j_3}^{(3)}b_{j_4}^{(4)}b_{j_5|j_3}^{(5)}\left\{\frac{(n_1+n_2)^2}{2}\psi^{(0)}\left(\frac{n_1+n_2-2}{2}+j_3\right)\psi^{(0)}\left(\frac{n_1+n_2-1}{2}+j_3+j_4+j_5\right)\right. \\
 & \quad \left.-\frac{n_2(n_1+n_2)}{2}\psi^{(0)}\left(\frac{n_2-1}{2}+j_3\right)\psi^{(0)}\left(\frac{n_1+n_2-1}{2}+j_3+j_4+j_5\right)\right\} \quad (24)
 \end{aligned}$$

と書き改めることができる。また、本研究で導出した式 (5) のキウムラント母関数より求まる高次のキウムラントについても上述の係数を利用することで提案する計算法により算出することができる。ここに、実際の数値計算において、式 (15) の冪級数展開が成立するための条件として、 $|\alpha| < 1$ の制約をもつため

$$-1 < \varrho_3 < 1, \quad -1 < \frac{\varrho_2}{1-\varrho_3} < 1$$

の関係を満足する必要がある。また、式 (17) に関して自然対数の級数展開を利用するため

$$-1 < \varrho_2 + \varrho_3 < 1$$

の関係を満足する必要がある。これらより、上述に示すキウムラントに関する計算法を採用する際、 δ に関して

$$1 < \delta < 2 + \frac{n_2}{n_1} \quad (25)$$

の条件が与えられることとなる。式 (25) の条件のもとで式 (23), (24) における係数 $b_{j_2}^{(2)}, b_{j_3}^{(3)}, b_{j_4}^{(4)}, b_{j_5|j_3}^{(5)}$ のいずれも 0 に収束するためキウムラントの計算が可能となる。

5. 対数尤度比統計量の近似分布

ここではまず、提案した計算法を適用し、算出される対数尤度比統計量 λ の 1 次、2 次キウムラント $\kappa_{1|1}, \kappa_{2|1}$ の数値検証を行う。さらに、式 (25) により与えられる範囲に対応する仮説のもとでの対数尤度比統計量 λ の任意のサンプル・サイズに関する近似分布について考察する。まず表 1 に、サンプル・サイズ (n_1, n_2) 、平均差の係数 ε および分散比 δ のいくつかの組合せのもとで、式 (7), (8) として導出される 1 次、2 次キウムラント $\kappa_{1|1}, \kappa_{2|1}$ に関して本研究中で提案した計算法を用いて算出される値と 10 万回のシミュレーションにより求められた対数尤度比統計量 λ の平均、分散の推定値を与える。表 1 の結果より、導出した 1 次、2 次キウムラント $\kappa_{1|1}, \kappa_{2|1}$ の値はシミュレーションの結果に精度よく対応していることが知られる。このことから、導出した 1 次、2 次キウムラント $\kappa_{1|1}, \kappa_{2|1}$ の値が対数尤度比統計量 λ の平均、分散の真値を表しているといえる。同時に、これらの数値例により、導出したキウムラントの理論式およびその数値評価に適用した計算法の有効性が確認される。

ここで、検定統計量である対数尤度比統計量 λ の帰無仮説および対立仮説のもとでの近似分布として、分布関数が

$$F(z) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{z}{r}\right)^m\right\} \quad (26)$$

のワイブル分布を考える。式 (26) における m と r は、それぞれ形状母数と尺度母数を表す。こ

表 1. 1 次, 2 次キュムラント $\kappa_{1||}, \kappa_{2||}$ と平均, 分散のシミュレーション値 $\hat{\kappa}_{1||}, \hat{\kappa}_{2||}$ の比較

		$(n_1, n_2) = (5, 3)$		$(n_1, n_2) = (5, 5)$		$(n_1, n_2) = (5, 6)$		$(n_1, n_2) = (5, 15)$	
ε	δ	$\kappa_{1 }$	$\hat{\kappa}_{1 }$	$\kappa_{1 }$	$\hat{\kappa}_{1 }$	$\kappa_{1 }$	$\hat{\kappa}_{1 }$	$\kappa_{1 }$	$\hat{\kappa}_{1 }$
0.0	1.0	1.575	1.574	1.365	1.360	1.328	1.324	1.251	1.251
0.2	1.0	1.618	1.615	1.420	1.421	1.387	1.385	1.330	1.331
0.4	1.0	1.744	1.743	1.583	1.578	1.563	1.568	1.563	1.567
0.6	1.0	1.947	1.936	1.845	1.845	1.847	1.846	1.940	1.930
0.0	1.2	1.588	1.579	1.382	1.379	1.347	1.348	1.279	1.282
0.0	1.4	1.619	1.610	1.424	1.425	1.393	1.398	1.343	1.340
0.0	1.6	1.661	1.656	1.480	1.477	1.454	1.445	1.427	1.421
0.2	1.2	1.627	1.630	1.432	1.432	1.401	1.401	1.348	1.351
0.2	1.4	1.655	1.653	1.470	1.475	1.442	1.445	1.405	1.402
0.2	1.6	1.695	1.691	1.523	1.527	1.499	1.498	1.482	1.488
0.4	1.2	1.744	1.740	1.581	1.582	1.560	1.567	1.552	1.550
0.4	1.4	1.764	1.769	1.607	1.609	1.588	1.584	1.587	1.596
0.4	1.6	1.796	1.805	1.649	1.647	1.634	1.626	1.647	1.653
0.6	1.2	1.932	1.934	1.821	1.821	1.818	1.824	1.885	1.883
0.6	1.4	1.939	1.938	1.828	1.826	1.825	1.820	1.885	1.891
0.6	1.6	1.961	1.955	1.855	1.858	1.853	1.838	1.917	1.920
ε	δ	$\kappa_{2 }$	$\hat{\kappa}_{2 }$	$\kappa_{2 }$	$\hat{\kappa}_{2 }$	$\kappa_{2 }$	$\hat{\kappa}_{2 }$	$\kappa_{2 }$	$\hat{\kappa}_{2 }$
0.0	1.0	2.446	2.465	1.844	1.831	1.749	1.739	1.568	1.547
0.2	1.0	2.543	2.539	1.965	1.972	1.879	1.888	1.733	1.756
0.4	1.0	2.821	2.794	2.313	2.316	2.251	2.268	2.206	2.201
0.6	1.0	3.243	3.220	2.837	2.821	2.811	2.794	2.934	2.921
0.0	1.2	2.466	2.443	1.872	1.863	1.782	1.799	1.616	1.625
0.0	1.4	2.516	2.493	1.940	1.940	1.890	1.872	1.718	1.698
0.0	1.6	2.586	2.553	2.029	2.017	1.949	1.939	1.843	1.825
0.2	1.2	2.558	2.554	1.983	1.981	1.898	1.873	1.749	1.768
0.2	1.4	2.603	2.614	2.040	2.047	1.992	1.976	1.829	1.830
0.2	1.6	2.668	2.642	2.122	2.145	2.043	2.026	1.936	1.970
0.4	1.2	2.823	2.844	2.300	2.296	2.235	2.249	2.136	2.125
0.4	1.4	2.854	2.918	2.331	2.303	2.291	2.265	2.151	2.167
0.4	1.6	2.906	2.921	2.390	2.401	2.318	2.308	2.209	2.216
0.6	1.2	3.227	3.247	2.782	2.807	2.742	2.732	2.736	2.759
0.6	1.4	3.240	3.223	2.777	2.773	2.750	2.709	2.656	2.674
0.6	1.6	3.273	3.244	2.802	2.834	2.739	2.694	2.640	2.642

のとき, ワイブル分布における期待値 $E[z]$ と分散 $V[z]$ は

$$E[z] = r\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) \quad (27)$$

$$V[z] = r^2\Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right) - E[z]^2 \quad (28)$$

により与えられる. これらより, 式 (27), (28) の平均, 分散を統計量 λ の 1 次, 2 次キュムラント $\kappa_{1||}, \kappa_{2||}, i = 0, 1$ に等価させることにより

$$\frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{m_i}\right)}{\left\{\Gamma\left(1 + \frac{1}{m_i}\right)\right\}^2} = \frac{\kappa_{2|i}}{\kappa_{1|i}^2} + 1, \quad r_i = \frac{\kappa_{1|i}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{m_i}\right)}$$

の関係満足する形状母数 m_i と尺度母数 r_i をもつワイブル分布により統計量 λ の近似分布を帰無仮説と対立仮説のそれぞれの場合に関して与える (有蘭ら, 1995; 渡壁ら, 1996; Watakabe et al., 1999). したがって, 統計量 λ の上側 100 α %点 $\lambda(\alpha)$ は $\kappa_{1|i}, \kappa_{2|i}$ のもとで与えられる形状母数 m_i と尺度母数 r_i より

$$\lambda(\alpha) = r_i (-\log \alpha)^{1/m_i} \quad (29)$$

として与えられる. ここで, 検定統計量 λ の帰無仮説のもとでの漸近分布は周知のとおり自由度 2 のカイ二乗分布である. 一方, 上述のワイブル分布による近似においても, 帰無仮説のもとで $n_1, n_2 \rightarrow \infty$ のとき $m_0 = 1, r_0 = 1$ となり, その漸近特性が尤度比統計量の一般的な漸近特性である自由度 2 のカイ二乗分布への収束と矛盾しないことが確認できる (付録 D 参照). また, 渡壁ら (1996) および Watakabe et al. (1999) においては本研究での 2 標本の問題とは別に 1 標本の場合の対数尤度比統計量の任意の仮説および任意のサンプル・サイズでの近似分布について考察している. そのなかで, 1 次, 2 次のキウムラントを利用するワイブル分布による近似に加えて, 同じく 1 次と 2 次のキウムラントを利用する Patnaik 変換 (Patnaik, 1949) に基づくカイ二乗分布による近似や高次のキウムラントを利用した Cornish-Fisher 展開や Laguerre 展開による近似についても考察されている. さらにこれらの近似分布に関する比較考察の結果, 帰無仮説のもとでは 1 次と 2 次のキウムラントを利用するワイブル分布やカイ二乗分布による近似で十分な精度が得られることが確認されている. また, 対立仮説のもとでは精度的にワイブル分布による近似や Laguerre 展開による近似が優れていることが報告され, 計算量を勘案すればワイブル分布による近似が推奨されている. この結果を参考に, 本研究で扱う 2 標本の場合において, 統計量 λ の任意の仮説および任意のサンプル・サイズでの近似分布としてワイブル分布を採用している.

ここで, 表 2 としてサンプル・サイズ (n_1, n_2) , 平均差の係数 ε , 分散比 δ のいくつかの組合せのもとで, 式 (29) の上側確率点 $\lambda(\alpha)$, および上側確率 α に対して実現される上側確率の値を 10 万回のシミュレーションにより求めた結果を示す. 具体的なシミュレーション手順については, 平均差の係数 ε , 分散比 δ により特徴付けられる 2 つの正規母集団分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ と $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ における乱数をサンプル・サイズに応じて発生させ, それらに基づき算出される統計量 λ を 10 万個発生させ, それらの値を式 (29) の上側確率点 $\lambda(\alpha)$ と比較している. すなわち, 表 2 は式 (29) により与えた上側確率点 $\lambda(\alpha)$ の有効性を検証するために $\lambda(\alpha)$ に対する上側確率 α のシミュレーション値を表している. 表 2 の結果より, 全般的にワイブル分布として与える近似分布が十分な精度をもつことがいえる. これより, この近似分布をもとに正規 2 標本同時検定を設計し, その検出力特性を明らかにすることが可能となる.

6. 正規 2 標本同時検定の設計および検出力特性

具体的に, 2 つの正規母集団 $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$ に関して, 帰無仮説

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \text{ and } \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

の同時検定問題に関する有意水準 α の検定を設計する. ここで, 帰無仮説のもとでの母集団分布

表 2. 10 万回のシミュレーションによる α の実現確率 (%)

$(n_1, n_2) = (5, 3)$		上側確率 α (%)								
ε	δ	99.0	95.0	90.0	70.0	50.0	30.0	10.0	5.0	1.0
0.0	1.0	99.0	94.9	89.9	70.0	50.0	30.1	10.1	4.9	1.0
0.2	1.0	99.0	95.0	90.0	69.9	49.9	30.2	10.0	4.9	1.0
0.4	1.0	98.9	94.8	89.7	69.6	49.7	29.9	10.0	5.0	1.0
0.6	1.0	98.9	94.7	89.6	69.5	49.6	30.1	10.0	5.0	1.0
0.0	1.2	99.0	94.9	89.8	70.0	50.1	30.2	10.0	5.0	1.0
0.0	1.4	98.9	94.6	89.5	69.6	50.1	30.3	10.3	5.1	1.0
0.0	1.6	98.7	94.4	89.2	69.6	50.0	30.4	10.1	5.0	1.0
0.2	1.2	98.9	94.8	89.8	69.6	49.9	30.0	9.9	4.9	0.9
0.2	1.4	98.9	94.8	89.8	70.0	50.5	30.4	10.1	5.1	1.0
0.2	1.6	98.9	94.8	89.8	69.9	50.3	30.1	10.0	5.0	0.9
0.4	1.2	98.9	94.6	89.6	69.6	50.1	30.3	10.1	5.0	1.0
0.4	1.4	98.8	94.6	89.4	69.7	49.8	30.1	10.2	5.0	1.0
0.4	1.6	98.8	94.6	89.5	69.8	50.2	30.4	10.3	5.2	1.0
0.6	1.2	98.7	94.2	89.2	69.7	50.3	30.6	10.3	5.1	0.9
0.6	1.4	98.7	94.4	89.2	69.6	50.1	30.4	10.1	5.0	1.0
0.6	1.6	98.8	94.2	89.0	69.2	50.1	30.4	10.1	5.0	0.9
$(n_1, n_2) = (5, 5)$		上側確率 α (%)								
ε	δ	99.0	95.0	90.0	70.0	50.0	30.0	10.0	5.0	1.0
0.0	1.0	99.0	95.0	90.0	69.9	49.9	30.1	10.0	5.0	1.0
0.2	1.0	98.9	94.8	89.8	69.6	49.6	29.7	10.1	5.1	1.0
0.4	1.0	98.9	94.6	89.6	69.6	49.8	29.9	10.0	5.0	1.0
0.6	1.0	98.7	94.2	89.1	69.4	50.1	30.4	10.1	5.0	0.9
0.0	1.2	99.0	94.9	89.9	69.8	49.9	30.0	10.0	5.0	1.0
0.0	1.4	99.0	94.9	89.8	69.9	50.2	30.3	10.0	5.0	1.0
0.0	1.6	98.8	94.6	89.6	69.8	50.1	30.3	10.1	5.0	0.9
0.2	1.2	99.0	94.9	89.8	69.8	49.9	30.3	10.0	5.0	1.0
0.2	1.4	98.9	94.8	89.7	69.8	50.0	30.2	10.1	5.0	0.9
0.2	1.6	98.9	94.6	89.4	69.7	50.0	30.1	9.9	5.0	1.0
0.4	1.2	98.9	94.7	89.5	69.6	50.0	30.1	10.1	5.1	1.0
0.4	1.4	98.9	94.6	89.5	69.7	49.9	30.2	10.1	5.0	1.0
0.4	1.6	98.7	94.5	89.5	69.7	50.0	30.2	9.9	5.0	0.9
0.6	1.2	98.7	94.2	89.1	69.6	50.1	30.3	10.2	5.0	0.9
0.6	1.4	98.7	94.3	89.1	69.5	50.3	30.5	10.2	5.0	1.0
0.6	1.6	98.7	94.3	89.2	69.7	50.4	30.7	10.3	5.1	1.0

(次頁に続く)

$N(\mu_1, \sigma_1^2)$ と $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ からそれぞれサイズ n_1, n_2 のサンプルがとられたとき, $\kappa_{1|0}$ と $\kappa_{2|0}$ に基づき定められる統計量 λ の分布を近似するワイブル分布での形状母数と尺度母数を既述のようにそれぞれ m_0, r_0 と表す. このとき, 統計量 λ の帰無仮説 H_0 のもとでの上側 $100\alpha\%$ 点 $\lambda(\alpha|H_0)$ は

$$\lambda(\alpha|H_0) = r_0(-\log \alpha)^{1/m_0} \quad (30)$$

で与えることができ, これを正規 2 標本同時検定の有意水準 α のもとでの棄却点として採用することができる(有蘭ら, 1997).

$(n_1, n_2) = (5, 6)$		上側確率 α (%)								
ε	δ	99.0	95.0	90.0	70.0	50.0	30.0	10.0	5.0	1.0
0.0	1.0	98.9	94.9	89.8	69.8	49.9	30.0	10.0	5.1	1.1
0.2	1.0	98.9	94.9	89.8	69.8	49.7	29.9	10.0	5.0	1.0
0.4	1.0	98.9	94.6	89.4	69.4	49.8	30.0	10.0	4.9	1.0
0.6	1.0	98.6	94.2	88.8	69.5	50.4	30.6	10.1	5.0	0.9
0.0	1.2	99.0	95.0	90.0	70.2	50.3	30.2	10.1	5.1	1.0
0.0	1.4	99.0	94.8	89.9	70.3	50.4	30.3	9.9	4.9	0.9
0.0	1.6	98.9	94.7	89.6	69.7	50.1	30.3	10.1	5.1	1.0
0.2	1.2	98.9	94.8	89.7	69.7	50.0	30.2	10.0	5.0	1.1
0.2	1.4	98.9	94.9	89.9	70.2	50.2	30.2	10.0	4.9	0.9
0.2	1.6	98.9	94.6	89.5	69.8	50.1	30.3	10.2	5.1	1.0
0.4	1.2	98.8	94.6	89.5	69.7	50.1	30.2	10.2	5.1	1.0
0.4	1.4	98.9	94.7	89.6	69.9	50.3	30.3	10.1	5.0	0.9
0.4	1.6	98.8	94.4	89.3	69.4	50.0	30.2	10.1	5.0	0.9
0.6	1.2	98.7	94.3	89.2	69.5	50.0	30.4	10.0	5.0	0.9
0.6	1.4	98.6	94.1	89.0	69.7	50.3	30.5	10.1	4.9	0.9
0.6	1.6	98.6	94.0	88.9	69.4	50.1	30.3	10.2	5.0	1.0
$(n_1, n_2) = (5, 15)$		上側確率 α (%)								
ε	δ	99.0	95.0	90.0	70.0	50.0	30.0	10.0	5.0	1.0
0.0	1.0	99.0	94.9	90.0	69.8	50.0	30.2	10.0	5.0	1.0
0.2	1.0	98.9	94.9	89.8	69.7	50.0	30.0	10.1	5.0	1.0
0.4	1.0	98.9	94.6	89.5	69.5	49.7	30.1	10.1	5.1	1.0
0.6	1.0	98.6	94.0	88.9	69.5	50.3	30.6	10.1	4.9	1.0
0.0	1.2	99.0	95.0	90.1	69.8	49.8	29.9	10.0	5.0	1.0
0.0	1.4	98.9	94.8	89.9	69.9	50.1	30.4	10.2	5.0	1.0
0.0	1.6	98.8	94.5	89.5	69.8	50.0	30.1	10.0	5.0	1.0
0.2	1.2	99.0	94.9	89.9	69.9	50.1	30.2	10.0	5.0	1.0
0.2	1.4	98.9	94.6	89.5	69.8	50.1	30.2	10.0	4.9	0.9
0.2	1.6	98.8	94.4	89.4	69.8	50.2	30.3	10.1	4.9	1.0
0.4	1.2	98.8	94.5	89.3	69.9	50.4	30.4	10.2	5.0	1.0
0.4	1.4	98.7	94.3	89.2	69.7	50.2	30.5	10.3	5.1	1.0
0.4	1.6	98.7	94.2	89.2	69.7	50.4	30.4	9.9	4.9	0.9
0.6	1.2	98.5	94.1	88.9	69.6	50.2	30.2	9.9	4.8	0.9
0.6	1.4	98.6	94.2	89.2	69.7	50.0	30.3	10.0	4.8	0.9
0.6	1.6	98.5	94.0	89.0	69.7	50.2	30.3	9.9	4.9	1.0

さらに、2つの正規母集団 $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$ に関して

$$\mu_1 - \mu_2 = \varepsilon \sigma_1 \quad \text{and/or} \quad \sigma_2^2 / \sigma_1^2 = \delta$$

となる関係式によって表現された対立仮説における検出力について考察する。この関係式に関して既述のとおり、検出力の評価法を構築するにあたっては $\varepsilon \geq 0, \delta \geq 1$ を考えれば十分である。また、 δ に関して式 (25) により与えられる条件は、提案する評価法における数値計算上の制約を意味する。ここで、2つの正規分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ と $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ からそれぞれサイズ n_1, n_2 のサンプルがとられたとき、統計量 λ の近似分布を形状母数 m_1 、尺度母数 r_1 をもつワイブル分布で与える。このとき、平均差の係数 ε 、分散比 δ により特徴付けられる2つの母集団分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ と

表 3. 検出力の理論値とシミュレーションによる結果の比較 (%)

ε	δ	α (%)				α (%)			
		1.0	1.0(s)	5.0	5.0(s)	1.0	1.0(s)	5.0	5.0(s)
		$(n_1, n_2) = (5, 3)$				$(n_1, n_2) = (5, 5)$			
0.2	1.0	1.09	1.08	5.34	5.37	1.15	1.15	5.54	5.57
0.4	1.0	1.37	1.35	6.37	6.37	1.65	1.61	7.20	7.24
0.6	1.0	1.86	1.82	8.13	8.15	2.55	2.51	10.08	10.20
0.0	1.2	1.02	1.02	5.08	5.05	1.03	1.03	5.14	5.15
0.0	1.4	1.06	1.04	5.29	5.29	1.12	1.09	5.49	5.49
0.0	1.6	1.13	1.11	5.58	5.52	1.23	1.21	5.97	6.00
0.2	1.2	1.10	1.08	5.40	5.41	1.18	1.15	5.64	5.68
0.2	1.4	1.15	1.13	5.59	5.60	1.25	1.24	5.95	5.96
0.2	1.6	1.21	1.19	5.87	5.88	1.36	1.32	6.41	6.45
0.4	1.2	1.37	1.33	6.37	6.37	1.63	1.59	7.16	7.18
0.4	1.4	1.41	1.38	6.52	6.51	1.67	1.64	7.38	7.43
0.4	1.6	1.46	1.42	6.76	6.79	1.77	1.71	7.76	7.82
0.6	1.2	1.84	1.77	8.02	8.08	2.45	2.43	9.78	9.94
0.6	1.4	1.86	1.81	8.08	8.19	2.44	2.40	9.83	9.93
0.6	1.6	1.90	1.87	8.26	8.35	2.50	2.42	10.08	10.24
		$(n_1, n_2) = (5, 6)$				$(n_1, n_2) = (5, 15)$			
		1.0	1.0(s)	5.0	5.0(s)	1.0	1.0(s)	5.0	5.0(s)
		$(n_1, n_2) = (5, 6)$				$(n_1, n_2) = (5, 15)$			
0.2	1.0	1.17	1.18	5.61	5.63	1.25	1.23	5.85	5.86
0.4	1.0	1.74	1.69	7.47	7.53	2.09	2.09	8.55	8.67
0.6	1.0	2.79	2.75	10.73	10.91	3.80	3.74	13.45	13.72
0.0	1.2	1.04	1.03	5.17	5.15	1.07	1.06	5.26	5.25
0.0	1.4	1.19	1.11	5.66	5.59	1.22	1.21	5.88	5.89
0.0	1.6	1.27	1.24	6.10	6.15	1.42	1.40	6.69	6.69
0.2	1.2	1.20	1.17	5.72	5.74	1.27	1.24	5.99	6.03
0.2	1.4	1.20	1.28	6.16	6.07	1.40	1.37	6.53	6.51
0.2	1.6	1.41	1.36	6.58	6.60	1.59	1.57	7.29	7.31
0.4	1.2	1.71	1.66	7.42	7.47	1.96	1.91	8.30	8.34
0.4	1.4	1.80	1.74	7.72	7.71	2.00	1.96	8.59	8.62
0.4	1.6	1.86	1.83	8.07	8.19	2.13	2.08	9.19	9.24
0.6	1.2	2.65	2.58	10.36	10.48	3.35	3.28	12.52	12.64
0.6	1.4	2.67	2.57	10.43	10.55	3.19	3.13	12.36	12.47
0.6	1.6	2.67	2.60	10.64	10.75	3.20	3.10	12.65	12.73

* (s) はシミュレーションよりもとまる推定値をあらわす。

$N(\mu_2, \sigma_2^2)$ の対立仮説のもとでの式 (30) の棄却点に対する検出力 $1 - \beta$ を評価する近似式として

$$1 - \beta = \exp \left\{ - \left(\frac{\lambda(\alpha|H_0)}{r_1} \right)^{m_1} \right\} \quad (31)$$

を与えることができる。これより、式 (31) を用いて各種対立仮説に対する検出力特性を評価することができる。このとき、式 (31) を用いての検出力の精度は帰無仮説および対立仮説での統計量 λ の近似分布の精度に依存する。表 2 の結果から帰無仮説および対立仮説での統計量 λ に与えた近似分布の精度は保証されることより、検出力の精度も保証される。参考のために表 3 に、式 (31) により算出された検出力と式 (30) の棄却点に対してシミュレーションにより求められた検出力の推定値を示す。ここに、提案した検出力の評価法においては、対立仮説の範囲に式 (25) とし

て与えられる数値計算上の制約をもつこととなるが、通常 $n_1 \approx n_2$ の場合を想定すれば、少なくとも $\delta < 3$ 、すなわち分散比が 3 より小さい場合において検出力を評価できることより十分実用性を確保できるものと考えられる。また、数値計算上の制約である式 (25) の範囲外の状況においても、本研究で提案する手法、すなわち、検定統計量である対数尤度比統計量 λ のキウムラント特性を利用し統計量 λ に近似分布を与える手法においてシミュレーションを利用することによりその検出力特性を与えることは可能である。

7. おわりに

本研究では、2つの正規母集団分布の同等性に関する検定問題、すなわち仮説「 $\mu_1 = \mu_2$ and $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 」を検定する問題について考察した。この検定問題において任意の仮説のもとでの検定統計量に対し、キウムラント母関数を導出した。導出した式 (5) のキウムラント母関数を用いることにより、任意の仮説のもとでの検定統計量についての任意の次数のキウムラントの表現式を理論的に求めることが可能となる。しかし、式 (7)~(11) からわかるようにキウムラントの表現式はガンマ関数や階乗関数を含む多重無限級数で与えられ、そのままの表現でそれらを数値計算により具体的に求めるためのコンピュータ・プログラムを与えることは必ずしも容易ではない。その問題に対し、検定統計量の 1 次と 2 次のキウムラントの計算法について考察した。提案したキウムラントの計算法を適用することにより、式 (25) を条件としてこれらのキウムラントの具体的な数値評価を可能とした。さらに、これらのキウムラントの計算法の有効性および実現値との比較をシミュレーションにより検証した。最後に算出されるキウムラントの値を利用し、任意のサンプル・サイズに対応する形で検定統計量である対数尤度比統計量の近似分布としてワイブル分布を与え、その近似精度の検証を行い、正規 2 標本同時検定の検出力特性の数値評価を行った。これより、式 (25) の条件を満足する対立仮説のもとでの対数尤度比統計量の精度よい近似分布が与えられ、有効な検出力の評価法が提案されたといえる。

ここで、本研究で提案したキウムラントの計算法には適用範囲に制限がある。ただし適用範囲の外の状況に対しても、例えばシミュレーションによりキウムラントの推定値が得られれば、これらの値を本研究での近似分布の設定法に与えることも可能である。これらの値を利用し、統計量 λ に近似分布を与えることで、本研究と同様の手法を用いて検出力特性の評価を与えることはできるものと考えられる。ただし、この方法を採用するのであれば検出力特性の評価に関して近似分布を勘案せずシミュレーションにより検出力の推定値を得るほうが労力的に有利であると考えられる。本研究では、シミュレーションによる方法とは別に、検出力を理論的に評価する方法を構築することが目的であることから上述の方法は取って採用しないものとする。ただし、提案した検出力評価法の適用範囲拡大のためのキウムラントの数値計算法の改善は興味ある問題であるので今後の検討課題としたい。

謝 辞 本稿の改訂にあたり、査読者ならびに編集理事の方々には多くの適切かつ建設的なコメントを頂きました。ここに深く感謝いたします。

参 考 文 献

- Anderson, T.W. (1958): *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. John Wiley & Sons.
- Anderson, T.W. (1987): *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis* (2nd ed.). John Wiley & Sons.
- 有蘭育生・勝山 茂・太田 宏 (1997): 小サンプルにおける正規母集団分布に関する 2 標本尤度比検定. 日本経営工学会論文誌 Vol.47, No.6, 367-372.
- 有蘭育生・金川明弘・泰園澄俊徳・太田 宏 (1995): 対数尤度比統計量の統計的特性と Patnaik/Weibull 近似に関する考察. 日本経営工学会論文誌 Vol.46, No.5, 401-408.
- 日本数学会編 (1987): 岩波数学辞典 第 3 版. 岩波書店.
- Kendall, M.G. and Stuart, A. (1979): *The Advanced Theory of Statistics, Vol.II: Inference and Relationship* (4th ed.). Charles Griffin.
- 森口繁一・宇田川桂久・一松 信 (1998): 数学公式 III—特殊函数—. 岩波全書.
- Muirhead, R.J. (1982): *Aspects of Multivariate Statistical Theory*. John Wiley & Sons.
- Patnaik, P.B. (1949): The Non-central χ^2 -and F -distributions and Their Applications. *Biometrika* **36**, 202-232.
- Serfling, R.J. (1980): *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*. John Wiley & Sons.
- 柴田義貞 (1981): 正規分布—特性と応用—. 東京大学出版会.
- 塩谷 実 (1976): 多変量解析における検定統計量の一般分布に対する漸近展開. 日本統計学会誌 6(2), 63-87.
- 塩谷 実 (1977): 多変量解析における検定統計量の一般分布に対する漸近展開—修正—. 日本統計学会誌 7(1), 56.
- Siotani, M., Hayakawa, T. and Fujikoshi, Y. (1985): *Modern Multivariate Statistical Analysis*. American Science Press.
- Stroud, T.W.F. (1972): Fixed alternative and Wald's formulation of the noncentral asymptotic behavior of the likelihood ratio statistic. *Ann. Math. Statist.* **43**, 447-454.
- 竹内 啓 (1972): 数理統計学—データ解析の方法—. 東洋経済新報社.
- Wald, A. (1943): Test of statistical hypotheses concerning several parameters when the number of observations is large. *Trans. Am. Math. Soc.* **54**, 426-482.
- Watakabe, K. and Arizono, I. (1999): The power of the $(\bar{x}, s)$ control chart based on the log-likelihood ratio statistic. *Narval Research Logistics* **46**(8), 928-951.
- 渡壁京子・勝山 茂・有蘭育生 (1996): 正規分布の検定における対数尤度比統計量の近似に関する比較研究. 日本経営工学会論文誌 47(4), 265-273.

(2002 年 4 月 24 日受付 10 月 2 日最終修正 10 月 5 日採択)

著者連絡先: 〒 599-8531 堺市学園町 1-1 大阪府立大学大学院
工学研究科電気・情報系専攻 経営工学分野
有蘭 育生

付 録

A. 同時確率密度関数の導出

$x_{ij}, i = 1, 2, j = 1, \dots, n_i$ はそれぞれ $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ に従う. ただし一般的に, $\mu_1 - \mu_2 = \varepsilon\sigma_1$ および $\sigma_2^2/\sigma_1^2 = \delta$ と表すものとする. 以下ではこれらを

$$x_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma_i^2),$$

と表記する. このとき, 確率変数 $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ はそれぞれ

$$\bar{x}_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2/n_1), \quad \bar{x}_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2/n_2)$$

となり, また, 確率変数 $y_1 \equiv n_1 s_1^2/\sigma_1^2, y_2 \equiv n_2 s_2^2/\sigma_2^2$ はそれぞれ

$$y_1 = \frac{n_1 s_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi_{n_1-1}^2, \quad y_2 = \frac{n_2 s_2^2}{\sigma_2^2} = \frac{n_2 s_2^2}{\delta \sigma_1^2} \sim \chi_{n_2-1}^2$$

と与えられる。ここで、 $\chi_{n_1-1}^2, \chi_{n_2-1}^2$ は自由度 $n_1 - 1, n_2 - 1$ のカイ二乗分布を示す。また、確率変数 $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ は

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \sim N\left(\varepsilon\sigma_1, \left(\frac{1}{n_1} + \frac{\delta}{n_2}\right)\sigma_1^2\right)$$

であり、さらに

$$y_3 \equiv \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2}{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{\delta}{n_2}\right)\sigma_1^2} \sim \chi_{1,\gamma}^2 \quad \left(\gamma = \frac{n_1 n_2 \varepsilon^2}{n_1 \delta + n_2}\right)$$

となる。ここで、 $\chi_{1,\gamma}^2$ は自由度 1、非心度 γ の非心カイ二乗分布を意味する。

同時確率密度関数 $f(u, v)$ を導出するのに、まず (y_1, y_2, y_3) の確率要素を考える。 (y_1, y_2, y_3) の同時確率要素は

$$\frac{2^{-\frac{n_1+n_2-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n_1-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2-1}{2}\right)} \sum_{i_1=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\gamma}{2}}}{i_1!} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{i_1} \frac{2^{-\frac{1}{2}-i_1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i_1\right)} y_1^{\frac{n_1-1}{2}-1} y_2^{\frac{n_2-1}{2}-1} y_3^{\frac{1}{2}+i_1-1} e^{-\frac{y_1+y_2+y_3}{2}} dy_1 dy_2 dy_3 \quad (\text{A.1})$$

と与えられる。ここで

$$u = \frac{\tau y_3}{y_1 + \delta y_2}, \quad v = \frac{y_1}{\delta y_2}, \quad w = y_1 + \delta y_2 + \tau y_3$$

と変数変換する。ただし

$$\tau = \frac{n_1 \delta + n_2}{n_1 + n_2}$$

である。このとき、これらの変数変換におけるヤコビアンは

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial v} & \frac{\partial y_1}{\partial w} \\ \frac{\partial y_2}{\partial u} & \frac{\partial y_2}{\partial v} & \frac{\partial y_2}{\partial w} \\ \frac{\partial y_3}{\partial u} & \frac{\partial y_3}{\partial v} & \frac{\partial y_3}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{w^2}{\tau \delta (1+v)^2 (1+u)^3}$$

と与えられる。式 (A.1) とこれらの変数変換により、同時確率密度関数 $f(v, u, w)$ が

$$\begin{aligned} f(v, u, w) = & e^{-\frac{\gamma}{2}} \delta^{-\frac{n_2-1}{2}} \sum_{i_1=0}^{\infty} \frac{1}{i_1!} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{i_1} \tau^{-(\frac{1}{2}+i_1)} \frac{2^{-\left(\frac{n_1+n_2-1}{2}+i_1\right)}}{\Gamma\left(\frac{n_1-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i_1\right)} v^{\frac{n_1-1}{2}-1} \\ & \times (1+v)^{-\frac{n_1+n_2-2}{2}} (1+u)^{-\left(\frac{n_1+n_2-1}{2}+i_1\right)} u^{\frac{1}{2}+i_1-1} w^{\frac{n_1+n_2-1}{2}+i_1-1} e^{-\frac{w}{2}\left(\frac{\tau+V_u}{\tau V(1+u)}\right)} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

と導出される。ここで、式 (A.2) において確率変数 w について積分することにより、同時確率密度関数 $f(u, v)$ は式 (4) と導出される。

B. キュムラント母関数の導出

微分方程式

$$z(1-z) \frac{d^2 w}{dz^2} + (\zeta_3 - (\zeta_1 + \zeta_2 + 1)z) \frac{dw}{dz} - \zeta_1 \zeta_2 w = 0$$

は超幾何微分方程式と呼ばれ、その解を $\text{Re } \zeta_2 > 0, \text{Re } (\zeta_3 - \zeta_2) > 0$ のとき

$$w = \int_0^1 t^{\zeta_2-1} (1-t)^{\zeta_3-\zeta_2-1} (1-tz)^{-\zeta_1} dt$$

により与えることができる. また, このとき

$$\int_0^1 t^{\zeta_2-1} (1-t)^{\zeta_3-\zeta_2-1} (1-tz)^{-\zeta_1} dt = \frac{\Gamma(\zeta_2)\Gamma(\zeta_3-\zeta_2)}{\Gamma(\zeta_3)} F(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, z) \quad (\text{B.1})$$

と表される. ここに, $z < 1$ で, $(1-zt)^{-\zeta_1}$ は $t \rightarrow 0$ のとき値 1 をもつ枝を表すものとする. この $F(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, z)$ は超幾何関数と呼ばれ, Gauss の級数または超幾何級数と呼ばれる冪級数

$$F(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, z) = \frac{\Gamma(\zeta_3)}{\Gamma(\zeta_1)\Gamma(\zeta_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\zeta_1+n)\Gamma(\zeta_2+n)}{\Gamma(\zeta_3+n)} \frac{z^n}{n!}$$

により与えられる(岩波数学辞典, 1987; 森口ら, 1998). さらに, 式 (B.1) において $t = \frac{1}{1+y}$ と変数変換することにより

$$\int_0^{\infty} (1+y)^{\zeta_1-\zeta_3} y^{\zeta_3-\zeta_2-1} (y+(1-z))^{-\zeta_1} dy = \frac{\Gamma(\zeta_2)\Gamma(\zeta_3-\zeta_2)}{\Gamma(\zeta_3)} F(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, z) \quad (\text{B.2})$$

を得る.

ここで, 式 (3) より

$$M(\theta) = E \left[v^{-\frac{n_1}{2}} (v+1)^{\frac{(n_1+n_2)\theta}{2}} (1+u)^{\frac{(n_1+n_2)\theta}{2}} \right]$$

とおく. さらに, 式 (4) より $M(\theta)$ は

$$M(\theta) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} v^{-\frac{n_1}{2}} (v+1)^{\frac{(n_1+n_2)\theta}{2}} (1+u)^{\frac{(n_1+n_2)\theta}{2}} f(u, v) dudv \quad (\text{B.3})$$

と与えられる. ここでまず, 式 (B.3) における確率変数 v について注目する. 式 (B.2) の関係より

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} (1+v)^{-\frac{(n_1+n_2)(1-\theta)-2}{2}} v^{\frac{n_1(1-\theta)-1}{2}-1} \left(\frac{V}{\tau+Vu} \right)^{\frac{n_1+n_2-1}{2}+i_1} dv \\ &= (u+\tau)^{-\left(\frac{n_1+n_2-1}{2}+i_1\right)} \int_0^{\infty} (1+v)^{\frac{(n_1+n_2)\theta}{2}+i_1} v^{\frac{n_1(1-\theta)-1}{2}-1} \left(v + \frac{\delta u + \tau}{\delta(u+\tau)} \right)^{-\left(\frac{n_1+n_2-1}{2}+i_1\right)} dv \\ &= (u+\tau)^{-\left(\frac{n_1+n_2-1}{2}+i_1\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{n_1(1-\theta)-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2-1}{2}+i_1\right)} \\ & \times \sum_{i_2=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2-1}{2}+i_1+i_2\right)\Gamma\left(\frac{n_2(1-\theta)-1}{2}+i_2\right)\left(1-\frac{\delta u + \tau}{\delta(u+\tau)}\right)^{i_2}}{\Gamma\left(\frac{(n_1+n_2)(1-\theta)-2}{2}+i_2\right)i_2!} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

と変形できる. 次に, 確率変数 u について積分する. ここでも式 (B.2) の関係より

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} (1+u)^{\frac{(n_1+n_2)\theta}{2}} u^{\frac{1}{2}+i_1-1} (u+\tau)^{-\left(\frac{n_1+n_2-1}{2}+i_1\right)} \left(1 - \frac{\delta u + \tau}{\delta(u+\tau)} \right)^{i_2} du \\ &= \tau^{i_2} \left(1 - \frac{1}{\delta} \right)^{i_2} \int_0^{\infty} (1+u)^{\frac{(n_1+n_2)\theta}{2}} u^{\frac{1}{2}+i_1-1} (u+\tau)^{-\left(\frac{n_1+n_2-1}{2}+i_1+i_2\right)} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \tau^{i_2} \left(1 - \frac{1}{\delta}\right)^{i_2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i_1\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2-1}{2} + i_1 + i_2\right)} \sum_{i_3=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{(n_1+n_2)(1-\theta)-2}{2} + i_2 + i_3\right)}{\Gamma\left(\frac{(n_1+n_2)(1-\theta)-1}{2} + i_1 + i_2 + i_3\right)} \\
 &\quad \times \Gamma\left(\frac{n_1+n_2-1}{2} + i_1 + i_2 + i_3\right) \frac{(1-\tau)^{i_3}}{i_3!}
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

を得る. 式 (B.4), 式 (B.5) より $M(\theta)$ は

$$\begin{aligned}
 M(\theta) &= \frac{\Gamma\left(\frac{n_1(1-\theta)-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1-1}{2}\right)} \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{i_3=0}^{\infty} e^{-\frac{\gamma}{2}} \delta^{-\frac{n_2-1}{2}} \tau^{\frac{n_1+n_2-2}{2} + i_2} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{i_1} \left(1 - \frac{1}{\delta}\right)^{i_2} \frac{(1-\tau)^{i_3}}{i_1! i_2! i_3!} \\
 &\quad \times \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2-1}{2} + i_1 + i_2 + i_3\right)}{\Gamma\left(\frac{(n_1+n_2)(1-\theta)-1}{2} + i_1 + i_2 + i_3\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{(n_1+n_2)(1-\theta)-2}{2} + i_2 + i_3\right)}{\Gamma\left(\frac{(n_1+n_2)(1-\theta)-2}{2} + i_2\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{n_2(1-\theta)-1}{2} + i_2\right)}{\Gamma\left(\frac{n_2-1}{2}\right)}
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

と与えられる. 式 (B.6) より, キュムラント母関数 $\eta_1(\theta)$ は

$$\eta(\theta) = \frac{n_1\theta}{2} \log\left(\frac{n_1}{n_1+n_2}\right) + \frac{n_2\theta}{2} \log\left(\frac{n_2}{n_1+n_2}\right) + \log M(\theta)$$

となり, 式 (5) が導出される.

C. 係数の関係式

式 (10), (11) におけるそれぞれのガンマ関数や階乗計算を含む無限級数項に対応させ, 係数 $b_{j_2}^{(2)}, j_2 = 0, 1, 2, \dots, b_{j_3}^{(3)}, j_3 = 0, 1, 2, \dots, b_{j_4}^{(4)}, j_4 = 0, 1, 2, \dots$ および $b_{j_5|j_3}^{(5)}, j_3: \text{定数}, j_5 = 0, 1, 2, \dots$ を

$$b_{j_2}^{(2)} = \sum_{j_3=0}^{j_2} \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + j_2\right) \Gamma\left(\frac{n_2-1}{2} + j_3\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + j_3\right) \Gamma\left(\frac{n_2-1}{2}\right)} \left(1 - \frac{1}{\delta}\right)^{j_3} (1-\tau)^{j_2-j_3} \frac{\delta^{-\frac{n_2-1}{2}} \tau^{\frac{n_1+n_2-2}{2} + j_3}}{(j_2-j_3)! j_3!}$$

$$b_{j_3}^{(3)} = \frac{\Gamma\left(\frac{n_2-1}{2} + j_3\right)}{\Gamma\left(\frac{n_2-1}{2}\right)} \left(1 - \frac{1}{\delta}\right)^{j_3} \frac{\delta^{-\frac{n_2-1}{2}}}{j_3!}$$

$$b_{j_4}^{(4)} = e^{-\frac{\gamma}{2}} \frac{1}{j_4!} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{j_4}$$

$$b_{j_5|j_3}^{(5)} = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + j_3 + j_5\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + j_3\right)} \tau^{\left(\frac{n_1+n_2-2}{2} + j_3\right)} \frac{(1-\tau)^{j_5}}{j_5!}$$

と定めることができ, さらに係数 $a_{j_2}^{(2)}, j_2 = 1, 2, \dots, a_{j_3}^{(3)}, j_3 = 1, 2, \dots, a_{j_4}^{(4)}, j_4 = 1, 2, \dots$ および $a_{j_5|j_3}^{(5)}, j_3: \text{定数}, j_5 = 1, 2, \dots$ に基づき

$$a_{j_2}^{(2)} = \frac{n_1-1}{2} \varrho_3^{j_2} + \frac{n_2-1}{2} (\varrho_2 + \varrho_3)^{j_2}, \quad b_0^{(2)} = (1 - \varrho_2 - \varrho_3)^{\frac{n_2-1}{2}} (1 - \varrho_3)^{\frac{n_1-1}{2}}, \quad b_{j_2}^{(2)} = \frac{1}{j_2} \sum_{h=0}^{j_2-1} a_{j_2-h}^{(2)} b_h^{(2)}$$

$$a_{j_3}^{(3)} = \frac{n_2 - 1}{2} \left(\frac{\varrho_2}{1 - \varrho_3} \right)^{j_3}, \quad b_0^{(3)} = \left(1 - \frac{\varrho_2}{1 - \varrho_3} \right)^{\frac{n_2 - 1}{2}}, \quad b_{j_3}^{(3)} = \frac{1}{j_3} \sum_{h=0}^{j_3-1} a_{j_3-h}^{(3)} b_h^{(3)}$$

$$a_1^{(4)} = \varrho_1, \quad a_2^{(4)} = a_3^{(4)} = \cdots = 0, \quad b_0^{(4)} = e^{-\varrho_1}, \quad b_{j_4}^{(4)} = \frac{1}{j_4} \sum_{h=0}^{j_4-1} a_{j_4-h}^{(4)} b_h^{(4)}$$

$$a_{j_5|j_3}^{(5)} = \left(\frac{n_1 + n_2 - 2}{2} + j_3 \right) \varrho_3^{j_5}, \quad b_{0|j_3}^{(5)} = (1 - \varrho_3)^{\frac{n_1 + n_2 - 2}{2} + j_3}, \quad b_{j_5|j_3}^{(5)} = \frac{1}{j_5} \sum_{h=0}^{j_5-1} a_{j_5-h|j_3}^{(5)} b_{h|j_3}^{(5)}$$

と与えることができる。

D. 漸近特性への収束

尤度比検定に関する一般理論において、統計量 2λ の帰無仮説のもとでの漸近分布は自由度 2 のカイ二乗分布である (Serfling, 1980). ここで、帰無仮説のもとでの対数尤度比統計量 λ の 1 次、2 次キュムラント $\kappa_{1|0}, \kappa_{2|0}$ を表す式 (12), (13) において

$$\psi^{(0)}(z) = \log z - \frac{1}{2z} + O(z^{-2}), \quad \psi^{(1)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + O(z^{-3})$$

の関係より

$$\begin{aligned} \kappa_{1|0} &= \frac{n_1}{2} \log \frac{n_1}{n_1 - 1} + \frac{n_2}{2} \log \frac{n_2}{n_1 - 2} - \frac{n_1 + n_2}{2} \log \frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2 - 1} + \frac{1}{2(1 - 1/n_1)} + \frac{1}{2(1 - 1/n_2)} \\ &\quad - \frac{1}{2(1 - 1/(n_1 + n_2))} + O(n_1^{-2}, (n_1 n_2)^{-1}, n_2^{-2}) \\ \kappa_{2|0} &= \frac{1}{2(1 - 1/n_1)(1 - 1/n_2)(1 + 1/(n_1 + n_2 - 2))} + \frac{1}{2(1 - 1/n_1)^2} + \frac{1}{2(1 - 1/n_2)^2} \\ &\quad - \frac{1}{2(1 - 1/(n_1 + n_2))^2} + O(n_1^{-3}, n_1^{-2} n_2^{-1}, n_1^{-1} n_2^{-2}, n_2^{-3}) \end{aligned}$$

となり、さらに

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{2} \log \frac{z}{z - 1} = \frac{1}{2}$$

の関係より

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \kappa_{1|0} = 1, \quad \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \kappa_{2|0} = 1$$

を得る。このとき、 $n_1, n_2 \rightarrow \infty$ のもとで

$$\frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{m_0}\right)}{\left\{\Gamma\left(1 + \frac{1}{m_0}\right)\right\}^2} = \frac{\kappa_{2|0}}{\kappa_{1|0}^2} + 1, \quad r_0 = \frac{\kappa_{1|0}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{m_0}\right)}$$

より $m_0 = 1, r_0 = 1$ が求められる。これより、統計量 2λ は形状母数 $m_0 = 1$ 、尺度母数 $r_0 = 2$ のワイブル分布に従う。このことより、帰無仮説のもとでの漸近特性であるカイ二乗分布への収束とは矛盾しないことが確認される。

The Power of Likelihood Ratio Tests for Homogeneity of Two Normal Populations

Yasuhiko Takemoto¹ and Ikuo Arizono^{1,*}

¹ Department of Industrial Engineering, Graduate School of Engineering, Osaka Prefecture University
Sakai, Osaka 599–8531, Japan

Abstract

This article deals with the hypothesis test for the homogeneity of two normal populations. The likelihood ratio test is a usual method for such testing. In general theory, the asymptotic distribution of log-likelihood ratio statistics as testing statistics is well known under the null hypothesis, so we may design the test based on the asymptotic distribution. On one hand, the asymptotic distribution of log-likelihood ratio statistics is also considered under the alternative hypothesis. However, in the case that sample sizes are not so large, the asymptotic distributions are not so accurate under the arbitrary hypotheses. Recently, Arizono et al. have derived the cumulant generating function for the log-likelihood ratio statistics under the null hypothesis when the sample size is finite, and enabled to design accurately the null hypothesis test for homogeneity of two normal populations. However, the stochastic properties of log-likelihood ratio statistics under the alternative hypothesis and the power of testing have not been investigated in theory. Therefore, we consider the stochastic properties of log-likelihood ratio statistics under arbitrary hypotheses in this article. Concretely, the cumulant generating function for the log-likelihood ratio statistics and the cumulant of arbitrary order are derived under the arbitrary hypotheses when the sample size is finite. Further, by using the cumulants of log-likelihood ratio statistics derived in this article, we develop the approximation for the distribution of log-likelihood ratio statistics, and propose the theoretical evaluation of the power for the homogeneity hypothesis test.

Key words: cumulant generating function, hypergeometric function, Weibull approximation.

* Corresponding author.

(Ikuo Arizono).

Received April 24, 2002; Received in final form October 2, 2002; Accepted October 5, 2002.