因果ダイアグラムにおける矢線への 介入効果の定式化とその応用

東京工業大学大学院社会理工学研究科 黒 田 健 成

東京工業大学大学院社会理工学研究科 宮 川 雅 巳

東京工業大学大学院社会理工学研究科 田 中 研太郎

要 旨 変数間の因果関係が因果ダイアグラムと構造方程式モデルで表現される状況で、ダイアグラムの矢線へ介入する行為を考え、その効果を定式化する。この定式化は条件付き介入の枠組みにおいて記述される。矢線への介入効果に対する識別可能条件についても考察した。線形構造方程式モデルのもとで、興味ある特性変数の分散が、これへの有向道上の矢線を介入することで、どのように変化するかを具体的に求めた。矢線への介入は、直接介入しにくい変数である中間特性を制御するうえで有用である。適用例を通して、これらの定式化の有用性を主張した。

1. はじめに

統計的品質管理の目的は品質特性のばらつきを小さくすることといっていよい。品質特性がばらつくのは、それに影響する要因がばらつくからである。よって、品質特性のばらつきを下げ的手段は、要因のばらつきを小さくするか、あるいは要因の特性への影響を小さくするかの2通りしかない。これらは、いずれも人為的操作によってのみ実現される。

統計的品質管理の方法論は、QC七つ道具や各種多変量解析手法を駆使した観察研究と、実験計画法を用いた実験研究に大別される。本研究では観察研究を対象とする。受動的に観察した要因変数と特性変数のデータから、要因変数のばらつきを小さくしたときの特性変数への効果を推測するのは難しい問題である。それは、相関・回帰分析の背後にある統計的関連モデルのもとでは、この推測が不可能であるからである。この推測が可能になるためには、統計的因果モデルに立脚した統計分析手法が必要である。

このような統計的因果モデルの起源は、Wright (1923) によって創始されたパス解析である。パス解析では、ある要因変数を人為的に1単位変化させたときの特性変数の期待される変化量を総合効果と呼び、この推定方法を論じた。1990年代になって、パス解析は因果ダイアグラムと呼ばれる統計的因果モデルによって精緻化された。そこでは、ある要因変数 X を外的操作によりある値 x に固定したときの特性変数 Y の分布を $f(y|set(X=x))$ として与え、これを介入効果と呼んだ (Pearl (1995))。この精緻化には非巡回的有向グラフで表現される確率モデル、すなわちグラフィカルモデルが貢献した。

ある要因変数に外的操作を施したときの特性変数の分散について初めて定式化したのは黒木・宮川 (1999a) である。黒木・宮川が与えた分散への介入効果とは、 $f(y|set(X=x))$ での Y の分散であり、線形構造方程式モデルのもとで具体的な形を示している。よって、要因変数の値をある値に固定したときの特性変数の分散を求めたことになる。しかし、現実の対策を考えると、介入可能な要因変数とは反事実的仮定が可能な処理変数に限定される。一方で、興味ある特性変数に影響する要因変数には処理変数以外にも、個体に固有な共変量や処理変数から影響を受け得る中間特性がある。これら共変量や中間特性に対して直接介入することは難しい。

いま、共変量から中間特性に矢線があり、さらにこの中間特性から特性変数へ矢線がある場合を考えよう。この場合、中間特性の変動が特性変数の変動を引き起こしているのだが、その中間特性の変動の原因はその親である共変量の変動である。そこで、共変量から中間特性への影響の度合いを人為的に変更することを考える。このような変更が可能なことは、いわゆるタグチメソッドにおけるパラメータ設計の多数の事例によって実証されている。たとえば、1953年に伊奈製陶(現 INAX)で行われたタイル実験の背景では、トンネルキルン内部の温度の不均一性が焼成後のタイル寸法の変動を生んでいた。これに対して実験的に様々な条件を設定したところ、ある添加剤を加えることで、キルン内部の温度変動がタイル寸法に与える影響を大幅に減少させることに成功したのである(田口 (1976) 17.1 節)。このような操作は、変数でなく矢線に介入することとみなせる。このような矢線への介入効果を定式化し、そこでの最適介入方式について考察することが本論文の目的である。

本論文の以下の構成は次の通りである。まず2節では、本論文の問題意識を説明するために具体的な例を挙げ、ここでの目的と本論文で得られた結果の適用例を示す。3節では、矢線への介入効果を定式化するとともに、その識別可能条件を与える。実は、この定式化は Pearl and Robins (1995) が与えた条件付き介入の枠組みにおいて実現される。4節では、線形構造方程式モデルのもとで、矢線への介入効果を具体的に表現し、特性変数の分散最小化のための最適介入方式を論じる。黒木・宮川 (1999b) は、条件付き介入によって適応制御を定式化し、最適な適応制御方式を導いたが、その結果はここでの議論の特別な場合になっていることがわかる。5節にまとめと残された課題を述べる。

2. 対象とする問題の例

奥野ら (1986) の事例 1「ボディ塗装条件の設定」に報告されている内容に基づいて本論文の問題意識を説明する。この事例では、自動車のボディ塗装工程において、塗着率を高め、かつ、安定化させる工程条件を設定するために、次の変数についてデータが採取されている。

データ数は $n = 38$ で、要因変数として

- ・塗料条件：希釈率(x_1)，粘度(x_2)，塗料温度(x_8)
- ・吹付条件：ガンスピード(x_3)，吹付距離(x_4)，霧化エア圧(x_5)，パターン幅(x_6)，吐出量(x_7)
- ・環境条件：温度(x_9)，湿度(x_{10})

が測定され、特性変数として

- ・塗着率(y)，中心膜圧，膜圧幅

が測定されている。以下の解析では、特性変数として塗着率のみを対象とする。

奥野ら (1986, p.47, p.49) の記述によれば、取り上げた 10 個の要因変数には、制御可能性とい

う観点から程度の異なるものが混在している。希釈率(x_1)と吹付距離(x_4)が最も制御しやすい要因で、粘度(x_2)、ガンスピード(x_3)、霧化エア圧(x_5)、およびパターン幅(x_6)がある程度制御できる要因とある。一方、塗料温度(x_8)と吐出量(x_7)は結果系として変動する量で、温度(x_9)、湿度(x_{10})は制御していない環境条件である。このような変数の分類と、与えられた標本相関行列より、黒木・宮川(1999a)は、グラフィカルモデリングによって、上記 11 個の変数に対する因果ダイアグラムを作成した。それを図 1 に示す。図 1 の矢線にはパス係数を併記した。なお、温度と湿度の間の無向辺についての係数は標本相関係数である。

図 1 を見ると、結果系の中間特性である塗料温度と吐出量から、特性変数である塗着率に向かって矢線が出ている。よって、これらの変動が塗着率の変動の要因になっている。しかし、これらはいずれも直接制御することが困難である。いま、塗料温度に注目すれば、塗料温度には環境条件である温度が効いている。ここでは温度も制御が困難な変数である。そこで、塗料の保管方式等を改善することで、温度の変動が塗料温度の変動に及ぼす影響を緩和できたとする。これはすなわち、温度から塗料温度への矢線に介入し、そのパス係数を人為的に変更することを意味する。このとき、最終特性変数である塗着率の変動はどれくらい小さくなるのか？ また、その値はどのようにすれば推定できるか？ このような問いに答えるのが本論文の目的である。

図 1. 「ボディ塗装条件の設定」に対する因果ダイアグラムとパス係数

本論文で与える結果を用いると、温度から塗料温度へ向かう矢線への介入効果は、誤差項に正規分布を仮定した線形構造方程式モデルのもとで、次のように推定できる。ここでは、図 1 の因果ダイアグラムが正しいとする。この条件での 11 個の変数の相関係数行列の推定値は表 1 に示すものになる(黒木・宮川(1999b))。

ここでは、すべての変数を予め平均 0、分散 1 に基準化しておく。その上で、まず、温度から塗料温度へのパス係数を人為的介入により 0 に変更出来たときの塗着率の分散を求めてみよう。図 1 では、(塗料温度、塗着率)に対して温度がバックドア基準(3.1 節に定義を与える)を満たしてい

るので、塗着率 y を目的変数、塗料温度 x_8 と温度 x_9 を説明変数にした回帰モデル((15) 式に対応)を想定し、回帰係数を最小 2 乗推定すると

$$\hat{y} = -0.3125x_8 - 0.2371x_9 \quad (1)$$

を得る。このときの残差分散 $\sigma_{y \cdot x_8 x_9}^2$ の推定値は 0.7333 である。また、塗料温度を目的変数、温度を説明変数にした単回帰モデルでの残差分散 $\sigma_{x_8 \cdot x_9}^2$ の推定値は 0.4209 である。4 節に与える公式により、温度から塗料温度へのパス係数を 0 に変更したときの y の分散は、これらの値から

$$(-0.2371)^2 \times 1 + (-0.3125)^2 \times 0.4209 + 0.7333 = 0.8306$$

と推定される((16) 式に対応)。また、 y の分散が最小になるような温度から塗料温度へのパス係数を求めると

$$-(-0.2371)/(-0.3125) = -0.7590$$

となり((17) 式に対応)、このときの分散は

$$(-0.3125)^2 \times 0.4209 + 0.7333 = 0.7744$$

である((18) 式に対応)。これは温度が上がると塗料温度は下がるという関係なので、このような設定は現実的でないと考えられるが、計算上はこうなる。

表 1. 図 1 の因果ダイアグラムに基づく相関行列の最尤推定値

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	y
x_1	1.000										
x_2	-0.736	1.000									
x_3	-0.152	0.210	1.000								
x_4	0.148	-0.331	-0.091	1.000							
x_5	0.028	-0.063	-0.017	0.191	1.000						
x_6	-0.043	0.095	0.026	-0.286	0.291	1.000					
x_7	0.324	-0.479	0.195	0.184	0.035	-0.053	1.000				
x_8	0.216	-0.684	-0.134	0.397	0.076	-0.114	0.396	1.000			
x_9	0.286	-0.635	-0.175	0.521	0.099	-0.149	0.353	0.761	1.000		
x_{10}	-0.496	0.684	0.307	-0.298	-0.057	0.085	-0.146	-0.435	-0.571	1.000	
y	-0.091	0.326	0.134	-0.614	-0.277	-0.250	-0.044	-0.493	-0.475	0.283	1.000

なお、温度からは吹付距離へも矢線がある。吹付距離は制御しやすい変数であるが、仮に中間特性とみなして温度からこれへのパス係数を最適化すると、その値は -0.4232 となり、そのときの y の分散は 0.7744 であり、上述の値と一致する。これは偶然でなく、ある条件のもとでは理論的に一致するのである。これについても 4 節で示す。

3. 矢線への介入効果の定式化

3.1. 因果ダイアグラムと介入効果：レビュー

まず、因果ダイアグラムの定義を与える。

【定義 1】 因果ダイアグラム

非巡回的有向グラフ $G = (V, E)$ と、その頂点に対応する確率変数の集合 $V = \{X_1, X_2, \dots, X_p\}$ が与えられている。グラフ G が変数間の因果的関係を

$$X_i = g_i(pa(X_i), \varepsilon_i) \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (2)$$

という形で規定し、各変数がこの因果的関係にしたがって生成されるとき、グラフ G を因果ダイアグラムという。ここに、 $pa(X)$ は X の親で、誤差変数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p$ は互いに独立とする。□

確率変数間の因果的関係が (2) 式によって規定されたとき、その同時分布においてはグラフ G にしたがう逐次的因数分解

$$f_V(x_1, x_2, \dots, x_p) = \prod_{i=1}^p f_{i,pa}(x_i|pa(x_i)) \quad (3)$$

が成立する (Pearl (1995))。

因果ダイアグラムで成立しているマルコフ性を過不足なく記述するには、次の有向分離の概念が有用である (Geiger et al.(1990))。

【定義 2】 有向分離

非巡回的有向グラフ $G = (V, E)$ を考える。2 つの頂点 α と β を結ぶすべての道のそれぞれについて、 $\{\alpha, \beta\}$ と排反な頂点集合 S が次の条件のいずれかを満たすとき、 S は α と β を有向分離 (d-separate) するという。

- 1) α と β を結ぶ道上の合流点で、その合流点とその子孫が S に含まれないものがある。
- 2) α と β を結ぶ非合流点で S に含まれるものがある。

なお、 α と β を結ぶ道がないときは、空集合が α と β を有向分離するという。□

このとき、次のマルコフ性が成立する。

【定理 1】 因果ダイアグラムでのマルコフ性

因果ダイアグラムにおいて、 $\{X_i, X_j\}$ とそれらと排反な変数集合 S を考える。 S が X_i と X_j を有向分離していれば、 S を与えたときに X_i と X_j は条件付き独立である。□

次に、Pearl (1995) は、因果ダイアグラムが与えられたとき、ある変数に対して、それへの有向道をもつ変数には操作をせず、その変数自体を外的操作によってある値に固定する行為を介入 (intervention) と定義した。そして、変数 X に介入したときの別の変数 Y への因果的効果を介入効果と呼び、その数学的定義を次のように与えた。

【定義 3】 介入効果

頂点集合を $V = \{X, Y, Z_1, Z_2, \dots, Z_p\}$ とする因果ダイアグラム G において

$$f(y|set(X=x)) = \int \dots \int \frac{f_V(x, y, z_1, z_2, \dots, z_p)}{f_{X,pa}(x|pa(x))} dz_1 \dots dz_p \quad (4)$$

を X の Y への介入効果という。□

左辺に現れる $set(X=x)$ はセット・オペレーションと呼ばれ、介入によって X の値を x に固定したことを意味する。介入効果を因果ダイアグラムで解釈すると、 X へ向かう矢線を G よりすべて取り除いたグラフにおいて X の値を x に固定したときの Y の周辺密度関数である。なお、次で与える条件付き介入と区別する場合には無条件介入という。

一方, Pearl and Robins (1995) は, ある変数 X に介入するとき, X の値を既に観測されている変数集合 W の関数 $h(W)$ に設定する介入を条件付き介入と呼び, 次のような定義を与えた.

【定義 4】 条件付き介入効果

因果ダイアグラム G において, 頂点集合を $V = \{X, Y\} \cup S$ とし, $\{X, Y\}$ と S とは排反であるとする. X のすべての非子孫からなる変数集合のある部分集合 $W(\subset S)$ による X への条件付き介入を行うとする. このとき

$$f(y|\text{set}(X = h(W))) = \int \frac{f_V(y, h(w), s)}{f_{X,pa}(h(w)|pa(x))} ds \quad (5)$$

を W による X の Y への条件付き介入効果という. $\text{set}(X = h(W))$ は外的操作により X の値を $h(W)$ に設定することを意味する. $\square$

一般に, 介入効果 $f(y|\text{set}(X = x))$ の表現には, X と Y 以外の確率変数も登場する. 頂点集合 $V = \{X, Y, Z_1, Z_2, \dots, Z_p\}$ の部分集合 $A = \{X, Y\} \cup S$ において, A の周辺密度関数によって $f(y|\text{set}(X = x))$ が表現されるとき, X の Y への介入効果は変数集合 A において識別可能であるという. 識別可能となるひとつの十分条件としてバックドア基準がある.

【定義 5】 バックドア基準

因果ダイアグラム G において X から Y への有向道があるとする. このとき, 次の 2 つの条件を満たす頂点集合 S は, (X, Y) についてのバックドア基準を満たすという.

- 1) X から S の任意の要素へ有向道がない.
- 2) X から出る矢線を因果ダイアグラム G より除いたグラフにおいて, S が X と Y とを有向分離する. $\square$

バックドア基準を満たす頂点集合は必ず存在し, 一般には複数存在する. また因果ダイアグラム G より X から出る矢線を除いたグラフで, X と Y を結ぶ非合流点のみからなる道がないとき, 空集合がバックドア基準を満たす.

【定理 2】 バックドア基準を満たすときの介入効果の表現

因果ダイアグラム G において, 頂点集合 S が (X, Y) についてバックドア基準を満たすならば, X の Y への介入効果は $A = \{X, Y\} \cup S$ において識別可能であり, $S = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_r\}$ と記したとき介入効果は

$$f(y|\text{set}(X = x)) = \int \cdots \int f_Z(z_1, \dots, z_r) f_{Y,XZ}(y|x, z_1, \dots, z_r) dz_1 \cdots dz_r \quad (6)$$

で与えられる. $\square$

この定理 2 は, $A = \{X, Y\} \cup S$ 以外の変数を観測しなくとも, X の Y への介入効果は識別可能になるということを主張している. 同様に, 条件付き介入効果でもバックドア基準が識別可能となるひとつの十分条件である (黒木・宮川 (1999b)).

【定理 3】 バックドア基準を満たすときの条件付き介入効果の表現

因果ダイアグラム G において, (X, Y) について変数集合 T がバックドア基準を満たしているとする. $W(\subset T)$ による X への条件付き介入を行うとする. このとき, T が X, Y とともに観測されていれば, W による X の Y への条件付き介入効果は識別可能であり, それは

$$f(y|\text{set}(X = h(W))) = \int f_{Y,XT}(y|h(w), t) f_T(t) dt \quad (7)$$

で与えられる.

□

3.2. 矢線への介入効果

ここでは矢線への介入効果という新しい枠組みを与える. 矢線への介入を (2) 式に与えた構造方程式の変更と定める. すなわち, 与えられた因果ダイアグラムに対して, 頂点 X_i に向かう矢線のすべてあるいは一部に介入するとは, 対応する構造方程式 $X_i = g_i(pa(X_i), \varepsilon_i)$ を外的操作により別な $X_i = h(pa(X_i), \varepsilon_i)$ に変更することとする. これを $intervene(pa(X) \rightarrow X)$ と表記する. この構造方程式の変更に伴い, (3) 式の逐次的因数分解において $f_{i,pa}(x_i|pa(x_i))$ が新たな条件付き密度関数 $f^{New}(x_i|pa(x_i))$ に変わる. よって矢線への介入効果を次のように定義する.

【定義 6】 矢線への介入効果

頂点集合を $V = \{X, Y\} \cup S$ とする因果ダイアグラム G において

$$f(y|intervene(pa(X) \rightarrow X)) = \int \frac{f_V(y, x, s)}{f_{X,pa}(x|pa(x))} f^{New}(x|pa(x)) dx ds \quad (8)$$

を矢線 $pa(X) \rightarrow X$ への Y に対する介入効果という. ここに $f^{New}(x|pa(x))$ は外的操作によって設定された構造方程式 $X = h(pa(X), \varepsilon_x)$ に対応する条件付き密度関数である. □

この定義からわかるように, (8) 式は構造方程式を変更した後の単なる Y の周辺分布である. 次に, この矢線への介入効果の識別可能条件を考えやすくするために, この介入効果を条件付き介入効果で表現することを考える. いま便利のため, 変数集合 V に X の誤差 ε_x を加え, これに対応するグラフ G^* を考える. G と対応する G^* の例を図 2 に示す.

図 2. もとのグラフ G と ε_x を追加したグラフ G^* の例

X へ向かう矢線に介入することで, 対応する構造方程式は $X = h(pa(X), \varepsilon_x)$ になっている. ここで当然 ε_x は観測されないが, これを加えた G^* においては, 形式的に $set(X = h(pa(X), \varepsilon_x))$ という条件付き介入とみなすことができる. そこで定義 4 の条件付き介入の定義に則して, G^* における条件付き介入効果

$$f^*(y|set(X = h(pa(X), \varepsilon_x))) = \int \frac{f_V^*(y, h, e, s)}{f_{X,pa,\varepsilon_x}(h|pa(x), e)} deds \quad (9)$$

を考える. ここに上付き記号*は G^* に対応していることを意味し, $pa(X)$ はもとのグラフ G での

X の親で, e は ε_x の実現値である. また, $pa(X)$ と ε_x を与えれば, X は確定するので

$$\begin{aligned} f(x|pa(x), e) &= 1, \text{ if } x = h(pa(x), e) \\ &= 0, \text{ otherwise.} \end{aligned} \quad (10)$$

であるから, (9) 式右辺の被積分関数の分母は 1 である. これより (9) 式を変形すれば

$$\begin{aligned} f^*(y|set(X = h(pa(X), \varepsilon_x))) &= \int \frac{f_{V^*}(y, h, e, s)}{f_{X \cdot pa, \varepsilon_x}(h|pa(x), e)} deds \\ &= \int f_{V^*}(y, h, e, s) deds \\ &= \int f_{Y \cdot X \varepsilon_x S}(y|h, e, s) f_{X \cdot \varepsilon_x S}(h|e, s) f_{\varepsilon_x S}(e, s) deds \\ &= \int f_{Y \cdot X S}(y|h, s) f_{\varepsilon_x S}(e, s) deds \end{aligned}$$

を得る. 最後の変形には, $Y \perp \varepsilon_x | (X, S)$ と (10) 式を用いている.

ここで, (ε_x, S) から $(X = h(pa(X), \varepsilon_x), S)$ への変数変換を考えると

$$f_{\varepsilon_x S}(e, s) deds = f_{XS}(x, s) dx ds$$

であるから

$$f^*(y|set(X = h(pa(X), \varepsilon_x))) = \int f_{Y \cdot X S}(y|x, s) f_{XS}(x, s) dx ds$$

を得る. これは矢線への介入後の Y の周辺分布であるから, (8) 式左辺の定義式に一致する. また, (9) 式は

$$\begin{aligned} f^*(y|set(X = h(pa(X), \varepsilon_x))) &= \int \frac{f_{V^*}(y, h, e, s)}{f_{X \cdot pa, \varepsilon_x}(h|pa(x), e)} deds \\ &= \int \frac{f_V(y, h, s) f_{\varepsilon_x}(e)}{f_{X \cdot pa}(h|pa(x))} deds \end{aligned}$$

と変形できる. 以上を定理の形でまとめると次の命題を得る.

【定理 4】 矢線への介入効果の条件付き介入による表現

頂点集合を $V = \{X, Y\} \cup S$ とし, $\{X, Y\}$ と S とは排反であるとする. 矢線 $pa(X) \rightarrow X$ への介入効果は

$$\begin{aligned} f(y|intervene(pa(X) \rightarrow X)) &= f^*(y|set(X = h(pa(X), \varepsilon_x))) \\ &= \int \frac{f_V(y, h, s) f_{\varepsilon_x}(e)}{f_{X \cdot pa}(h|pa(x))} ds de \end{aligned} \quad (11)$$

と表現できる.

3.3. 矢線への介入効果の識別可能条件

矢線への介入効果に対する識別可能条件として次の命題を得る.

【定理 5】 バックドア基準を満たすときの矢線への介入効果の表現

因果ダイアグラム G において, (X, Y) について変数集合 T がバックドア基準を満たすとき, X, Y, T の同時分布, かつ, ε_x の分布 $f_{\varepsilon_x}(e)$ が識別可能ならば, 矢線 $pa(X) \rightarrow X$ への介入効果は識別可能で,

$$f(y|intervene(pa(X) \rightarrow X)) = \int f_{Y|XT}(y|h, t) f_T(t) f_{\varepsilon_x}(e) dt de \quad (12)$$

の形で与えられる.

(証明)

定理 4 より

$$f(y|intervene(pa(X) \rightarrow X)) = f^*(y|set(X = h(pa(X), \varepsilon_x)))$$

の関係がある. 右辺については, 全確率の公式より

$$\begin{aligned} f^*(y|set(X = h(pa(X), \varepsilon_x))) &= \iint f^*(y|set(X = h(pa(X), \varepsilon_x)), t, e) \\ &\quad \times f^*(t, e|set(X = h(pa(X), \varepsilon_x))) dt de \end{aligned}$$

である.

ここで推測ルール 2 (Pearl (1995)) として知られる次の命題を使う.

“因果ダイアグラム G より X から出る矢線をすべて除いたグラフにおいて, Z が X と Y を有向分離するならば

$$f(y|set(X = x), z) = f_{Y|XZ}(y|x, z)$$

である.”

定理 4 において矢線への介入効果を条件付き介入の形で表現できたことから, この推測ルール 2 より

$$\begin{aligned} f^*(y|set(X = h(pa(X), \varepsilon_x), t, e)) &= f_{Y|XT\varepsilon_x}(y|h(pa(x), e), t, e) \\ &= f_{Y|XT}(y|h(pa(x), e), t) \end{aligned}$$

である. 最後の変形には, $Y \perp \varepsilon_x | (X, T)$ を用いている. 一方, T と ε_x は矢線 $pa(X) \rightarrow X$ の影響を受けず, かつ T と ε_x は独立なので

$$f^*(t, e|set(X = h(pa(X), \varepsilon_x))) = f_T(t) f_{\varepsilon_x}(e)$$

である. よって, 題意を得る. □

この定理において X, Y, T の同時分布が多変量正規分布に従えば, 線形構造方程式モデルにおいて誤差項の正規性がいえるので次の系が与えられる. この系は X, Y, T でのみ正規性が成立していればよいという点で非常に強力である.

【系 1】 多変量正規分布のもとでの識別可能条件

T が $pa(X)$ を含み, かつ, X, Y, T の同時分布が多変量正規分布に従えば, 矢線 $pa(X) \rightarrow X$ への介入効果は X, Y, T において識別可能である. □

4. 線形構造方程式モデルでの議論

この節では変数集合 V の要素がすべて連続変数の場合を考え、(2) 式に対応する基礎的モデルとして、次の線形構造方程式モデル

$$X_i = \sum_{X_j \in pa(X_i)} \alpha_{ij} X_j + \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (13)$$

を想定する。ここに、 V の各要素は平均 0、分散 1 に基準化されているものとし、誤差変数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p$ はたがいに独立に正規分布にしたがうものとする。

線形構造方程式モデルを仮定すると、矢線への介入は極めて簡単に定式化できる。すなわち、矢線への介入はパス係数の変更他に他ならない。まず、次の簡単な例で考察する。いま、線形構造方程式モデルを

$$\begin{aligned} X &= \alpha_{xz} Z + \varepsilon_x \\ Y &= \alpha_{yz} Z + \alpha_{yx} X + \varepsilon_y \end{aligned}$$

とする。ここで $V(Z) = \sigma_Z^2 = 1$, $V(\varepsilon_x) = \sigma_{\varepsilon_x}^2$, $V(\varepsilon_y) = \sigma_{\varepsilon_y}^2$ とする。このとき、 Z から X への矢線に介入すると、パス係数が α_{xz} から γ_{xz} に変わる。この介入後の Y の分散は

$$V(Y|\text{intervene}(Z \rightarrow X)) = (\gamma_{xz}\alpha_{yx} + \alpha_{yz})^2 \sigma_z^2 + \alpha_{yx}^2 \sigma_{\varepsilon_x}^2 + \sigma_{\varepsilon_y}^2$$

となる。介入前の X, Y, Z はいずれも分散 1 に基準化しているので、介入前の X から Z へのパス係数は X と Z の介入前の相関係数に等しい。よって $-1 \leq \alpha_{xz} \leq 1$ の制約がある。しかし、介入後の X の分散についてはこのような基準化がないので、介入後のパス係数 γ_{xz} が取りうる範囲の制約はない。よって、介入後の Y の分散の最小化を図ると

$$\gamma_{xz} = -\frac{\alpha_{yz}}{\alpha_{yx}} \quad (14)$$

のとき、介入後の Y の分散は最小となり、最小値は $\alpha_{yx}^2 \sigma_{\varepsilon_x}^2 + \sigma_{\varepsilon_y}^2$ である。

一般的に、与えられた因果ダイアグラムと線形構造方程式において、 X から Y へ有向道があり、 X へ向かうひとつ以上の矢線があるとする。このとき、 X へ向かういくつかの矢線に介入したときの Y の分散は、 Y を目的変数、 X と X のすべての親 Z を説明変数にした回帰モデルのパラメータにより次のように記述できる。まず、介入前の X から Y への総合効果を求めるための回帰モデルとして

$$Y = \beta_{yx,z} x + \beta_{yz,\cdot}^T z + e_{y,\cdot xz} \quad (15)$$

を設定する。ここで $\{Z\}$ が (X, Y) についてバックドア基準を満たしていることに注意する。すると、矢線 $pa(X) \rightarrow X$ へ介入、すなわち X が左辺の構造方程式を $X = \gamma_{xz}^T Z + \varepsilon_x$ に変更したときの Y の分散は、次の定理で記述される。

【定理 6】 線形構造方程式モデルでの矢線への介入効果

因果ダイアグラム G において、変数集合 Z を X の親集合とする。 X, Y, Z が多変量正規分布に従うならば、矢線 $pa(X) \rightarrow X$ への介入をしたときの Y の分散は

$$V(Y|intervene(pa(X) \rightarrow X)) = (\beta_{y_{X \cdot Z}}\gamma_{xz} + \beta_{y_{Z \cdot X}})^T \Sigma_Z (\beta_{y_{X \cdot Z}}\gamma_{xz} + \beta_{y_{Z \cdot X}}) + \beta_{y_{X \cdot Z}}^2 \sigma_{X \cdot Z}^2 + \sigma_{y \cdot XZ}^2 \quad (16)$$

で与えられる．ここに Σ_Z は Z の分散共分散行列である． □

次に、特性変数の分散を最小化するための矢線への最適な介入方式を考える．このとき、上の定理6より直ちに次の系2を得る．

【系2】 矢線への最適な介入方式

因果ダイアグラム G において、変数集合 Z が X の親集合とする． X, Y, Z が多変量正規分布にしたがうならば、矢線 $pa(X) \rightarrow X$ への介入をしたときの Y の分散は

$$\gamma_{xz}^T = -\frac{\beta_{y_{Z \cdot X}}^T}{\beta_{y_{X \cdot Z}}} \quad (17)$$

のとき最小となり、そのときの分散は

$$V(Y|intervene(Z \rightarrow X)) = \beta_{y_{X \cdot Z}}^2 \sigma_{X \cdot Z}^2 + \sigma_{y \cdot XZ}^2 \quad (18)$$

である． □

なお、同一の親をもつ矢線への介入において(18)式より直ちに次の命題が成り立つ．

【定理7】 同一の親をもつ矢線への介入の性質

因果ダイアグラム G において、複数の変数が同一の親を持ち、かつ、それらから Y への有向道があるとする．このとき、その親からそれらの変数へのいずれかの矢線に対して(17)式の介入を行ったならば、介入後の Y の分散は選択した矢線に依らず一定である． □

5. おわりに

本論文では既存の変数への介入効果とは別に、矢線への介入効果を新たに定義し、その識別可能条件を与えた．また、日常の操業データに用いて矢線への介入による品質特性の分散への効果を回帰モデルにより推定するための方法論、および線形構造方程式モデルの枠組みの下で矢線への介入によって品質特性の分散を最小にする方式を明らかにした．(17)式に与えた最適介入のパス係数により、特性変数の分散は常に減少する．本論文で得られたいくつかの関係式より、どのようにパス係数を変えれば、特性変数の分散を減らせるかが示唆されたと考える．

工業における日常の操業データでは制御可能な処理変数の値は固定されていることが多く、その場合には操業データに対する因果ダイアグラムには処理変数が存在せず、処理変数への介入効果を推定できない．その一方で、共変量や中間特性は日々変動しているので、これらは特性変数とともに因果ダイアグラムの中に現れ、これらを結ぶ矢線への介入効果を操業データから推定することが可能である．矢線への介入を物理的にどう実現するかは重要な技術的課題である．

なお、矢線への介入では、一旦介入してパス係数の値を変更すれば、その後は特に工程に操作する必要がない．この点は、定期的に共変量の値を観測し、それに応じて後続する処理変数の値を設定する適応制御(条件付き介入)との大きな違いである．

今後の課題としては、たとえば図1では、温度から吐出量と塗料温度に矢線があるように、ある共変量の子である中間特性が複数ある、すなわち、共変量からの矢線が分岐する場合の複数矢

線への同時介入したときの、特性変数への効果の定式化が挙げられる。

謝 辞 2名のレフェリーの先生には論文の不備をいくつかご指摘いただきました。また大阪大学大学院の黒木学先生には論文作成段階で貴重なコメントをいただきました。これらの先生方に感謝します。

参 考 文 献

- Geiger, D., Verma, T.S. and Pearl, J. (1990): Identifying independence in Bayesian networks. *Networks* **20**, 507–534.
- 黒木学, 宮川雅巳 (1999a): 因果ダイアグラムにおける介入効果の推定と工程解析への応用, 品質 **29**, 237–247.
- 黒木学, 宮川雅巳 (1999b): 適応制御における条件付き介入効果の定式化とその推定, 品質 **29**, 407–486.
- 奥野忠一, 片山善三郎, 上野長昭, 伊東哲二, 入倉則夫, 藤原信夫 (1986): 工業における多変量データの解析, 日科技連出版社.
- Pearl, J. (1995): Causal diagrams for empirical research. *Biometrika* **82**, 669–709.
- Pearl, J. (1998): Graphs, causality, and structural equation models. *Sociological Methods and Research* **27**, 226–284.
- Pearl, J. and Robins, J.M. (1995): Probabilistic evaluation of sequential plans from causal model with hidden variables. *Proc. 11th Conf. On Uncertainty in AI*: San Francisco, Morgan Kaufmann, 444–453.
- 田口玄一 (1976): 実験計画法(上), 丸善.
- Wright, S. (1923): The theory of path coefficients: a reply to Nile's criticism. *Genetics* **8**, 239–255.
- Wright, S. (1934): The method of path coefficients. *Ann. Math. Statist.* **5**, 161–215.

(2006 年 3 月 28 日受付 6 月 22 日最終修正 6 月 30 日採択)

著者連絡先: 〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1
東京工業大学大学院社会理工学研究科経営工学専攻 宮川 雅巳

Formulation of Intervention to Arrows in Causal Diagram and Its Applications

Kensei Kuroda, Masami Miyakawa* and Kentaro Tanaka

Tokyo Institute of Technology

Abstract

Suppose that causal relationships among variables can be described by a causal diagram and the corresponding linear structural equation models. Intervention not to variables but to arrows will be considered, and the intervention effect can be formulated through the conditional intervention proposed by Pearl and Robins (1995). The identifiability criterion for the intervention to arrows is also investigated. The intervention effect on the variance of a response variable can be evaluated under the linear structural equation model. The intervention to arrows method may be useful to reduce variances of intermediate variables or covariates that cannot be controlled directly by an external action. A numerical example illustrates how to utilize the intervention to arrows method to reduce the variability of a response variable of interest.

Key words: back-door criterion, conditional intervention, d-separation criterion, linear structural equation, path coefficient.

*Corresponding author

(Masami Miyakawa)

Received March 28, 2006; Received in final form June 22, 2006; Accepted June 30, 2006.