油層シミュレーションにおいて空間離散化に調和する 擬似関数を自動生成する手法に関して

—その2 擬似関数自動生成手法の詳細および離散化誤差と
擬似関数に関する一般的議論—

登 坂 博 行*

(平成元年1月24日受付, 元年3月14日受理)

On a Method of Automatic Generation of Directional Pseudofunctions for Field-scale Reservoir Simulation

(2) Details of the Technique of Combining VE with Frontal Advance Theory, and General Discussion on Pseudofunctions

By

Hiroyuki TOSAKA

Abstract: In the preceding paper²¹⁾, the author presented a new method of generating directional pseudofunctions automatically by the simulator itself. The method combines the vertical equilibrium concept with the Buckley-Levrett's Frontal Advance Theory. In this paper, additional details of the method which generates the FAP (Frontal Advance Profile) pseudofunctions are described in conjunction with B-L theory. Results of 1-D and 2-D test runs are presented to show that the water-cut performances and profiles of water front obtained by coarse-grid models using FAP pseudofunctions are almost identical with those obtained by fine-grid models using rock saturation functions. General discussion on numerical dispersion and pseudo-generation methods are also made focused on field-scale reservoir simulation using a coarse-grid system.

1. はじめに

前報の冒頭で述べたように、油層挙動の数値シミュレーションにおいては、大方の場合得られた解の信頼性を適切に判断することが難しい。解の信頼性は、油層物性・流体物性の不確かさを抜きにすれば、数値解法自体の離散化誤差に負う。特に油層問題が大きい場合、コンピュータの制約により空間離散化(格子分割)は粗くならざるを得ず、その結果数値解は大きな離散誤差(数値分散)

により非現実的なものとなりかねない。これが端的に現れるのは、油井での水あるいはガスのブレイクスルーの計算値で、粗い離散化では著しく(非現実的に)早まることである。前報では、それを極力減らすための方策として格子分割に同期した擬似関数を自動的に生成する方法を提案した。この擬似関数は、流体の垂直平衡(VE)に基づく相漸移(Phase Transition)と Buckley-Leverett の置換理論(Frontal Advance Theory, 以下人名は B-L と略記)を結合して作成されるものである。ここでは表記上の簡便さのためこの擬似関数を FAP (Frontal Advance Profile) 擬似関数と呼ぶこ

* 東京大学工学部

とにする。

本報告では、紙面の都合上前報で言及しなかった B-L 置換理論と FAP 擬似関数の関係を明らかにした上で、数例の一、二次元問題への適用結果を報告する。また、数値シミュレーションと数値分散、および擬似関数生成に関する諸問題を論じる。

2. FAP 擬似関数と Buckley-Leverett の置換理論

2.1 擬似関数生成における B-L 置換理論

油層岩中の複雑な毛細管ネットワーク中の流体置換機構を説明するために通常我々が用いるのは、飽和率の関数としての相対浸透率と毛細管圧力である。油層工学で確立されてきたこれらの概念とダルシー則を使うと、その一次元数値解が Buckley-Leverett の理論解をよく近似することが知られている。1940年代に提出された彼らの解は、毛細管圧力の影響を無視した場合、後方の流体移動速度が前方のそれを上回る際に形成される飽和率の不連続面 (Shock Front) の存在とその後方の飽和率プロファイルを明確に示した (Fig. 1(a))。当時から現在に至るまで Shock Front の存在に関しては多くの

(a) Buckley-Leverett's Analytical Solution for Oil-Water 1-D Displacement without Capillarity

(b) An Example Saturation Profiles of Water Including Capillarity and Numerical Dispersion for 1-D Oil-Water Displacement

Fig. 1 Saturation Profiles in Oil-Water System

議論がなされてきているが、現在我々が行っている数値シミュレーションでは暗黙の内に B-L 置換が肯定されているのである。もちろん、Dietz 流の tonguing, Engelberts, van Meurs らの報告による viscous fingering の現象, あるいは, Gladfelter, Gupta, B. L. O'steen 他により観察されている非ダルシー流によると思われる saturation hump (飽和率瘤とでも言うべきか) の現象があることは否定できないが、一般的に油層シミュレーションでは扱われていない。

さて B-L 置換理論を FAP 擬似関数生成に以下のように利用する。まず、B-L 型飽和率プロファイルが除々に上昇する油水界面の後方に形成されると仮定する。擬似関数を求めることは、平易に言う、一つの代表値で表されている大きな格子の飽和率からその格子内の飽和率分布を考慮した上で、格子面での流体の流量の割合を求めることに他ならない。すなわち、水飽和率がどこまで上昇すると格子の上面からどのような割合で水が抜けてゆくかは、不連続面の位置および後方のプロファイルを格子の代表飽和率と同期しながら追跡することにより、算出できるはずである。COATS 等による VE 擬似関数の計算では、いくつかの適用上の制約条件の中に、流体のモビリティが良好でピストン的な垂直方向の置換があること、別の言い方をすれば、置換フロント通過後は原油飽和率まで掃き上げることが挙げられている。しかし、この制約は一般的ではなく、現実の二相置換では置換フロント飽和率を最小として後方に大きくなるような飽和率プロファイル (Fig. 1(a) および (b)) が得られ粘性比が大きい程置換はピストン的ではなくなる。本法では、VE では考慮されていないこのようなプロファイルの一つの格子内に仮定した上で擬似関数を計算するのである。

2.2 フラクショナルフローおよび B-L 置換フロント移動方程式

1941年に Leverett が提出した、非圧縮性二相流体系の定流量下におけるフラクショナルフローの一般的定義は良く知られているように次の形をとる。

$$F_w = \frac{1 + \frac{k_0}{U_t \mu_0} \left[\frac{\partial P_c}{\partial L} - g(\rho_w - \rho_o) \sin \alpha \right]}{1 + \frac{\mu_w}{\mu_o} \frac{k_0}{k_w}} \quad (1)$$

ここで、 F_w : 全流量に対する水流量の割合, k_0, k_w : 油, 水の有効浸透率, μ_o, μ_w : 油, 水の粘性, U_t : 全流量, P_c : 毛細管圧力, L : 流動方向にとられた距離, g : 重力加速度, ρ_o, ρ_w : 油, 水の密度 α : 地層の傾斜, である。

(a) Water-Oil Relative Permeabilities

(b) Water Fractional Flow Curve

Fig. 2 Typical Curves of Relative Permeability and Water Fractional Flow

上定義の下で、1942年に Buckley-Leverett によって提出された置換フロント移動方程式 (Frontal Advance Equation) は以下の微分方程式となる。

$$\left(\frac{\partial L}{\partial t} \right)_{S_w} = \frac{U_t}{A\phi} \left(\frac{\partial F_w}{\partial S_w} \right)_t \quad (2)$$

ここで、 U_t : 全流体流量、 A : 流路断面積、 S_w : 水飽和率、 ϕ : 孔隙率、 L : 距離 (位置)、 t : 時間である。この方程式は、ある一定の飽和率 S_w を持つ面がその飽和率に於けるフラクショナルフロー曲線の傾き ($\partial F_w / \partial S_w$) に比例した速度 ($\partial L / \partial t$) で進むことを意味している。Fig. 2(a) に示したような相対浸透率曲線が与えられると Fig. 2(b) のようなフラクショナルフロー曲線が作成でき、B-L 理論解は図のような飽和率に関する不連続面 (shock front) と後方の飽和率プロファ

Fig. 3 B-L Analytical Solution with Capillarity and Its Linear Approximation Used in Generating FAP Pseudofunction

イルを与える。不流動水飽和率下にあるオイルゾーンを進行する水の、不連続面における上流側水飽和率の値は、簡単な物質収支の関係より得られるが、これはフラクショナルフロー曲線上で Fig. 2(b) のように接線を引いたときの接点の飽和率 (S_{wf}) になることはよく知られている。また、毛細管圧力を考慮した場合、不連続面はある程度平坦化された曲線となる (Fig. 1(b) 参照)。

2.3 B-L 理論解の近似による格子内ゾーンと FAP 擬似関数の算出

B-L 理論解を擬似関数生成の際に考慮するため、具体的には Fig. 3 に示した近似を行う。この近似を施した上で、前報で説明したようなゾーニングを行い、二相系 (油/水系) の場合 h_i ($i=4, \dots, 7$) を決める (Fig. 3 参照)。B-L 理論解から決定するのは、不連続面上の飽和率であるが、これは格子を通過している全流量を計算し (1) 式を使いフラクショナルフロー曲線を求め、Fig. 2 のように接線との交点を求める操作によって得られる。次に格子に与えられた任意の飽和率の下で h_i を決定するわけである。説明の便宜上再掲すると、解くべき連立方程式は、

$$\sum_{i=4}^7 h_i \cdot S_w^i = H \cdot S_w \quad (3)$$

$$\sum_{i=4}^7 h_i = H \quad (4)$$

ただし、 H は格子の厚さ、 h_6 は岩石固有の漸移帯の厚み (油-水系 H_6) のうち当該格子にかかっている部分の厚みを表しており、岩石毛細管圧力による引き込み帯に相当する。Fig. 4 に示したように、水飽和率 S_w に

Fig. 7 One-dimensional Heterogeneous Models for Validation Runs

油層および帯水層部分を垂直方向に分割する個数を著しく変えて、オイルゾーン中央部には低浸透率部分を設けている。Fig. 7中のModel-5は低浸透率部分を1個の格子で、Model-6は8個の格子でそれぞれ代表していることになる。Fig. 8には坑井に於ける水のブレイクスルー曲線を、Fig. 9にはモデル内の飽和率プロファイルを精細格子と粗い格子の場合につき比較できるように示した。粗い格子に岩石の相対浸透率と毛細管圧力を使う場合当然ながら、次節で述べる数値分散の程度が大きくなり著しく早いブレイクスルーが起こる。それに比べFAP 擬似関数は詳細格子の結果とよい一致を見せている。また油層内の飽和率プロファイルは異なった浸透率の境界でゆがむ様子がみられるが、これもよく近似されているようである。

3.2 二次不均質問題

坑井付近でのラディアルモデルを想定して、デカルト座標系を使い、格子の大きさを半径方向に変えた二次元モデルを設定した (Fig. 10)。油層中央部には、一次元モデルと同様低浸透率部分を設け、油水粘性比が大きい場合につき計算を行った。結果をFig. 11, 12に示した。Fig. 11に示したように、岩石の相対浸透率と毛細管圧力を粗格子に直接適用した例は、前例と同様、著しくは早いブレイクスルーを見せる。これに対し、詳細格

Fig. 8 Comparison between Water Cut Performances obtained by 1-D Fine-grid Model using Rock Saturation Functions and by Coarse-grid Model using FAP Pseudofunctions (Unfavorable Viscosity Ratio, Heterogeneous)

Fig. 9 Comparison between Saturation Profiles obtained by 1-D Fine-grid Model using Rock Saturation Functions and by Coarse-grid Model using FAP Pseudofunctions (Unfavorable Viscosity Ratio, Heterogeneous)

子の結果とFAP 擬似関数を粗格子に適用した結果はブレイクスルー時点にほとんど差はない。Fig. 12には油層内の水飽和率分布を示した。Fig. 12中の太い実線は、

Fig. 10 Two-dimensional Heterogeneous Models for Validation Runs

Fig. 11 Comparison between Water Cut Performances obtained by 2-D Fine-grid Model using Rock Saturation Functions and by Coarse-grid Model using FAP Pseudofunctions (Unfavorable Viscosity Ratio, Heterogeneous Case)

ある時点に置く、精細格子上で水飽和率が不流動点からわずかに増加した点（後述する数値分散のフロントにあたる）の位置を示し、capillary zone と書いた綱目模様は、粗格子に FAP 擬似関数を適用したときに得られた毛細管圧力による漸移帯であり、この上端と実線は

Fig. 12 Comparison between Saturation Profiles obtained by 2-D Fine-grid Model using Rock Saturation Functions and by Coarse-grid Model using FAP Pseudofunctions (Unfavorable Viscosity Ratio, Heterogeneous Case)

よい一致を見せている。

3.3 テスト結果に関して

上記数例の結果から、粗い格子の場合、岩石相対浸透率や毛細管圧力をそのまま使っては精細格子の結果を再現できないことは明白である。一般に、格子の大きさが毛細管圧力による漸移帯程度かそれ以下だと計算結果はよく一致する。坑井付近の流れを摸した二次元モデルでは、水平の流れが大きいにもかかわらず、垂直方向には B-L 的置換を考慮すると粗い格子でも精細格子の結果をよく再現できることが分かる。このモデル設定では、一つのブロックの水平方向の二つの面における水飽和率がそれほど違わないのに対し、垂直方向の二つの面（上、下の面）でのそれは大きく違っている。このことにより、垂直方向の違いを擬似関数で考慮すれば、精細格子の結果を近似できるということになるわけで、Fig. 12 はそれを証左している。この考察から逆に FAP 擬似関数の適用限界が分かるわけであるが、それについては 4.2 (c) に述べる。

4. 擬似関数生成に関わる諸問題に関して

4.1 数値解における離散化誤差に関して

毛細管圧力を無視した場合の B-L 理論解がしめす

シャープな不連続面は、数値解ではある程度傾いた曲線となる(置換フロントの smearing, Fig. 1(b)参照)。この不一致は、主に数値解の安定化のために移流項の差分展開上導入される風上法(Upstream weighting)が持つ人工的分散項(流体力学で言う人工粘性)の所産である。1点風上法では移流項の近似次数は高々一次(切り捨て誤差 $O(h)$)であり、分散の程度は離散化の程度が粗いほど大きくなる。J. B. BELL らは高次の Godunov 法を使って置換フロントの鋭さを保つとともに格子方向効果(Grid orientation effect)を最小化する方法について論じた。S. H. LEVENTHAL は保存形の四次の operator compact implicit method(OCI)なるものを提案している。2点以上流型(2-point upstream), 可変重み付け(Variable Flux Weighting, VFW)というものもある。2点流型は Todd らにより提案されたもので上流側の2点のトランスミッシビリティをつかう。これは近似の程度としては二次であるが, I. J. TAGGART らによる指摘では時間項に関する一次の近似がそのままであるため, 旺々にして1点上流型と同程度の数値分散がでるとのことである。これに対し T. J. LASSETER は可変重み付けを提案している。VFW では置換フロントの前後で上流側から下流側に重みを移すものである。数値分散のもう一つの要因は, 時間に関するものである。一般に, 陽解法による場合には, 時間ステップによる不安定さがある代わりに Time truncation error は小さいが, すべてを新しいステップでの値で近似する完全陰解法は無条件安定である代わりにそれ大きい。このあたりの数値分散に関する議論は Aziz, Settari⁽²⁰⁾に詳しい。

さて, 毛細管圧力の影響下で B-L 理論解を考えると, 実はシャープな置換フロントは形成されず, 形状は若干平坦化することはすでに述べたが, その程度は多くの場合適当に細かく格子を切ったときの数値解法の持つ分散の程度である(Fig. 1(b)参照)。それゆえ, 現実としてはそれほど置換フロントのシャープさにこだわる必要はなくなる。問題は, 使用する格子の大きさが毛細管圧力による分散の大きさをはるかに超える場合で, 数値分散は格子の大きさにほぼ比例して大きくなってしまふ。実際のフィールドスケールでの油層シミュレーションではこの場合が普通で, これを補正するために擬似関数が必要となるわけである。

4.2 擬似関数の生成手法の得失

(a) VE 法

VE の中には, 重力-毛細管力平衡型(gravity-capillary VE), 重力分離型(gravity-segregated VE), 水平流卓越型(lateral viscous VE)等が分類される。

VE の適用性は, 流体間の粘性比が1に近く垂直方向(水平流卓越型では水平方向)にピストン状の掃攻があること, 油層内の浸透性がよく垂直方向のポテンシャル差は極めて短時間に解消するとの仮定により制約を受ける。VE は本来, 大きな三次元問題を二次元問題に焼直すために提案された準三次元手法である。最近の油層シミュレータには自動的に VE 擬似関数を作成する手法が組み込まれている場合も多く, 密度差の大きいガス-水二相の二次元的シミュレーション, あるいは上記の制約を満たすような油層問題に威力を発揮する。また VE に加え, 格子の幾何形状に合わせ三次元的な VE 擬似関数を生成するように工夫されているものもある⁽¹⁸⁾。

(b) 動的擬似関数(Dynamic Pseudofunction)

動的擬似関数は, 全油層を表す粗格子モデルを部分的に分割した精細格子モデルの結果より作成されるもので, VE 法に比べ, 流体物性・油層物性に関する様々な制約がなく, 細かい岩相分布を取り込んだモデルで, 任意の坑井配置とオペレーション条件を取り扱い得る最も汎用性の高い方法として, フィールドスケールのシミュレーションの際に慣習的に作成され使用される。非常に直接的方法であり, この種の研究の主なる関心は, 多くの格子の計算値を如何に粗い格子の物性としてまとめ上げるかという点にある。これに関する研究は多数ある。他方, シミュレーションに携わるものの立場としてみると次のような問題がある。まず, 精細格子は油層の小部分に対して設定されるものであるから, それを油層内のどの位置に, 何ヶ所, どの方向で, どのような格子分割で, どのような操業条件の下で設定するか, さらに擬似関数として何種類のものを用意し, どれをどこに適用するかという一般的な判断基準が無いこと, 三次元的な油層内に埋め込まれたとき油層全体を精細格子で覆って計算した場合と比較し, 本当に近似的な答えを与えるかの立証が不可能であること, さらには, 油層シミュレーションの特徴である多相性は, 本質的には格子分割をかなり小さくして行った段階でも擬似関数を必要とするはず(もちろん我々の希望する精度によるが)であること, である。さらには, ヒストリーマッチングあるいはブレディクションに必要とされる擬似関数は本来空間と時間に依存するものであるから, 外部からそれらのデータを適宜供給する必要があるはずと思われるが, 一般的にはほとんど不可能なことである。これらの問題点は残念ながら未解決のままである。

(c) FAP 擬似関数

ここで筆者が提出した FAP 擬似関数について整理してみる。この方法は, 垂直方向の粗い格子分割による大きな数値分散を常に毛細管圧力による分散の程度に抑え

ながらシミュレートするための擬似関数を自動的に与える方法である。この意味では重力-毛細管圧力型 VE に近い。しかし、unfavorable な粘性比を有する流体置換、すなわちピストンのでない流体置換も取り扱え、三次元的な方向別擬似関数を与える、という意味で VE の制約条件の一部をとり払っている。また各相流体の体積中心を代表深度としてそこでの圧力（或はポテンシャル）を使って流動を考えるため、格子の代表深度を中心に固定しておくより現実的な各相圧力値が計算される。これは特に、密度差の大きな流体系のシミュレーション（例えば、地表付近の不圧地下水系、或はガス層のシミュレーション）の安定化につながる。なお、この方法では垂直方向の置換を考えてきたが、若干のプログラムの変更で水平方向の流体置換に直接適用することもできる。

FAP 擬似関数の問題点としては現在の所二つある。一つは、現状では、FAP 擬似関数は 1 方向の卓越した置換が前提であるため、クロスセクショナルモデル等のように横方向（一般に X-方向）と垂直方向の同程度の置換がある場合には適性を欠く点である。流体の多方向の動きに関して一般的に置換フロントを追跡することは非常に難しいが、幾何学的な擬似関数と組み合わせることである程度可能である。二つ目は、坑井の密閉に伴うその付近の水の置換フロントの崩壊現象の扱いである。坑井の密閉があると、上昇中の置換フロントは崩壊し、置換フロント水飽和率はある速度で大きくなり、位置は下がる。これは粗格子内部での密度差による流体置換に近い。流体粘性比が 1 に近い場合には置換フロント水飽和率は重力の影響下では元々大きいからフロント崩壊による飽和率変化は小さく、それ故 FAP 擬似関数による計算は精細格子のそれによく一致する。しかし、流体粘性比が大きい場合には、格子間のポテンシャル差が十分に解消された後でも格子内で崩壊が続くが、これをうまく追跡できるまでには至っていないことである。

4.3 擬似関数の自動生成に関して

コンピュータの発達により急速に大規模な油層問題を取り扱えるようになってきた今日でも、現実の三次元油層問題を擬似関数が必要なくなるほど細かく格子分割できるようになるのは随分と先の話である。また、ワークステーションのような小型である程度高速性を持つコンピュータ上での迅速かつ信頼性のある油層シミュレーションへの要求は、擬似関数の自動生成法確立への益々の必要性を示している。擬似関数の自動生成は非常に魅力的であるが同時に難しい。今後の研究の方向は大きくは二つあると思われる。一つは FAP 擬似関数の様に格子以下の大きさの飽和率分布を半解析的・幾何学的方法により追跡するものである。もう一つは、それに代わり他

の数値的方法、例えば重み付き残差法等による FEM (Finite Element Method)、領域型解法としての BIM (Boundary Integral Method) の部分的組み込み、移動格子法 (Moving Element) の利用⁽¹⁸⁾、等が考えられる。実際、FEM を使ってポテンシャル分布を IMPES 的に求め、飽和率分布は各空間点の速度を計算し置換フロントを追跡するフロントトラッキング (Front Tracking) なる手法の研究例もある⁽¹⁷⁾。

5. 結 語

ここでは、著者が提出した FAP 擬似関数導出過程における Buckley-Leverett 型置換プロファイルの利用方法と共に、二次元不均質問題でのテスト結果を示した。FAP 擬似関数は、垂直方向の分割が粗くても非常に細かい分割の結果に近い結果を与えることができる。後半では擬似関数に関して著者の頭の中を整理する意味で、その現状と問題点、今後の方向をある程度包括的に記述した。

本報において再三強調しているように、フィールドスケールの油層シミュレーションにおいて、擬似関数は第一級の重要なパラメータである。本来これが適切なものでないと、ヒストリーマッチングの結果およびプレディクションの結果とも信頼するに足るものとはならない。特に、ヒストリーマッチングによる逆解析から油層物性の未知分布を求める際には、順解析としての油層シミュレータの与える解が物理的に合理的な解であることが必須である。しかしながら、このための三次元的擬似関数を常に空間離散化（および時間）に調和して生成する一般的方法は今の所残念ながら得られていない。

前報および本報を通じて書き忘れたことも多いと思われる。読者の方々のご指摘をいただければ幸いである。

謝 辞

研究段階でソフトウェアに関する御便宜を計っていたいた日本オイルエンジニアリング(株)およびいろいろ御教示いただいた同社の滝田征夫氏、松本行弘氏、玉置修氏、稲森敏泰氏に感謝する次第である。

参 考 文 献

- 1) COATS, KH., DEMPSEY, J.R., and HENDERSON, J. H., 1971: "The Use of Vertical Equilibrium in Two-Dimensional Simulation of Three-Dimensional Reservoir Performance," *SPEJ* (March) 63-71; *Trans. AIME*, Vol. 251.
- 2) MARTIN, J. C., 1968: "Partial Integration of

- Equations of Multiphase Flow," *SPEJ*(Dec.), pp.370-380; *Trans. AIME*, VOL. 243.
- 3) HEARN, C.L.,1971: "Simulation of Stratified Waterflooding by Pseudo Relative Permeability Curves". *J. Pet. Tech.* (July), pp. 805-813.
 - 4) JACKS, H.H., SMITH, O.J.E., and MATTAX, C. C., 1973: "The Modeling of a Three-Dimensional Reservoir With a Two-Dimensional Reservoir Simulator-The Use of Dynamic Pseudo Functions," *SPEJ* (June), pp.175-185.
 - 5) KYTE, J. R. and BERRY, D. W., 1974: "New Pseudo Functions to Control Numerical Dispersion," *paper SPE 5105 presented at the SPE-AIME, 49th Annual Fall Meeting, Houston* (Oct.), pp.6-9.
 - 6) EMANUEL, A. S. and COOK, G. W., 1974: "Pseudo-Relative Permeability for Well Modeling", *SPEJ* (Feb.) pp.7-9.
 - 7) WOODS, E. G., KHURANA, A. K., 1977: "Pseudofunctions for Water Coning in a Three-Dimensional Reservoir Simulator", *SPEJ* (Aug.), pp.251-262.
 - 8) H. J. WELGE, 1952: "A Simplified Method for Computing Oil Recovery by Gas or Water Drive", *Trans. AIME*, vol. 195, pp.91-98.
 - 9) G. A. POPE, 1980: "The Application of Fractional Flow Theory to Enhanced Oil Recovery," *SPEJ* (June), pp.191-205.
 - 10) J. M. DUMORE, R. S. SCHOLS, 1974: "Drainage Capillary-Pressure Functions and the Influence of Connate Water," *SPEJ* (Oct.), pp.437-444.
 - 11) I. J. TAGGART and W. V. PINCZEWSKI, 1985: "The Use of Higher-Order Differencing Techniques in Reservoir Simulation," *SPE* 13513.
 - 12) T. POTEMPA, 1985: "Mobility Weighting in Numerical Reservoir Simulation," *SPEJ* (Aug.), pp. 565-572.
 - 13) J. B. BELL and G. R. SHUBIN, 1985: "Higher-Order Godunov Methods for Reducing Numerical Dispersion in Reservoir Simulation," *SPE* 13514.
 - 14) B. L. O' STEEN and L.W.HOLM, 1988: "Saturation Distributions During Displacements Generated by the Simultaneous Injection of Oil and Water," *SPEJ* (Feb.), pp.130-138.
 - 15) T. J. LASSETER, 1985: "The Extension of the Variable-Flux-Weighting Method to Multi-dimensional Problems Including Gravity and Capillarity", *SPE* 13508.
 - 16) S. H. LEVENTHAL, 1980: "The Operator Compact Implicit Method for Reservoir Simulation" *SPEJ* (June), pp.120-128.
 - 17) K. BRATVEDT and D. T. RIAN, 1988: "Modeling and Simulation of a Fluival Geological System by the Application of Front Tracking Methods, "1st International Forum on Reservoir Simulation (Aug.), Aploach, Austria.
 - 18) G. P. STARLEY, 1988: "A Material-Balance Method for Deriving Interblock Water/Oil Pseudofunctions for Coarse-Grid Reservoir Simulation," *SPEJ* (Aug.), pp.977-984.
 - 19) G. F. CARLEY, A. MUELLER, *et al.*, 1987: "Moving Elements for Transport Processes", *SPEJ* (Aug.), pp.401-408.
 - 20) K. AZIZ and A. SETTARI, 1979: "Petroleum Reservoir Simulation," Elsevier.
 - 21) 登坂博行, 1988: 油層シミュレーションにおいて空間離散化に調和する擬似関数を自動生成する手法に関してーその1, 石油技術協会誌, 53(5), 348-356.