乱流スペクトルの自己回帰モデルへのあてはめについて—1次元解析の場合— Fitting AR model for turbulent spectrum

前 田 潤 滋*
Junji MAEDA

1. まえがき

近年、耐風工学の分野でも自己回帰モデルを使ったスペクトル解析法（以下AR法）の利用が広がっているが、変動風を解析する立場からの算定精度に対する議論は岩谷先生¹⁾を除いてはあまり見られないように思われる。以前、1次元および2次元自己回帰法を自然風と風洞乱流に適用した場合の利点を報告²⁾し、その利用を勧めたことから筆者も何か話題提供をとの依頼があり、本コーナーを借りてARモデルによる乱流スペクトルの算定精度について二、三報告させて頂くことにした。

AR法の精度検定は目標スペクトルに対する数値シミュレーションで行われることが多い。この場合時系列波形を目標スペクトルの逆フーリエ変換による波形合成によって作成³⁾し、時系列波形のARモデルから算定されるパワースペクトル（以下ARスペクトル）と目標スペクトルとの比較によってAR法の算定精度を検定するのがよく用いられる方法である。このときARスペクトルは時系列波形のARモデルへのあてはめ、いわゆる同定問題を経て算定される。ARモデルの同定には幾つかのテクニックが報告されているが、広く使われている手

法はARモデルのYule-Walker方程式をLevinson-Durbinのアルゴリズムで解き、FPE基準によってAR係数を決定する赤池の方法⁴⁾である。しかしながら赤池の方法は時系列波形の相関関数を同定問題の入力情報として使用するため、波形合成による時系列シミュレーションを用いる精度検定にはAR係数の決定までにAR法そのものに起因しない誤差が混入する可能性がある。すなわち、①目標スペクトルに対応する時系列波形作成時の誤差と②その時系列の相関関数の算定誤差である。

アンサンブル平均による変動風の自己相関関数の算定誤差については、拙著文献²⁾で報告しているが、Fig. 1にこれを引用した。真の自己相関関数が指数関数で表わされると仮定した場合の風速 u 成分の時系列波形のアンサンブル平均から求められる自己相関関数に含まれる規準化標準誤差を示したのが同図である。なお、風速 u 成分の自己相関関数が指数関数で表される乱流モデル筆者はDryden型と呼んでいる⁵⁾。

自己相関関数の標準誤差は波形に含まれる乱れの積分スケール L_x と平均風速 $\bar{U}$ およびデータの評価時間 T によって異なり、一般に標準誤差はタイ

*九州大学工学部、助手

Research Associate, Faculty of Engineering, Kyushu University.

(本稿受理：平成2年1月16日)

Fig. 1 Standard error of Dryden u component

ムラグ t の増大とともに急激に大きくなるが、比較的小さなタイムラグでも標準誤差を小さくするのは容易ではない。従って上記①の時系列シミュレーション時での誤差を小さく抑えても、時系列の相関関数を同定問題の入力として使用する限り、AR法そのものの誤差の性質だけを抽出することはできないのである。

以下、上記二つの誤差が混入しない精度検定法を工夫し、二、三の乱流スペクトルについてARモデルへのあてはめを定性定量的に検討してみよう。

2. 使用したAR法の精度検定手順

ARモデルの同定問題において入力となる相関関数を時系列データから算定せず、目標スペクトルの理論相関関数を直接使用すれば相関関数に起因する誤差混入を避けられることに着目し、以下の手順でAR法による相関係数およびパワースペクトルの算定精度を検討した。

1. 理論相関関数を無次元時間間隔 $\Delta \tau$ で離散化し、Yule-Walker方程式をLevinson-Durbinのアルゴリズムにより解き、AR係数 $a_i(m)$, $i=1, 2, \dots, m$ を算定する。ただし、無次元時間 τ は次式とした。

$$\tau = \bar{U} \cdot t / L_q \quad (1)$$

ここに、 $\bar{U}$ は平均風速、 L_q は p 成分 (u or v) の q

方向 (x or y) の乱れの積分スケール、 t は実時間である。また、離散時刻 k での時系列の値を x_k 、AR係数を $a_i(m)$, $i=1, \dots, m$ 、ホワイトノイズを e_k として次式で定義する m 次のARモデルを用いる。

$$x_k = e_k - \sum_{i=1}^m a_i(m) x_{k-i} \quad (2)$$

2. 得られたAR係数から $(m+1) \Delta \tau$ 以上のタイムラグの自己相関係数 $\rho_k = \rho(k \Delta \tau)$ を次式で算定し、理論相関係数と比較する。

$$\rho_k = - \sum_{i=1}^m a_i(m) \rho_{k-i} \quad (k=m+1, m+2, \dots) \quad (3)$$

3. AR係数 $a_i(m)$, $i=1, \dots, m$ を用いて、無次元のARスペクトルを次式より求める。

$$\tilde{S}(\eta_p) = \Delta \tau \sigma_e^2 \left| \frac{1}{A(e^{-j2\pi \eta_p \Delta \tau})} \right|^2 \quad (4)$$

ここに、 η_p は次式で定義する無次元周波数

$$\eta_p = n \cdot L_q / \bar{U} \quad (5)$$

で、 n は実周波数。また

$$\sigma_e^2 = \sigma_x^2 \left\{ 1 + \sum_{i=1}^m a_i(m) \rho_i \right\} \quad (6)$$

$$A(e^{-j2\pi \eta_p \Delta \tau})$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^m a_i(m) e^{-j2\pi \eta_p i \Delta \tau} \quad (7)$$

で、 σ_x^2 は時系列波形の分散である。

4. AR次数 m を変えて上記 1 ~ 3 を繰り返し、対応するARスペクトルを目標パワースペクトルと比較検討する。Fig. 2に上記手順を示す。

3. 乱流モデルに対するARモデルの特性

今回検討したのはDryden型とKármán型の乱流モデルについてそれぞれの u 成分および v 成分である。ここで本コーナーの主旨に甘え紙面節約のため各乱流モデルの数式表現の掲載を文献6)の参照に替えることをお許し願いたい。ただ、以下で用いている無次元パワースペクトルと無次元周波数は実周波数 n のパワースペクトル $S(n)$ に対して以下のように定義している。

Fig. 2 Estimation Procedure of AR method

u成分の無次元パワースペクトル：

$$\tilde{S}_u(\eta_u) = \frac{\bar{U} \cdot S_u(n)}{\bar{u}^2 \cdot L_x} \quad (8)$$

u成分の無次元周波数：

$$\eta_u = n \cdot L_x / \bar{U} \quad (9)$$

v成分のパワースペクトル：

$$\tilde{S}_v(\eta_v) = \frac{\bar{U} \cdot S_v(n)}{\bar{v}^2 \cdot L_y} \quad (10)$$

v成分の無次元周波数：

$$\eta_v = n \cdot L_y / \bar{U} \quad (11)$$

指数関数で表されるDryden型自己相関関数はホワイトノイズ $e(t)$ を入力とする次式の1階常微分方程式

$$\dot{x}(t) + x(t) = e(t) \quad (12)$$

で表わされる連続確率過程 $x(t)$ の自己相関係数であり、Dryden型自己相関係数の離散化モデルは1次のARモデルであることが理論的に示される⁷⁾。すなわちDryden型自己相関係数は1次のARモデルで正確に表現できるのである。

Fig. 3の最上部は無次元時間間隔 $\Delta\tau$ を0.1で読み取ったDryden型自己相関係数の理論式を用いて求めた1次のARモデルの自己相関係数である。予測どおり、この曲線は理論式に一致している。この結果は2次以上のARモデルを設定して算定しても同じであった。さらに、 m 次のARモデルでのAR

Fig. 3 Autocorrelation coefficients of theoretical and AR model

係数 $a_i(m)$, $i=1, 2, \dots, m$ の偏相関係数 $a_m(m)$ が有する次式の性質

$$a_p(p) = 0 \quad (p \geq m+1) \quad (13)$$

を調べると $m=1$ となり、Dryden型自己相関係数が1次のARモデルであることの必要十分条件を満たしていることも確認できた。

Fig. 3の最上部に示す1次のAR係数から計算されたARスペクトルとDryden型u成分のパワースペクトルをFig. 4の最上部に示す。当然のことではあるが、理論スペクトルに良く一致している。ただ無次元周波数 η_u が大きくなるに連れて両者の差が見られるが、これは離散時間間隔 $\Delta\tau$ を大きくすると顕著になり、逆に小さくすることで改善できた。

この傾向は他の乱流モデルでも同じであった。

Fig. 4 Power spectrum of theoretical and AR model in standard form

Fig. 5の最上部は無次元離散時間間隔を $\Delta\tau = 0.05$ とした場合のDryden型u成分の対数パワースペクトルである。スペクトルピークはもちろん高周波数域まで非常に良く一致している。

以下同様に、 $\Delta\tau = 0.1$ で読み取ったDryden型v成分、Kármán型のu成分およびv成分の自己相関係数の理論式をそれぞれ用いて計算したARモデルの自己相関係数とARスペクトルを示したのがFig. 3, 4および5である。ただし図の縦軸の()内の値はそれぞれ対応する乱流モデルの座標値の始まりを示すものがある。

Kármán型のu成分の自己相関係数は図上では

Fig. 5 Power spectrum of theoretical and AR model in logarithmic form

Dryden型のそれに非常に良く似ているが、ARモデルへの同定には大きな違いが表れている。

Dryden型v成分、Kármán型のu成分およびv成分の自己相関係数の理論式に対しては、ARモデルの偏相関係数の性質(13)式を用いた明確な次数決定はできなかった。しかしながら、各理論式を用いて計算したARモデルの自己相関係数と理論式を比較したFig. 3に示すように、AR次数が大きくなるに従い理論式に近づく。v成分の自己相関係数は負の相関値を示す範囲を持つのが特徴であるが、ARモデルの自己相関係数が負の領域を表現できるのはDryden型ではAR次数が11次以上、Kármán型で

は16次以上必要であった。このときどちらもAR次数の使用範囲は理論相関係数の負の領域までには達していない。パワースペクトルではFig. 4と5に示すように、視察で良く一致すると言えるのはDryden型v成分で30次以上、Kármán型u成分で10次以上、Kármán型v成分では40~50次以上であった。しかしながら、各乱流モデルのパワースペクトルの高周波数域の特徴である-2乗則や-5/3乗則は低いAR次数のときでも良く対応している。離散時間間隔を小さく採れば、一致する高周波数域をさらに延ばすことができるのはDryden型u成分のときと同じである。ただしこの場合はAR次数を大きくしなければならなかった。

これらの結果をまとめると、Kármán型v成分は他のモデルに比べて理論値への収束が緩やかでより大きなAR次数を必要とすると言える。

4. 乱れのスケールの算定誤差と偏相関係数の変化

前節では、自己相関係数とパワースペクトルを図上での視察により比較検討したが、定量的な判断規準として、乱れの積分スケールの算定精度を検討してみた。Table 1は各乱流モデルでの縦方向の乱れの積分スケール値を誤差5%あるいは3%で推定できた最小のAR次数である。ただし、いずれも無次元時間間隔を $\Delta \tau = 0.1$ とした場合であり、離散間隔を小さくすれば同じ精度を有する最小次数は大きくなる。

一方、Fig. 6は各乱流モデルに対する偏相関係数の値を示すもので横軸はAR次数である。この図とTable 1とを比べると大体 $10^{-3} \sim 10^{-4}$ 程度になる偏相関係数を探すことがAR次数決定の判断規準の一つになりそうである。ただし、Kármán型v成分は $m = 8$ で偏相関係数が 10^{-4} のオーダーになる極小値を持つが、このとき乱れのスケールで誤差20%を示し、十分な精度に達していなかった。

Table 1 AR order for estimation error of turbulent scale ($\Delta \tau = 0.1$)

turbulent model	error 5 %	error 3 %
Dryden u comp.	1	1
Dryden v comp.	33	42
Kármán u comp.	8	11
Kármán v comp.	43	57

Fig. 6 Partial correlation coefficients of AR model ($\Delta \tau = 0.1$)

5. 結び

Dryden型とKármán型乱流モデルでは、Dryden型u成分以外は理論的には無限次のARモデルが必要である。AR次数を大きく設定すれば、精度をより上げることができるが、例えば、乱れの積分スケールをある範囲の誤差に収めるには有限次のARモデルを用いることができる。ここでは無次元時間間隔 $\Delta \tau = 0.1$ に対するこのような有効次数を示した。無次元時間や偏相関係数の使用あるいは乱れのスケールの算定精度を基準にした精度検定は、ARモデルの同定精度を保証するものであり、例えば、構造物の逐次風応答計算の外力風速に用いる実風速シミュレーションなどに利用できると考えられる。

しかしながら、風速時系列データの自己相関係数の算定を経たARモデルの同定に上述の次数を直接適用することはできない。なぜなら上述の論理

展開では理論相関関数を用いており、時系列からの自己相関係数の算定誤差がARモデルの同定に及ぼす影響を全く考慮していないからである。

AR次数に時系列データ数の平方根を設定したARスペクトルを見かけることがあるが、筆者はこのような次数決定には賛成できない。このようにして回帰次数を上げることによって、本コーナー前半で述べた自己相関関数の推定精度の悪い領域を使用する可能性があるからである。AR次数に大きな影響を与える離散時間間隔の大きさやデータ長など、ディジタル解析上のいくつかのパラメータを総合的に考慮してAR次数を決定する方が良い結果につながるのではないだろうか。このような観点からも、安定性など問題点がないわけではないが、ARモデルを用いる限りにおいては筆者は赤池のFPE基準を用いた次数決定を使用している。ただし、出来る限りデータ長を長くして自己相関係数の推定精度を上げることが必要である。ある程度までの無次元周波数域を解析範囲とし、なお且つ自己相関関数の推定精度を上げようとするれば必然的にデータ個数は増大するが、これはAR法を変動風速の解析に用いる場合には避けられないことである。

耐風工学を勉強する者にとってはスペクトル解析法は一つのツールである。筆者はそのツールの

一ユーザーとして筆を執らせて頂いたが、本稿に対する皆様のご批判を承りたい。

今回は触れる余裕がなかったクロススペクトルなどの2次元問題やARモデル以外のパラメトリックモデルについても機会があれば、併せてご報告申し上げたい。

参考文献

- 1) 岩谷；MEMによるスペクトル解析について、日本風工学誌, Vol. 35, 1988, pp45-47.
- 2) 前田, 牧野；変動風速のスペクトル計算法について、日本建築学会論文報告集, 第300号, 1981, pp19-29.
- 3) 星谷；確率論手法による振動解析, 鹿島出版会, 1974, 3章.
- 4) 赤池, 中川；ダイナミックシステムの統計的解析と制御, サイエンス社, 1972, 3章.
- 5) 前田, 牧野；大気乱流の平均流方向成分の統計的性質に関する研究, 日本建築学会論文報告集, 第287号, 1980, pp77-86.
- 6) ESDU 74031; Characteristics of atmospheric turbulence near the ground, 1974, pp4-5.
- 7) Jenkins & Watts; Spectral Analysis and its applications, Holden-Day, 1968, chap. 5.