ロジカルフローテスト法におけるグラフの 類似度係数の特性解析

竹谷 誠*, 安木 伸明**, 富田 聡*

Characteristic Analysis of a Similarity Index between a Pair of Graphs
in the Logical Flow Testing Method

Makoto TAKEYA, Nobuaki YASUGI and Satoshi TOMITA

The traditional paper test is able to measure mainly individual student's the understanding level of individual bits of knowledge. However, it is difficult to measure the internal connectedness among bits of knowledge. The authors had been presented a new testing method, called a Logical Flow Testing (LFT) for formative evaluation. The teacher may draw a graph, called a Logical Flow Graph (LFG) according to the contents to be taught, and then teach the subject based on the LFG. After lecturing, the teacher may give the LFT with elements which are equal to those of the teacher's LFG. The teacher compares individual students' LFGs with the teacher's LFG, and evaluates the structural understanding levels of individual students. This paper discusses similarity index based on qualitative degree of sequencing. As a result of linear translation ψ of the similarity index, the authors show that the index ψ is an expansion of traditional rank order correlation coefficients, such as the γ coefficient. Lastly, this paper shows that similarity index is effective for LFGs with partially ordered data structure from both theoretical and practical view points.

Key words: Logical flow testing method, formative evaluation, structural knowledge, similarity index, and rank order correlation coefficient

キーワード: ロジカルフローテスト法, 形成的評価, 構造的知識, 類似度係数, 順位相関係数

1. はじめに

学校教育における教育測定評価は多義にわたるが, その中において, 学習者の定量的な測定評価の重要性は以前より指摘されている(永岡, 1988). 学習者を評価する際, 個々の知識の理解度や知識量の測定だけでなく, 知識間の構造的理解の測定の重要性も指摘されており, その解決法として, 有向グラフを用いた

Shavelson, R.J. (1972), Shavelson, R.J. and Stanton, G.C. (1975) による認知構造や Novak, J.D. (1984) による概念マップなどの方法論が提案されている. しかしながら, 前者の Shavelson, R.J. 等は, 有向グラフでなく無向グラフとして処理し, 各頂点の入力数と出力数の和の差異を定量化したり, 各頂点間の距離の差を定量化したりしている. したがって, いずれも表層的なグラフの類似性を定量化したもので, 質的な構造的理解の程度を評価できない. また後者の Novak, J.D. は, グラフの類似性の定量化を行っていない. つまり, これらの方法論は教師の構造的理解と各学習者の構造的理解の類似度を定量的に測定しておらず, 到達度評価の道具としての機能を有していない. そのために, 学校教育において構造的な理解度を測定する, いわゆる形成的評価のための到達度測定には適用できない.

---

*拓殖大学工学部

(Faculty of Engineering, Takushoku University)

連絡先: 〒193-0985 八王子市館町 815-1

E-mail: takeya@cs.takushoku-u.ac.jp

**三菱電機情報ネットワーク株式会社

(Mitsubishi Electric Information Network Corporation)

一方、対象を広げて、一般の有向グラフの類似性を議論した研究として、いくつか先行研究がある。Waller, R.J. (1979) は、ISM モデルである2つの有向グラフの隣接行列、可到達行列に和集合・対称差・積演算を施して得られるグラフの構造を目視で比較検討する手法を提案しているが、定量化がなされていない。この他、川島・井宮・西田 (1996) は、文章同士を比較するための解析木構造間の距離を議論したり、朴・北岡・佐藤・田村 (2002) は、医用画像における三次元木構造のマッチングのための木構造の類似度を提案したりしている。しかしながら、これらの方法は、木構造に限定されており、理解構造間の比較分析には適用できない。

他方、山口・加地 (1982) は、 k -近傍の系列に対するハミルトン距離に基づいたグラフの距離の概念を導入している。グラフ的距離の増減により、グラフの類似性を定義している。本方法は、各頂点の近傍にある頂点集合の差異に着目している点は評価できるが、近傍をどの距離までにするかによって差異は当然変化するので、 k をいかに設定するかが問題である。

そこで、竹谷・佐々木 (1997) は構造的理解の定量的な測定評価を実現するために、ロジカルフローテスト法 (Logical Flow Test method: 以後、LFT 法と略す) を提案した。LFT 法は、論理的に問題解決するためのプロセスを教師が予めロジカルフローグラフ (Logical Flow Graph: 以後、LFG と略す) として描画し、そのグラフに基づき授業を展開した後に、各学習者に LFG を描画させ、構造的理解の程度を測定するテスト法である。ここで、LFG とは、対象を複数の要素に分解し、要素間の順序関係を有向枝で描いた有向グラフである。順序関係は、因果関係・前提関係・包含関係などであり、テスト毎に、順序関係 (有向枝) の意味が一義的に提示される。たとえば、課題 A が課題 B と因果関係にあるとは、A が原因となってその結果として B が生起するときの関係であり、2.1 (1) で事例を紹介する。また、学習課題 A が B の前提関係にあるとは、A は B を学習するための前提課題であるときの関係であり、2.1 (2) で事例を紹介する。なお、LFT 法を用いた実践報告は、岡本・佐々木・木原・磯野・杉林・竹谷 (2000)、また、4 年間にわたる継続的実践報告と有効性の検証結果は、佐々木・木原・磯野・杉林・竹谷 (2003) に報告されている。

その後、米澤・新藤・平井・竹谷 (2006) が観点の異なる別の類似度係数を提案したので、竹谷・安木

(2004) は、LFG の類似度の定量化法を体系的に再構築し、それらを2種類の差異度 (類似度) I 型・II 型に大別した。I 型の代表例は、竹谷・佐々木 (1997) において提案した類似度で、教師と学習者の LFG の対応する各有向枝に着目し、当該有向枝を通る経路上の頂点の順序対の一致する程度を定量化したものである。この方法は、学習者が関係する頂点間に正しく順序関係 (有向枝) を描画したか否かを測定した定量化法である。

II 型の代表例は、順序関係 (有向枝) の有無に直接的に着眼せずに、頂点の順序構造に着目した類似度 (竹谷・安木, 2004) で、本論文では、その特性を考察する。教師と学習者の LFG の対応する各頂点に着目し、当該頂点を通る経路上の頂点と当該頂点との順序対の一致する程度を定量化したものである。ここでの順序関係 (有向枝) は、たとえば因果関係・包含関係の類であり、LFG 上で、頂点の順序系列にのみに着目している。つまり、LFG の経路に含まれる頂点間は、順序関係 (有向枝) で、経路上の順位が規定される。したがって、この定量化法は、LFG が推移律を満足することを前提とする。ここで、推移律を満足するとは、任意の要素 a, b, c に対して、順序関係 (有向枝) $a \rightarrow b$, $b \rightarrow c$ のとき、常に $a \rightarrow c$ が成り立つことである。そこで、本方法で定義した類似度は、線形変換すると既存の順位相関係数を拡張した係数となることを論ずる (竹谷・安木, 2005)。

具体的には、まず 2. では、LFG に関する基本定義、類似度の分類を行い、次いで 3. では、推移グラフの LFG 間の類似度 S_v を提案し、その類似度の基本的特性を吟味する。次いで、4. では、 S_v の特性をより深く考察するために、 $\psi = 2S_v - 1$ と線形変換し、既存の順位相関係数と比較考察する。その結果、 ψ が順位相関係性をもつことを導出し、さらに、既存の順位相関係数の拡張形であり、半順序データにも適用可能であることを論証する。5. では、実践例を用いて本提案の順位相関係数の特性を考察し、6. では今後の課題を述べる。

2. LFG に関する基本定義

2.1. LFG と LFT

基本定義に先立ち、LFT の基本的な考え方を説明する (竹谷・佐々木, 1997)。授業において、学習者が単元や領域の知識を習得するとき、それぞれの知識の内容を習得することはもちろん大切であるが、複雑に関

連する知識を関連付けて理解することも重要である。そこで、教師は、ばらばらの知識の羅列として指導するのではなく、LFGに基づき、知識をチャンクしやすいように指導内容と指導順序を決定する。つまり、複数個の学習課題をひとつの認知ユニットとしてチャン

ク化し、いくつかのチャンク化された認知ユニットをまとめ、構造的知識が習得しやすいように工夫するわけである。したがって、学習者が獲得した知識を体系的にどのように把握しているかを測定評価することが求められる。以下に、因果関係に関する構造的理解と

【課題】 次の19項目の順序関係を構造的に描きなさい。ここで、「①富士山麓住民の生活環境悪化」を最終項目として構造化しなさい。なお、順序関係「A→B」とは、「Aという直接の原因（前提条件）により、結果としてBが生起する」ことを意味します。

① 富士山麓住民の生活環境の悪化	② 工業用水の汲み上げ	③ 河川の水質汚濁	④ 人工沢の発生
⑤ 農業への被害	⑥ 大気汚染	⑦ 地下水の塩水化	⑧ 森林の伐採
⑨ ゴルフ場の農業投棄	⑩ 工場建設	⑪ 立ち枯れ森林の増加	⑫ 生活雑排水の河川への投棄
⑬ 車の排気ガス	⑭ 地下水の減少	⑮ 土地の保水能力の減退	⑯ ゴルフ場建設
⑰ 土石流の災害発生	⑱ スパルライン建設	⑲ 有機溶剤の河川への投棄	

図1. 富士山麓住民の生活環境悪化の要因間の因果関係の理解度を測定するロジカルフローテスト用紙と学生の回答

前提関係に関する構造的理解を計測するための LFT について、具体的事例を示す。

(1) 因果関係に基づく LFG

因果関係の構造的理解を測定する LFT の事例を、図 1 に示す。図中、手書部分は、学習者の回答例である。本図は、本学工学部の科目「科学技術と環境」中、

3 回シリーズで「富士山麓の住民の環境問題」をテーマに行った講義の最後に教師が準備した LFT である。講義内容に即した、19 個の要素から構成される。本例では、最終要素 ① は、事前に学習目標として設定されている。したがって、各学生が残る 18 の要素を配置し、適宜要素間を、順序関係(本例では、「直接的な因果関

図 2. 教師描画の富士山麓住民の環境問題の LFG

係))を意味する有向枝を描く。一般的に、LFGは、複数の要素を頂点、要素間の順序関係を有向枝で表記して、論理的な順序構造を有向グラフで表現したものである。本例では、順序関係(有向枝)は、「直接的な因果関係」を表している。

図2は、教師が講義に臨むに当たって、講義内容・順序を組み立てるために用意したLFGである。本図で、たとえば、頂点⑮(土地の保水能力の減衰)への有向枝に着目すると、⑪→⑮、⑧→⑮とあり、要素⑮の直接的な原因は、要素⑪(立ち枯れ森林の増加)と⑧(森林の伐採)であることを示している。他方、頂点⑮からの有向枝に着目すると、⑮→④とあり、要素⑮が直接的な原因となって、要素④(人口沢の発生)を招来せしめていることを示している。このように、各要素間の順序関係、本例では、「直接的な因果関係」に着眼して、全体の順序構造グラフをLFGとして描画したものである。ここで、本LFGは因果関係を構築した構造であるため、描画されたLFGが推移グラフでなくとも、推移律が成り立つことに注意されたい。つまり、長さ2以上の経路の始点と終点は、「間接的な因果関係」が成り立つことを意味している。

したがって、次に図1から、指導後に学習者ひとり一人が、どのような構造的理解をしているかを測定評価することが課題となる。すなわち、各学習者の構造的な理解度を測定評価することが教師に求められる。教師が設定した学習課題と同一のものを学習者に提示し、それらをどの程度構造的に表現できるかをLFTで測定するわけである。LFTは、学習指導において、教師が学習者に教授したい学習内容や学習構造が、学習者に正しく伝達されているかを測定評価する道具である。本論文で提案する方法は、授業に密接に連動した利用に限定しており、自由な発想でLFGを作成することを学習者に要求していない点に注意されたい。あくまでも、LFTは授業を通して教師と各学習者がいかに合意形成できたかを測定評価する道具である。その結果、個々の学習者のLFG(図1)が教師のLFG(図2)と比較して、構造的理解の程度を測定評価するわけである。

(2) 前提関係に基づくLFG

次に、前提関係の構造的理解を測定するLFTの問題事例を、図3に示す。本図は、本学工学部機械システム工学科の科目「設計製図II」で実施しているLFTの事例である。本事例は、一軸スライダの製図(磯野、2000)をもとに組立順序(前提関係)を考慮してLFG

を作成するLFTである。

図中の①～⑯は部品番号であり、図中右上の表にそれぞれの番号に対応した部品名が記されている。ここで、簡単に一軸スライダの動作を説明する。④のDCモータが回転することにより、⑪のボールねじが回転し、①のテーブルが左右に動くという動作をする。本LFTは、本組立図中CAD製図を授業で行う⑧軸受カバー、⑩サポートユニットI、⑫ナットホルダ、⑭サポートユニットIIの4部品を除いた12部品を対象とする。LFTは、12部品で構成される一軸スライダを製図する過程を構造的に構築する課題である。

設問は、④モータと⑪ボールねじの情報は既知であるとして、それらから始めて、最終的にはスライドする機構を配置する⑯ベースを製図する場合の製図プロセスを構築する課題である。つまり、④と⑪を入口とし、⑯を出口とするLFGを製作するわけである。回答用紙には、④、⑪、⑯の3つの課題があらかじめ印刷したLFTを用いる。図4(a)に教師と図4(b)に一学習者の描画したLFGをそれぞれ示す。たとえば、教師のLFGを例に説明すると、⑤モータブラケットは、④DCモータを支える役割をするので、④DCモータの仕様が決まらなければ部品図は完成しない。また、⑤モータブラケットは、⑯ベースに固定されるので、モータブラケットの形状や寸法が決まらなければ、ベースの部品図は完成しない。そのため、教師のLFGでは、④→⑤→⑯の順序関係(前提関係)が描画されている。

図1と図2、あるいは図4(a)と図4(b)のそれぞれ両者のグラフを熟視したとしても、各学習者と教師のLFGを比較し、観察しただけでどの程度類似しているかを定量化することは甚だ困難である。それを解決するために、LFG間の類似度を提案するが、それに先立ち、諸定義を行う。

2.2. LFGの基本定義

LFGGは、 n 個の要素を頂点 v_j ($j=1, 2, \dots, n$)とした頂点集合 $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 、 m 個の順序関係を有向枝 e_k ($k=1, 2, \dots, m$)とした枝集合 $E=\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ を用いた、非循環有向グラフ $G=(V, E)$ で表す。ここで、頂点 v_i から頂点 v_j への有向枝を、順序対 (v_i, v_j) で表す。また、教師のLFGと学習者のLFGをそれぞれ、 $G_T=(V_T, E_T)$ 、 $G_S=(V_S, E_S)$ で表す。前提として、教師が設定した要素集合と同一の要素集合を用いて、学習者がLFGを描画する。つまり、 $V_T=V_S=$

設計製図 II 問題用紙

【課題 1】下記の一軸スライダの組立図を参照し、下記の指定項目の部品をすべて作成する際の作成プロセスを LFG として記述しなさい。ここで、部品④と⑪は初期項目で、部品⑬は最終項目としなさい。

部品番号	部 品 名
①	テーブル
②	転がり直動案内
③	ガイドフレーム

部品番号	部 品 名
⑤	モータプラケット
⑨	アンギュラ玉軸受
⑩	サポートユニット I

部品番号	部 品 名
⑫	ナットホルダー
⑬	深溝玉軸受
⑭	サポートユニット II

照合番号	名 称	図面番号・材料	個数	記 事
1	テーブル	2G1A5601	1	
2	転がり直動案内		2	市販品
3	ガイドフレーム	2G1A5602	2	
4	DCモータ		1	市販品
5	モータプラケット	2G1A5603	1	
6	カップリング		1	市販品
7	ロックナット	2G1A5604	1	
8	軸受カバー	2G1A5605	1	
9	アンギュラ玉軸受		2	市販品
10	サポートユニット I	2G1A5606	1	
11	ボールねじ		1	市販品
12	ナットホルダー	2G1A5607	1	
13	深溝玉軸受		1	市販品
14	サポートユニット II	2G1A5608	1	
15	C形止め輪		1	市販品
16	ベース	2G1A5609	1	

記事：1. ボルト類は省略。
2. グリース潤滑を施すこと (ISOグレード50程度)。

図 3. 一軸スライダの部品作成プロセスの LFT 問題

V とする。また、一般的に、集合の要素数を絶対値を用いて表す。たとえば、 $|V_T| = |V_S| = |V| = n$ である。また、グラフ G_Z において、任意の枝 $(v_i, v_j) \in E_Z$ に対して、頂点 v_i から頂点 v_j へ長さ 2 以上の経路が存在するとき、 E_Z から枝 (v_i, v_j) を除去したグラフを G_Z のスケルトングラフと言い、 $\check{G}_Z$ と表記する ($Z = T, S$)。さらに、 G_Z において、始点と終点の順序対の集合を、それぞれ P_Z で表す ($Z = T, S$)。

2.3. 経路に着目した集合

本論文で議論する類似度は、測定対象となる頂点(要素)と有向枝(順序関係)の類似の程度を、それを含

む経路を基準として測定している。そこで、経路に関連する集合を、次に定義する。グラフ G_Z ($Z = T, S$) において、

- $V \langle \rightarrow v_j \rangle^Z$: 頂点 v_j を終点とする経路の集合に含まれる頂点の集合
- $V \langle v_j \rightarrow \rangle^Z$: 頂点 v_j を始点とする経路の集合に含まれる頂点の集合
- $V \langle \rightarrow v_j \rightarrow \rangle^Z$: 頂点 v_j を通る経路の集合に含まれる頂点の集合
- $E \langle \rightarrow v_j \rangle^Z$: 頂点 v_j を終点とする経路の集合に含まれる枝の集合
- $E \langle v_j \rightarrow \rangle^Z$: 頂点 v_j を始点とする経路の集合に含まれる枝の集合

図 4. 一軸スライダの部品作成プロセスの LFG

れる枝の集合

- $O \leftrightarrow v_j \rightarrow^Z$: 頂点 v_j を通る経路の集合に含まれる始点と終点の順序対の集合
- $V \langle \rightarrow (v_i, v_j) \rangle^Z$: 枝 (v_i, v_j) の始点を終点とする経路の集合に含まれる頂点の集合
- $V \langle (v_i, v_j) \rightarrow \rangle^Z$: 枝 (v_i, v_j) の終点を始点とする経路の集合に含まれる頂点の集合
- $E \langle \rightarrow (v_i, v_j) \rangle^Z$: 枝 (v_i, v_j) の始点を終点とする経路の集合に含まれる枝の集合
- $E \langle (v_i, v_j) \rightarrow \rangle^Z$: 枝 (v_i, v_j) の終点を始点とする経路の集合に含まれる枝の集合
- $O \langle \rightarrow (v_i, v_j) \rightarrow \rangle^Z$: 枝 (v_i, v_j) を通る経路の集合に含まれる始点と終点の順序対の集合
- $V \langle v_i \Rightarrow v_j \rangle^Z$: 頂点 v_i を始点, 頂点 v_j を終点とする経路の集合に含まれる頂点の集合
- $E \langle v_i \Rightarrow v_j \rangle^Z$: 頂点 v_i を始点, 頂点 v_j を終点とする経路の集合に含まれる枝の集合
- $O \langle v_i \Rightarrow v_j \rangle^Z$: 頂点 v_i を始点, 頂点 v_j を終点とする経路の集合に含まれる頂点の順序対の集合

なお, いずれの場合も, 対象を含む基準自体を集合に含まないものとする。たとえば, $v_j \notin V \langle \rightarrow v_j \rangle^Z$, $v_j \notin V \langle v_j \rightarrow \rangle^Z$, $(v_i, v_j) \notin E \langle \rightarrow (v_i, v_j) \rangle^Z$, $(v_i, v_j) \notin E \langle (v_i, v_j) \rightarrow \rangle^Z$ とする。また, 集合の論理演算として論

理差を定義する。集合 A, B の論理差 ∇ は次式で示される。

$$A \nabla B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$$

2.4. 類似度係数の分類

2つのグラフ LFG の類似度は, グラフ上の何の類似性に着眼するかにより 3 種類に分類される。すなわち, LFG の類似性を比較する対象を何にするかである。2つの LFG 上の対応する, 各頂点の類似性か, 各枝の類似性か, あるいは頂点の各順序対の類似性かによって分類される。この 3 分類を, 「対象」と呼ぶこととする。次にどのように類似性を計量化するかにより 3 種類に分類される。いずれも対象を通る経路に着目する点では同じであるが, 経路上の何を判断基準とするかで分類される。この 3 分類を, 「基準」と呼ぶこととする。つまり, 経路上の頂点の類似性か, 枝の類似性か, 頂点の順序対の類似性か, いずれの基準により類似性を計量するかにより, 3 分類する。したがって, LFG G_s と G_T の類似度係数の一般式は, 対象 x , 基準 α としたとき, 類似度係数 $S_\alpha^x(G_s, G_T)$ は,

$$S_\alpha^x(G_s, G_T) = \frac{\sum_x |\alpha_x^T \cap \alpha_x^S|}{\sum_x \text{Max.} |\alpha_x^T \cap \alpha_x^S|} \quad (1)$$

表 1. 類似度の「対象」と「基準」に基づく分類と定義式

基準 (二つのグラフ上で、対象を通る経路上での類似性の判断基準)			
対象を通る経路上の共通する頂点の数		対象を通る経路上の共通する枝の数	対象を通る経路上の始点と終点の共通する順序対の数
対象 (二つのグラフでの類似性の比較対象)	頂 点	$S_v \equiv \frac{\left \bigcap_{j=1}^n (V \langle \rightarrow v_j \rangle^T \cap V \langle \rightarrow v_j \rangle^S) \right }{\left \bigcup_{j=1}^n (V \langle \rightarrow v_j \rangle^T \cap V \langle \rightarrow v_j \rangle^S) \right }$	$S_0 \equiv \frac{\left \bigcap_{j=1}^n O \langle \rightarrow v_j \rangle^T \cap V \langle \rightarrow v_j \rangle^S \right }{\left \bigcup_{j=1}^n O \langle \rightarrow v_j \rangle^T \cup V \langle \rightarrow v_j \rangle^S \right }$
	枝	$\tilde{S}_v \equiv \frac{\left \bigcap_{i,j=1}^n (V \langle \rightarrow (v_i, v_j) \rangle^T \cap V \langle \rightarrow (v_i, v_j) \rangle^S) \right }{\left \bigcup_{i,j=1}^n (V \langle \rightarrow (v_i, v_j) \rangle^T \cup V \langle \rightarrow (v_i, v_j) \rangle^S) \right }$	$\tilde{S}_0 \equiv \frac{\left \bigcap_{i,j=1}^n O \langle \rightarrow (v_i, v_j) \rangle^T \cap V \langle \rightarrow (v_i, v_j) \rangle^S \right }{\left \bigcup_{i,j=1}^n O \langle \rightarrow (v_i, v_j) \rangle^T \cup V \langle \rightarrow (v_i, v_j) \rangle^S \right }$
	頂点の順序対	$\tilde{S}_v \equiv \frac{\left \bigcap_{i,j=1}^n V \langle v_i \Rightarrow v_j \rangle^T \cap V \langle v_i \Rightarrow v_j \rangle^S \right }{\left \bigcup_{i,j=1}^n V \langle v_i \Rightarrow v_j \rangle^T \cup V \langle v_i \Rightarrow v_j \rangle^S \right }$	$\tilde{S}_0 \equiv \frac{\left \bigcap_{i,j=1}^n O \langle v_i \Rightarrow v_j \rangle^T \cap O \langle v_i \Rightarrow v_j \rangle^S \right }{\left \bigcup_{i,j=1}^n O \langle v_i \Rightarrow v_j \rangle^T \cup O \langle v_i \Rightarrow v_j \rangle^S \right }$

で定義する．変形して，

$$S_a^x(G_S, G_T) = \frac{\sum_x |\alpha_x^T \cap \alpha_x^S|}{\sum_x |\alpha_x^T \cup \alpha_x^S|} \quad (2)$$

となる．当然ながら， $0 \leq S_a^x(G_S, G_T) \leq 1$ である．

表 1 に分類表を示す．表中， $S_a^x(G_S, G_T)$ は視覚的に理解しやすいように，対象 x が，(1) 頂点のときには， S_a^x を S_a ，(2) 枝のときには， S_a^x を $\bar{S}_a$ ，(3) 頂点の順序対のときには， S_a^x を $\check{S}_a$ と表すこととする．他方，基準 α は対象 x を通る経路上の (a) 頂点のときには， $\alpha = V$ ，(b) 枝のときには， $\alpha = E$ ，(c) 頂点の順序対のときには， $\alpha = O$ と表すこととする．したがって，計 9 種類の類似度が定義される．9 種類のうち，同値の係数が 3 種類存在する．

【性質 1】 (i) $\bar{S}_O = \check{S}_E$ ，(ii) $S_E = \bar{S}_V$ ，(iii) $S_O = \check{S}_V$ (3)

(証明) (i) に関しては，竹谷・佐々木 (1997) の【性質 9】．(ii)，(iii) に関しては，同様であるので略．

(証明終)

したがって，表 1 の類似度は最終的には 6 種類に分類される．さらに，枝に着眼点を置いた計量化法と頂点に着眼点を置いた計量化法に大別でき，以下の通り，I 型・II 型と弁別している (竹谷・安木，2005)．

I 型： $\bar{S}_E$ ， $S_E (= \bar{S}_V)$ ， $\bar{S}_O (= \check{S}_E)$

II 型： S_V ， $\check{S}_O$ ， $S_O (= \check{S}_V)$

竹谷・佐々木 (1997) は，I 型の内，類似度 $\bar{S}_O (= \check{S}_E)$ に関する特性と利用法を提案した．しかし，II 型に関しては，考察していないので，本論文では，II 型の $S_V (G_S, G_T)$ に関して議論することとする．

3. 順序構造に着目した類似度とその基本的特性

3.1. 類似度の定義と基本的性質

LFG G_S と G_T の任意の頂点 v_j ($j=1, 2, \dots, n$) に共通する頂点の可到達集合と先行集合の要素数の総和をその最大値で正規化した値として， G_S と G_T の類似度を定義する．任意の頂点 v_j ($j=1, 2, \dots, n$) において，共通する頂点の可到達集合，また共通する頂点の先行集合はそれぞれ $V \langle \rightarrow v_j \rangle^T \cap V \langle \rightarrow v_j \rangle^S$ と $V \langle v_j \rightarrow \rangle^T \cap V \langle v_j \rightarrow \rangle^S$ で表すことができる．すなわち， G_S と G_T の類似度を次のように定義する．

$$S_V(G_S, G_T) \equiv$$

$$\frac{\sum_{j=1}^n \left| (V \langle \rightarrow v_j \rangle^T \cap V \langle \rightarrow v_j \rangle^S) \cup (V \langle v_j \rightarrow \rangle^T \cap V \langle v_j \rightarrow \rangle^S) \right|}{\sum_{j=1}^n \text{Max.} \left| (V \langle \rightarrow v_j \rangle^T \cap V \langle \rightarrow v_j \rangle^S) \cup (V \langle v_j \rightarrow \rangle^T \cap V \langle v_j \rightarrow \rangle^S) \right|} \quad (4)$$

ここで，

$$(V \langle \rightarrow v_j \rangle^T \cap V \langle \rightarrow v_j \rangle^S) \cap (V \langle v_j \rightarrow \rangle^T \cap V \langle v_j \rightarrow \rangle^S) = \phi \quad (5)$$

が成り立つので，

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left| (V \langle \rightarrow v_j \rangle^T \cap V \langle \rightarrow v_j \rangle^S) \cup (V \langle v_j \rightarrow \rangle^T \cap V \langle v_j \rightarrow \rangle^S) \right| \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\left| V \langle \rightarrow v_j \rangle^T \cap V \langle \rightarrow v_j \rangle^S \right| + \left| V \langle v_j \rightarrow \rangle^T \cap V \langle v_j \rightarrow \rangle^S \right| \right) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \text{Max.} \left| (V \langle \rightarrow v_j \rangle^T \cap V \langle \rightarrow v_j \rangle^S) \cup (V \langle v_j \rightarrow \rangle^T \cap V \langle v_j \rightarrow \rangle^S) \right| \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\text{Max.} \left| V \langle \rightarrow v_j \rangle^T \cap V \langle \rightarrow v_j \rangle^S \right| + \text{Max.} \left| V \langle v_j \rightarrow \rangle^T \cap V \langle v_j \rightarrow \rangle^S \right| \right) \end{aligned} \quad (7)$$

故に，

$$\begin{aligned} \text{Max.} \left| V \langle \rightarrow v_j \rangle^T \cap V \langle \rightarrow v_j \rangle^S \right| &= \left| V \langle \rightarrow v_j \rangle^T \cup V \langle \rightarrow v_j \rangle^S \right| \\ \text{Max.} \left| V \langle v_j \rightarrow \rangle^T \cap V \langle v_j \rightarrow \rangle^S \right| &= \left| V \langle v_j \rightarrow \rangle^T \cup V \langle v_j \rightarrow \rangle^S \right| \end{aligned} \quad (8)$$

したがって，類似度 $S_V(G_S, G_T)$ は次式となる．

$$\begin{aligned} S_V(G_S, G_T) &= \frac{\sum_{j=1}^n \left(\left| V \langle \rightarrow v_j \rangle^T \cap V \langle \rightarrow v_j \rangle^S \right| + \left| V \langle v_j \rightarrow \rangle^T \cap V \langle v_j \rightarrow \rangle^S \right| \right)}{\sum_{j=1}^n \left(\left| V \langle \rightarrow v_j \rangle^T \cup V \langle \rightarrow v_j \rangle^S \right| + \left| V \langle v_j \rightarrow \rangle^T \cup V \langle v_j \rightarrow \rangle^S \right| \right)} \end{aligned} \quad (9)$$

そこで， $S_V(G_S, G_T)$ は，次の性質をもつ．

【性質 2】 (i) $0 \leq S_V(G_S, G_T) \leq 1$

(ii) $S_V(G_S, G_T) = 1 \Leftrightarrow \check{G}_S = \check{G}_T$ (10)

(iii) $S_V(G_S, G_T) = 0 \Leftrightarrow P_S \cap P_T = \phi$

(証明) 略．

また，

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left| V \langle \rightarrow v_j \rangle^T \cap V \langle \rightarrow v_j \rangle^S \right| \\ &= \sum_{j=1}^n \left| V \langle v_j \rightarrow \rangle^T \cap V \langle v_j \rightarrow \rangle^S \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left| V\langle \rightarrow v_j \rangle^T \cup V\langle \rightarrow v_j \rangle^S \right| \\ &= \sum_{j=1}^n \left| V\langle v_j \rightarrow \rangle^T \cup V\langle v_j \rightarrow \rangle^S \right| \end{aligned} \quad (11)$$

が成り立つので, $S_V(G_S, G_T)$ は, 次式の通り, 簡略化して示することができる.

$$\begin{aligned} S_V(G_S, G_T) &= \frac{\sum_{j=1}^n \left| V\langle \rightarrow v_j \rangle^T \cap V\langle \rightarrow v_j \rangle^S \right|}{\sum_{j=1}^n \left| V\langle \rightarrow v_j \rangle^T \cup V\langle \rightarrow v_j \rangle^S \right|} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^n \left| V\langle v_j \rightarrow \rangle^T \cap V\langle v_j \rightarrow \rangle^S \right|}{\sum_{j=1}^n \left| V\langle v_j \rightarrow \rangle^T \cup V\langle v_j \rightarrow \rangle^S \right|} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで, } |V\langle \rightarrow v_j \rangle^T \cap V\langle \rightarrow v_j \rangle^S| &\equiv P_j \\ |V\langle \rightarrow v_j \rangle^T \cup V\langle \rightarrow v_j \rangle^S| &\equiv Q_j \end{aligned} \quad (13)$$

と置くと,

$$S_V(G_S, G_T) = \frac{\sum_{j=1}^n P_j}{\sum_{j=1}^n Q_j} \quad (14)$$

なお, $S_V(G_S, G_T)$ の計算プロセスの理解を深めるために, 図 1 と図 2 で示した, 学生の LFG G_S と教師の LFG G_T の類似度の計算プロセスを示そう (表 2). 表 2 は, 教師と学生の LFG における 19 要素それぞれの前提課題の集合をまとめ, その積集合と和集合の要素数を計算した表である. この結果, 式(14)を用いて, 類似度は, $S_V(G_S, G_T) = 36/87 = 0.41$ となる. さて, ここで順序構造に着目した類似度の特性を考察する前に, その準備として順位相関係数で用いる順方向と逆方向の概念を本稿の定義に則って, 再定義しておこう.

3.2. 順方向と逆方向

安田・海野 (1977) で示された順位相関性の概念を, LFG に適用する. まず同順位がない場合, つまり 2 つのグラフ $G_Z = (V, E_Z)$ ($Z = S, T$) が, 線形グラフである場合を吟味する. 図 5 に示した G_L が, 線形グラフの

表 2. 図 1 の学生の LFG G_S と図 2 の教師の LFG G_T の類似度計算プロセスの説明表

j	$V\langle \rightarrow v_j \rangle^T$	$V\langle \rightarrow v_j \rangle^S$	$V\langle v_j \rightarrow \rangle^T$	$V\langle v_j \rightarrow \rangle^S$	P_j	Q_j	X_j	Y_j
1	2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19	2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19	ϕ	ϕ	18	18	18	0
2	10	10	1,3,5,7,14	1,4,14,15	1	1	3	5
3	2,7,9,10,12,14,16,19	12,19	1,5	1,5	2	8	4	6
4	6,8,10,11,13,15,16,18	2,10,15	1,17	1,14	2	9	3	9
5	2,3,7,9,10,12,14,16,19	3,6,12,13,18,19	1	1	3	12	4	9
6	10,13,18	13,18	1,4,11,15,17	1,5	2	3	3	6
7	2,10,14	9	1,3,5	1	0	4	1	6
8	16,18	16	1,4,15,17	1,11,17	1	2	3	4
9	16	ϕ	1,3,5	1,7	0	1	1	4
10	ϕ	ϕ	1,2,3,4,5,6,7,11,14,15,17,19	1,2,4,14,15	0	0	5	7
11	6,10,13,18	8,16	1,4,15,17	1,17	0	6	2	8
12	ϕ	ϕ	1,3,5	1,3,5	0	0	3	0
13	18	18	1,4,6,11,15,17	1,5,6	1	1	3	5
14	2,10	2,4,10,15	1,3,5,7	1	2	4	3	5
15	6,8,10,11,13,16,18	2,10	1,4,17	1,4,14	1	8	3	9
16	ϕ	ϕ	1,3,4,5,8,9,15,17	1,8,11,17	0	0	3	6
17	4,6,8,10,11,13,15,16,18	8,11,16	1	1	3	9	4	6
18	ϕ	ϕ	1,4,6,8,11,13,15,17	1,5,6,13	0	0	3	6
19	10	ϕ	1,3,5	1,3,5	0	1	3	1
計					$\sum P = 36$	$\sum Q = 87$	$\sum X = 72$	$\sum Y = 102$

図5. 全順序データのグラフ表現例

例である。一般に、 $G_Z = (V, E_Z)$ の頂点 $v_j (\in V)$ に対する順位を、それぞれ r_j^Z とする ($j=1, 2, \dots, n$)。それぞれ r_j^Z は $\{1, 2, \dots, n\}$ のいずれかの値をとり、重複はないものとする ($j=1, 2, \dots, n$)。すなわち、線形グラフ $G_Z = (V, E_Z)$ において、 $r_n^Z=1$, $r_j^Z=r_{j+1}^Z+1$ の関係を満たす有向枝 $(v_j, v_{j+1}) (\in E_Z)$ ($j=1, 2, \dots, n-1$) が必ず存在する ($Z=S, T$)。このように、頂点集合 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ に対して、順位集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ が1対1対応するとき、順序データ $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ は、全順序データと呼ばれる。図5に示した G_L が、全順序データの例である。また、図5の G_M は、全順序データではないが、同順位を含んだ場合の例である。 r_j^Z ($j=1, 2, \dots, n$) は $\{1, 2, \dots, n\}$ のいずれかの値をとるが、重複がある場合は、準全順序データと命名する。また、全順序データでないデータは、半順序データ (partially ordered data) と呼ばれている。準全順序データも、半順序データに含まれる。図6に示した非線形グラフの2例は、半順序データの例であり、頂点集合の内、特定の部分集合内では順序データの性質を

図6. 半順序データのグラフ表現例

有するが、集合全体で有しない場合である。

次に、順位相関性で用いる用語の順方向・逆方向を G_S, G_T 上で定義しておく。従来は、全順序データ・準全順序データ上で以下の通り定義されていた。2 頂点 v_i, v_j に着目して、 $r_i^S < r_j^S$ かつ $r_i^T < r_j^T$ 、もしくは $r_i^S > r_j^S$ かつ $r_i^T > r_j^T$ が成り立つとき、対 $\{v_i, v_j\}$ は順方向であるという。逆に、 $r_i^S < r_j^S$ かつ $r_i^T > r_j^T$ 、もしくは $r_i^S > r_j^S$ かつ $r_i^T < r_j^T$ が成り立つとき、対 $\{v_i, v_j\}$ は逆方向であるという。このとき、順方向の対 $\{v_i, v_j\}$ ($i \neq j$) の総和を ΣP 、また逆方向の対 $\{v_i, v_j\}$ ($i \neq j$) の総和を ΣQ で表す。

本論文では、順方向・逆方向の概念を、半順序データにまで拡張して定義する。すなわち、

$$\begin{aligned} \Sigma P &\equiv \sum_{j=1}^n P_j = \sum_{j=1}^n \left| V \langle \rightarrow v_j \rangle^T \cap V \langle \rightarrow v_j \rangle^S \right| \\ \Sigma Q &\equiv \sum_{j=1}^n Q_j = \sum_{j=1}^n \left| V \langle \rightarrow v_j \rangle^T \cup V \langle \rightarrow v_j \rangle^S \right| \end{aligned} \quad (15)$$

さらに、 $S_V(G_S, G_T)$ を順方向・逆方向の概念で整理してみよう。まず、式(9)の $S_V(G_S, G_T)$ の分子を ΣX とする。

$$\begin{aligned} \Sigma X &= \sum_{j=1}^n \left(\left| V \langle \rightarrow v_j \rangle^T \cap V \langle \rightarrow v_j \rangle^S \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| V \langle \rightarrow v_j \rangle^T \cap V \langle \rightarrow v_j \rangle^S \right| \right) \end{aligned} \quad (16)$$

式(16)の右辺の $|V \langle \rightarrow v_j \rangle^T \cap V \langle \rightarrow v_j \rangle^S|$ は、 G_S と G_T

の両者において、任意の v_j に着目して、 v_j に先行する要素と順方向である要素の数であり、 $|V\langle v_j \rightarrow \rangle^T \cap V\langle v_j \rightarrow \rangle^S|$ は、 v_j から可到達な要素と順方向である要素の数である。 ΣX は、それらをすべての j に対して合算した量である。したがって、 ΣX は順位相関係数で用いられる順方向の概念である ΣP と関連付けることができる。ここで、式 (11) より、

$$\Sigma X = 2\Sigma P \quad (17)$$

が成り立つ。

次に、従来の逆方向の概念 ΣQ と異なる、新しい概念 ΣY を導入する。 ΣY を次のように定義する。

$$\Sigma Y \equiv \sum_{j=1}^n \left| (V\langle \rightarrow v_j \rangle^T \nabla V\langle \rightarrow v_j \rangle^S) \cup (V\langle v_j \rightarrow \rangle^T \nabla V\langle v_j \rightarrow \rangle^S) \right| \quad (18)$$

このとき、

$$(V\langle \rightarrow v_j \rangle^T \nabla V\langle \rightarrow v_j \rangle^S) \cap (V\langle v_j \rightarrow \rangle^T \nabla V\langle v_j \rightarrow \rangle^S) = \phi \quad (19)$$

である故、

$$\Sigma Y = \sum_{j=1}^n \left(\left| V\langle \rightarrow v_j \rangle^T \nabla V\langle \rightarrow v_j \rangle^S \right| + \left| V\langle v_j \rightarrow \rangle^T \nabla V\langle v_j \rightarrow \rangle^S \right| \right) \quad (20)$$

式 (20) の右辺の $|V\langle \rightarrow v_j \rangle^T \nabla V\langle \rightarrow v_j \rangle^S|$ は、 G_S と G_T の両者において、任意の v_j に着目して、少なくともいずれか一方のグラフで v_j に先行する要素と順序関係は成り立つものの、もう一方の当該要素とは順方向でない要素の数を表す。同様に、式 (20) の右辺の $|V\langle v_j \rightarrow \rangle^T \nabla V\langle v_j \rightarrow \rangle^S|$ は、 G_S と G_T の両者において、任意の v_j に着目して、少なくともいずれか一方のグラフで v_j に可到達な要素と順序関係は成り立つものの、もう一方の当該要素とは順方向でない要素の数を表す。 ΣY は、それらをすべての j に対して合算した量である。したがって、次の関係を得る。

$$\text{【性質 3】 } S_V(G_S, G_T) = \frac{\Sigma X}{\Sigma X + \Sigma Y} \quad (21)$$

(証明) 式 (9) の分子は式 (16) より ΣX である。また、

$$(V\langle \rightarrow v_j \rangle^T \cup V\langle \rightarrow v_j \rangle^S) \cap (V\langle v_j \rightarrow \rangle^T \cup V\langle v_j \rightarrow \rangle^S) = \phi \quad (22)$$

故に、

$$\begin{aligned} & |(V\langle \rightarrow v_j \rangle^T \cup V\langle \rightarrow v_j \rangle^S) \cap (V\langle v_j \rightarrow \rangle^T \cup V\langle v_j \rightarrow \rangle^S)| \\ &= |V\langle \rightarrow v_j \rangle^T \cap V\langle \rightarrow v_j \rangle^S| + |V\langle v_j \rightarrow \rangle^T \cap V\langle v_j \rightarrow \rangle^S| \\ &= |V\langle \rightarrow v_j \rangle^T \nabla V\langle \rightarrow v_j \rangle^S| + |V\langle v_j \rightarrow \rangle^T \nabla V\langle v_j \rightarrow \rangle^S| \\ &\quad + |V\langle \rightarrow v_j \rangle^T \cap V\langle \rightarrow v_j \rangle^S| + |V\langle v_j \rightarrow \rangle^T \cap V\langle v_j \rightarrow \rangle^S| \end{aligned} \quad (23)$$

したがって、

$$\begin{aligned} \text{式 (9) の分母} &= \sum_{j=1}^n \left(\left| V\langle \rightarrow v_j \rangle^T \cap V\langle \rightarrow v_j \rangle^S \right| + \left| V\langle v_j \rightarrow \rangle^T \cap V\langle v_j \rightarrow \rangle^S \right| \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \left(\left| V\langle \rightarrow v_j \rangle^T \nabla V\langle \rightarrow v_j \rangle^S \right| + \left| V\langle v_j \rightarrow \rangle^T \nabla V\langle v_j \rightarrow \rangle^S \right| \right) \\ &= \Sigma X + \Sigma Y \end{aligned} \quad (24)$$

故に、与式を得る。

(証明終)

したがって、 $S_V(G_S, G_T)$ は、 G_S と G_T のうち、少なくとも一方で順序関係にある要素間の中で、順方向が成り立つ比率を求めたものと解釈することができる。参考まで、表 2 に示した類似度の計算プロセスの表の右の 2 列に、 ΣX と ΣY の計算過程を示した。

3.3. 既存の順位相関係数

後の議論のため、池田 (1976) で示されている順位相関係数を本論文と関連付けて示す。基本的には、要素間の順位に着目して、順方向・逆方向の概念で、順位相関性は記述される。一方の変量を基準としたときの順方向の対の総数 ΣP と逆方向の対の総数 ΣQ の差 ($\Sigma P - \Sigma Q$) を正規化した量で定義される。具体的な定義を以下に示す。

① グッドマン・クラスカルの順序連関係数: γ

本係数は、本来順序特性をもったデータ間のクロス集計表における順序関連の程度を定量化した係数であるが、順位付けられた 2 変量間の順位相関係数としても活用できる。

$$\gamma = \frac{\Sigma P - \Sigma Q}{\Sigma P + \Sigma Q} \quad (25)$$

② ケンドールの順位相関係数: $\tau (= \tau_a)$ と τ_b

$$\tau (= \tau_a) = \frac{\Sigma P - \Sigma Q}{\frac{1}{2}n(n-1)} \quad (26)$$

$$\tau_b = \frac{\Sigma P - \Sigma Q}{\sqrt{\frac{1}{2}n(n-1) - T_S} \sqrt{\frac{1}{2}n(n-1) - T_T}} \quad (27)$$

$$\text{ここで, } T_s = \frac{1}{2} \sum t_s(t_s - 1) \quad T_T = \frac{1}{2} \sum t_T(t_T - 1) \quad (28)$$

t_s と t_T は, 順位変量 S と T の中での同順位の大きさを表し, それを組み合わせた個数だけ合計したものが, T_s と T_T である.

③ ソマーズの係数: d

ソマーズの係数は, 非対象測度で,

$$D_{TS} = \frac{\sum P - \sum Q}{\frac{1}{2} n(n-1) - T_s} \quad (29)$$

$$D_{ST} = \frac{\sum P - \sum Q}{\frac{1}{2} n(n-1) - T_T} \quad (30)$$

$$\text{ここで, } \tau_b^2 = D_{TS} D_{ST} \quad (31)$$

の関係が成り立つ.

4. ψ 係数の特性解析

4.1. ψ 係数の順序相関性

$S_V(G_S, G_T)$ の性質をさらに考察するために, 次のような線形変換を施す ψ 係数を定義し, 正規化を行う.

$$\psi(G_S, G_T) \equiv 2S_V(G_S, G_T) - 1 \quad (32)$$

まず, 式 (25) で示した, グッドマン・クラスカルの順序連関係数 $\gamma = \frac{\sum P - \sum Q}{\sum P + \sum Q}$ との類比から, ψ 係数を同様に形式化すると, 次の関係式を得る.

$$\text{【性質 4】 } \psi(G_S, G_T) = \frac{\sum X - \sum Y}{\sum X + \sum Y} \quad (33)$$

(証明) 式 (21), 式 (32) より明らか. (証明終)

$$\text{当然ながら, } -1 \leq \psi(G_S, G_T) \leq 1 \quad (34)$$

である. また, $\psi(G_S, G_T)$ (以下, 断りがない限り, ψ と略称する) は, グッドマン・クラスカルの順位相関係数 γ , ケンドールの順位相関係数 $\tau(=\tau_a)$ と τ_b , およびソマーズの係数 d を 2 つの LFG 間の順位相関係数に拡張して議論する. それに先立ち, 順序データと LFG との関係をもう少し吟味しておこう. まず, ここでは直積 $V \times V$ を, 集合 V と V の任意の頂点の対 $\{v_i, v_j\}$ ($i, j=1, 2, \dots, n$) の集合として, 次式で定義する.

$$V \times V = \{\{v_i, v_j\} \mid v_i \in V \text{ かつ } v_j \in V\} \quad (35)$$

したがって, 相異なる頂点の対の総数は,

$$|V \times V| - |V| = \frac{1}{2} n(n-1) \quad (36)$$

となる. v_j を基準として, 対 $\{v_i, v_j\}$ ($i=1, 2, \dots, n; i \neq j$) の中で, 順方向の対の総数 $\sum P$, 逆方向の対の総数 $\sum Q$ は, 式 (15) で示された. また, $\sum X$ と $\sum P$ は, 式 (17), つまり $\sum X = 2\sum P$ の関係で示された. そこで次に, $\sum Y$ について整理しておこう. Y_j ($j=1, 2, \dots, n$) を次式で定義する.

$$Y_j \equiv (V \langle \rightarrow v_j \rangle^T \nabla V \langle \rightarrow v_j \rangle^S) \cup (V \langle \rightarrow v_j \rangle^T \nabla V \langle \rightarrow v_j \rangle^S) \quad (37)$$

また, G_S においてのみ v_j と順序の対をなす v_i の集合, および G_T においてのみ v_j と順序の対をなす v_i の集合を, それぞれ, U_j, W_j とすると,

$$U_j \equiv V \langle \rightarrow v_j \rangle^S \cap \overline{V \langle \rightarrow v_j \rangle^T} \quad (38)$$

$$W_j \equiv V \langle \rightarrow v_j \rangle^T \cap \overline{V \langle \rightarrow v_j \rangle^S} \quad (39)$$

さらに, G_S, G_T 双方において v_j と順序の対をなさない v_i の集合 R_j を

$$R_j \equiv \overline{V \langle \rightarrow v_j \rangle^T} \cap \overline{V \langle \rightarrow v_j \rangle^S} \quad (40)$$

で表す. このとき,

$$Y_j = Q_j \cup U_j \cup W_j \quad (41)$$

$$V - \{v_j\} = X_j \cup Y_j \cup R_j = X_j \cup Q_j \cup U_j \cup W_j \cup R_j \quad (42)$$

また, G_S においてのみ順序の成り立つ対の総数 $\sum U$, G_T においてのみ順序の成り立つ対の総数 $\sum W$ は, それぞれ,

$$2\sum U \equiv \sum_{j=1}^n |U_j| = \sum_{j=1}^n |V \langle \rightarrow v_j \rangle^S \cap \overline{V \langle \rightarrow v_j \rangle^T}| \quad (43)$$

$$2\sum W = \sum_{j=1}^n |V \langle \rightarrow v_j \rangle^S \cap \overline{V \langle \rightarrow v_j \rangle^T}| + \sum_{j=1}^n |V \langle \rightarrow v_j \rangle^S \cap \overline{V \langle \rightarrow v_j \rangle^T}| \quad (44)$$

$$V \langle \rightarrow v_j \rangle^S \cap V \langle \rightarrow v_j \rangle^S = \phi \quad (45)$$

故に,

$$\begin{aligned} \sum U &= \sum_{j=1}^n |V \langle \rightarrow v_j \rangle^S \cap \overline{V \langle \rightarrow v_j \rangle^T}| \\ &= \sum_{j=1}^n |V \langle \rightarrow v_j \rangle^S \cap \overline{V \langle \rightarrow v_j \rangle^T}| \end{aligned} \quad (46)$$

同様に, $\sum W$ においても,

$$2\Sigma W \equiv \sum_{j=1}^n |W_j| = \sum_{j=1}^n |V\langle \rightarrow v_j \rangle^T \cap \overline{V\langle \rightarrow v_j \rangle^S}| \quad (47)$$

$$2\Sigma W = \sum_{j=1}^n |V\langle \rightarrow v_j \rangle^T \cap \overline{V\langle \rightarrow v_j \rangle^S}| + \sum_{j=1}^n |V\langle v_j \rangle^T \cap \overline{V\langle \rightarrow v_j \rangle^S}| \quad (48)$$

$$\Sigma W = \sum_{j=1}^n |V\langle \rightarrow v_j \rangle^T \cap \overline{V\langle \rightarrow v_j \rangle^S}| = \sum_{j=1}^n |V\langle v_j \rangle^T \cap \overline{V\langle \rightarrow v_j \rangle^S}| \quad (49)$$

さらに, ΣR は,

$$\Sigma R \equiv \sum_{j=1}^n |R_j| = \sum_{j=1}^n |\overline{V\langle \rightarrow v_j \rangle^T} \cap \overline{V\langle \rightarrow v_j \rangle^S}| \quad (50)$$

ここで, ΣR は, 次のようにも変形できる.

$$\Sigma R = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |\overline{V\langle \rightarrow v_j \rangle^T} \cup \overline{V\langle \rightarrow v_j \rangle^S} \cup V\langle v_j \rangle^T \cup V\langle v_j \rangle^S| \quad (51)$$

$$\Sigma R = \sum_{j=1}^n |R_j| = \sum_{j=1}^n |\overline{V\langle \rightarrow v_j \rangle^T} \cap \overline{V\langle \rightarrow v_j \rangle^S} \cap \overline{V\langle v_j \rangle^T} \cap \overline{V\langle v_j \rangle^S}| \quad (52)$$

したがって, ΣR は, グラフ G_s と G_T の双方において, 順序が決定できない頂点の対の総和である. 最後に,

$$\begin{aligned} Y_j &= (V\langle \rightarrow v_j \rangle^T \cap V\langle \rightarrow v_j \rangle^S) \cup (V\langle v_j \rangle^T \cap V\langle v_j \rangle^S) \\ &= (V\langle \rightarrow v_j \rangle^T \cap V\langle v_j \rangle^S) \cup (V\langle v_j \rangle^T \cap V\langle \rightarrow v_j \rangle^S) \\ &\quad \cup (V\langle \rightarrow v_j \rangle^S \cap \overline{V\langle \rightarrow v_j \rangle^T}) \\ &\quad \cup (V\langle \rightarrow v_j \rangle^T \cap \overline{V\langle \rightarrow v_j \rangle^S}) \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} &= (V\langle \rightarrow v_j \rangle^T \cap V\langle \rightarrow v_j \rangle^S) \cup (V\langle v_j \rangle^T \cap V\langle v_j \rangle^S) \\ &= (V\langle \rightarrow v_j \rangle^T \cap V\langle v_j \rangle^S) \cup (V\langle v_j \rangle^T \cap V\langle \rightarrow v_j \rangle^S) \\ &\quad \cup (V\langle \rightarrow v_j \rangle^T \cap \overline{V\langle \rightarrow v_j \rangle^S} \cup \overline{V\langle v_j \rangle^T}) \\ &\quad \cup (V\langle \rightarrow v_j \rangle^S \cap \overline{V\langle \rightarrow v_j \rangle^T} \cup \overline{V\langle v_j \rangle^S}) \\ &\quad \cup (V\langle v_j \rangle^T \cap \overline{V\langle \rightarrow v_j \rangle^S} \cup \overline{V\langle v_j \rangle^T}) \\ &\quad \cup (V\langle v_j \rangle^S \cap \overline{V\langle \rightarrow v_j \rangle^T} \cup \overline{V\langle v_j \rangle^S}) \end{aligned} \quad (54)$$

故に, 以下の関係式が成り立つ.

$$\Sigma Y = 2(\Sigma Q + \Sigma U + \Sigma W) \quad (55)$$

$$\Sigma X + \Sigma Y = 2(\Sigma P + \Sigma Q + \Sigma U + \Sigma W) \quad (56)$$

$$\Sigma X + \Sigma Y + \Sigma R = \frac{1}{2}n(n-1) \quad (57)$$

$$2(\Sigma P + \Sigma Q + \Sigma U + \Sigma W) + \Sigma R = \frac{1}{2}n(n-1)$$

$$\text{【性質 5】} \quad \psi = \frac{\Sigma X - \Sigma Y}{\frac{1}{2}n(n-1) - \Sigma R} \quad (59)$$

$$\psi = \frac{\Sigma P - \Sigma Q - \Sigma U - \Sigma W}{\Sigma P + \Sigma Q + \Sigma U + \Sigma W} \quad (60)$$

(証明) 略.

式 (60) は, $\psi = \frac{\Sigma P - (\Sigma Q + \Sigma U + \Sigma W)}{\Sigma P + (\Sigma Q + \Sigma U + \Sigma W)}$ と考えられるので, γ 係数の定義式に対応させると, γ 係数の ΣQ に対して, ψ 係数は, $\Sigma Q + \Sigma U + \Sigma W$ が対応する. したがって, 半順序データの場合に, $\Sigma U + \Sigma W$ の効果が現れることがわかる. つまり, 一方で順序関係が成り立ち, 他方で順序関係が成り立たない場合を考慮した γ 係数とも解釈することができる.

4.2. ψ 係数と γ 係数との関係

ψ 係数と既存の γ 係数との関係を考察し, ψ 係数の意義を論ずることとする. ψ 係数と γ 係数との間には, 次の関係が成り立つ.

$$\text{【性質 6】} \quad \gamma \geq \psi \quad (61)$$

(証明) γ に関する式 (16) と, ψ に関する式 (33) より,

$$\begin{aligned} \gamma - \psi &= \frac{\Sigma P - \Sigma Q}{\Sigma P + \Sigma Q} - \frac{\Sigma X - \Sigma Y}{\Sigma X + \Sigma Y} \\ &= \frac{2(\Sigma U + \Sigma W) \Sigma P}{(\Sigma P + \Sigma Q)(\Sigma P + \Sigma Q + \Sigma U + \Sigma W)} \geq 0 \end{aligned} \quad (62)$$

故に, $\gamma \geq \psi$

なお, 等号が成り立つのは, $\Sigma U + \Sigma W = 0$ または $\Sigma P = 0$ のときである. (証明終)

つまり等号が成り立つときは, ΣU は G_s においてのみ順序が成り立つ頂点対の総数, ΣW は G_T においてのみ順序が成り立つ順序対の総数であるから, 一方にのみ順序が成り立つ頂点対が存在しないとき, $\gamma = \psi$ となる. もしくは, 等号が成り立つのは, 双方に順方向の頂点対が存在しないときで, その場合, $\gamma = \psi = -1$ となる.

【系 1】全順序データにおいて,

$$\psi = \gamma (= \tau_a = \tau_b = d_{yx} = d_{xy}) \quad (63)$$

(証明) 全順序データ (線形グラフ) の場合, すべての頂点の対は, 必ず順方向か逆方向のいずれかの関係を

もつ。つまり、

$$\sum U = \sum W = \sum R = 0 \quad (64)$$

は常に成り立つ。よって、次式が成り立つ。

$$\psi = \frac{\sum X - \sum Y}{\sum X + \sum Y} = \frac{\sum P - \sum Q}{\sum P + \sum Q} = \gamma \quad (65)$$

全順序データの場合、 $\gamma = \tau_a = \tau_b = d_{yx} = d_{xy}$ は成り立つ (池田, 1976)。よって、与式は成り立つ。(証明終)

次に、 ψ 係数と γ 係数との関係を、モデル例で示す。図5・図6における G_L , G_M , G_V , G_W の間の順位相関係数を、表3にまとめる。全順序データの G_L , 準全順序データの G_M , 半順序データの G_V , と G_W の間の係数の関係を考察する。 $\gamma(G_V, G_W) = 1.00$ であるが、一方の本提案の順位相関係数は、 $\psi(G_V, G_W) = -0.20$ である。この根拠は、 G_V 上で順序対 (b, a) , (c, b) , (e, c) ,

表3. 図5と図6に示したLFGモデル間の ψ 係数と γ 係数

(a) ψ 係数

	G_L	G_M	G_V	G_W
G_L	1.000	0.733	0.600	0.067
G_M	0.733	1.000	0.571	-0.200
G_V	0.600	0.571	1.000	-0.200
G_W	0.067	-0.200	-0.200	1.000

(b) γ 係数

	G_L	G_M	G_V	G_W
G_L	1.000	1.000	1.000	0.778
G_M	1.000	1.000	1.000	0.714
G_V	1.000	1.000	1.000	1.000
G_W	0.778	0.714	1.000	1.000

図7. 図1の「富士山麓の住民の環境問題」のLFTにおける ψ 係数と γ 係数の関係

(f, c) , (f, d) が存在するが, G_w 上には存在しなく, 他方, G_w 上には, 順序対 (a, b) , (c, a) , (c, d) , (e, d) , (f, e) が存在するが, G_v 上には存在しないからである. つまり, γ 係数は, あくまでも全順序データのみを想定して定義された順位相関係数で, 上記の差異が全く考慮していないからである. 他方, ψ 係数は, 上記の差異を定義に組み込んでいる. それ故, ψ 係数は半順序データにも適用できる順位相関係数である. 他方, γ 係数を従来の全順序データや準全順序データのときには, 適用可能であるが, 半順序データにまで定義を拡張して利用することは, 不可能であることが判明した.

最後に, ψ 係数と γ 係数との関係を実践事例で考察する. 図7と図8に, 2.1.において示した2つの事例(1)と(2)の実施結果を示す. 被験者数は, 前者は117名で後者は41名である. いずれの場合も, 全被験者の

LFG は, すべて半順序データ構造である. 図7の事例では, ψ 係数は, -0.5 から 1 の範囲の値を取るが, γ 係数は, 0.6 から 1 の範囲を取るに過ぎず, しかも 95% 以上が 0.8 以上である. 図8の事例では, ψ 係数は, -0.3 から 1 の範囲の値を取るが, γ 係数は, 0.5 から 1 の範囲を取るに過ぎず, しかも 90% 以上が 0.8 以上である. これらは, γ 係数が, 全順序データを前提とした係数であるからである. 結論として, ψ 係数のみが, 半順序データに適用できる順位相関係数である. 換言すれば, ψ 係数は, 線形グラフ間の順位相関係数に適用できるばかりでなく, 線形グラフと非線形グラフの間の順位相関係数, また非線形グラフ構造間の順位相関係数として適用できる.

従来, 2つの順序データを比較して, 順位相関係数を算出する場合, 当該順序データは全順序データ, もししくは準全順序データでなければならなかった. つまり,

図8. 図3の「一軸スライダーの製図」のLFTにおける ψ 係数と γ 係数の関係

全順序データ間, 全順序データと準全順序データの間, あるいは準全順序データ間の順位相関係数が定義されているだけであった。しかし, 現実社会における順序データの大半は, 半順序データである。しかるに, 一般に, 2つの半順序データ間の順位相関係数は存在しなかった。従前の順位相関係数を, そのまま半順序データ間の順位相関係数として適用することは, 無理がある。本提案の ψ 係数は, 半順序データにおける順位相関に適用できる点に最大の特長がある。したがって, 本論文の意義は, 半順序データに適用可能な類似度係数を提案している点, 並びに同係数を線形変換すると従来の順位相関係数 (ψ 係数) の拡張形である点, その結果, LFT での測定結果は, 教師と学習者の LFG の順位相関性を意味している点を導いたことにある。

なお, 教師が想定したチャンク化された認知ユニットが学習者にどの程度構造化されているかを考察したい場合には, 当該認知ユニットに含まれる LFG の部分グラフに着目しなければならない。教師と学習者の LFG の部分グラフ同士の比較は, 推移律を考慮することにより, 当該部分グラフを改めてひとつのグラフと考えると, 本論文での分析法をそのまま適用することができる。

5. ま と め

以上, 本論文では, LFT で用いる LFG の類似度係数の分類の提案と推移グラフの LFG 間の類似度係数 S_V を提案した。また, S_V の特性を考察するために, $\psi = 2S_V - 1$ と線形変換し, 既存の順位相関係数, 特に γ 係数との関係と比較考察した。その結果, ψ 係数が順位相関性をもつこと, また全順序データの場合には, ψ 係数が γ 係数に一致することを導き, さらに, 既存の順位相関係数では適用できなかった, 半順序データにも適用できることを示し, ψ 係数が従前の順位相関係数の拡張形であることを示した。

先に, 佐々木・木原・磯野・杉林・竹谷 (2003) では, I 型の代表例として提案した, 竹谷・佐々木 (1997) の類似度係数 $\bar{S}_o (= \bar{S}_E)$ をもとに, 得点 R を, $R = 100 \times \bar{S}_o$, あるいは $R = (100 \times \bar{S}_o)^{\frac{1}{2}}$ で定義し, 実際に LFT を実施した教員の吟味結果により, 後者を採用した。本論文で提案した類似度係数 S_V をもとに, どのように得点化すべきかは, 前述の R の妥当性も含め, 今後の課題である。

謝 辞

本研究を推進するに当たり, ご支援を賜った職業能力開発総合大学校助教授の磯野宏秋先生, 拓殖大学工学部教授の杉林俊雄先生, 准教授の佐々木整先生, 助教の近藤秀文先生に対して謝意を表します。

参 考 文 献

- 池田 央 (1976). 統計的方法 I 基礎. 新曜社.
- 磯野宏秋 (2000). 機械設計製図. 工学研究社.
- 川島俊之・井宮淳・西田文彦 (1996). 木構造間の距離の近似計算. 電子情報通信学会パターン認識・メディア理解研究会技術報告集, PRMU96-36.
- 永岡慶三 (1988). 教育情報科学の数学的手法. 宇都宮敏男・坂元昂監修, 教育情報科学, 第3巻 教育とデータ分析. 第一法規出版.
- Novak, J.D. & Gowin, D.B. (1984) *Learning how to learn*, Cambridge University Press, Cambridge.
- 岡本慎一郎・佐々木整・木原幸一郎・磯野宏秋・杉林俊雄・竹谷 誠 (2000). 学習者描画の認知マップに基づく授業設計と評価 (III) 学習者の問題解決プロセスの測定評価. 電子情報通信学会教育工学研究会技術報告集, ET2000-32, 79-86.
- 朴 鎔燮・北岡裕子・佐藤嘉伸・田村進一 (2002). 木構造グラフを利用した3次元木構造マッチング法. 電子情報通信学会論文誌, J85-D-II, (6), 1124-1136.
- 佐々木整・木原幸一郎・磯野宏秋・杉林俊雄・竹谷 誠 (2003). ロジカルフローグラフに基づく授業設計と改善—4年間にわたる継続的実践研究と有効性の検証. 日本教育工学会論文誌, 27, (4), 387-395.
- Shavelson, R.J. (1972). Some aspects of the correspondence between content structure and cognitive structure in physics instruction. *Journal of Educational Psychology*, 63, (3), 225-234.
- Shavelson, R.J. and Stanton, G.C. (1975). Construct validation: Methodology and application to three measures of cognitive structure. *Journal of Educational Measurement*, 12, 67-85.
- 竹谷 誠・佐々木整 (1997). 学習者描画の認知マップによる理解度評価法. 電子情報通信学会論文誌, J80-D-II, (1), 336-347.
- 竹谷 誠・安木伸明 (2004). ロジカルフローテスト分析で用いるグラフの差異度の分類と特性比較. 電子情報通信学会教育工学研究会技術報告集, ET2004-39, 15-20.
- 山口 忠・加地郁夫 (1982). 有向グラフ比較のための頂点の到達可能性に基づく距離について. 電子情報通信学会 (A), J65-A, 1, 109-115.
- 安田三郎・海野道郎 (1977). 社会統計学. 丸善.

米澤宣義・新藤康正・平井和人・竹谷 誠 (2004). 学習課題関連付けナビゲーションの基礎実験. 電子情報通信学会教育工学研究会技術報告集, ET2004-77, 25-30.

米澤宣義・新藤康正・平井和人・竹谷 誠 (2006). 学習課題の関連構造を評価するための差異度. 電子情報通信学会論文誌, **J89-D-II**, (5), 967-977.

Waller, R.J. (1979). Comparing and combining structural models complex systems, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, **SMC-9**, (9), 580-586.

(2006 年 5 月 8 日受付, 2007 年 2 月 28 日最終修正)