項目反応間の局所依存性が項目母数の推定に与える影響 ——項目母数の比較可能性を確保した上での検討——

登 藤 直 弥

The Effect of Local Dependence on Item Parameter Estimation
——A Comparison Based on Comparable Item Parameters——

Naoya TODO

In this study, we assessed the effect of local dependence on item parameter estimation based on comparable item parameters, using Markov Chain Monte Carlo method. The results showed that if we estimate item parameters ignoring local dependence, item parameter estimation will be more inaccurate than taking local dependence into account. Furthermore, it was supposed that the result of previous works, which were not based on comparable item parameters, was distorted.

Key words: item response theory, local independence, local dependence, markov chain monte carlo

キーワード：項目反応理論，局所独立性，局所依存性，マルコフ連鎖モンテカルロ法

1. 問題と目的

近年，日本においてもその利用が増加している項目反応理論 (item response theory, IRT) は，テストの作成・実施・評価に資する様々な利点を有したテスト理論である。項目反応理論に基づき作成されたテストでは，テスト情報関数と呼ばれる特性値の関数を用いることにより，推定される特性値の推定精度をその水準ごとに評価することができる。また，等化と呼ばれる手続きを行うことにより，異なるテストを異なる集団に対して実施した場合にも，得られた特性値の推定値を共通の尺度上で評価することができるようになる。さらには，テストの実施前にその得点分布を予測することも可能になる。

この項目反応理論における重要な仮定に，局所独立性 (local independence) の仮定と呼ばれるものがある

(Lord & Novick, 1968)。局所独立性の仮定とは，「特性値 θ を固定したときに，各項目への項目反応が統計的に互いに独立である」という仮定のことである。すなわち，項目 $j(1, \dots, j, \dots, J)$ への反応 u_j を，正答なら 1，誤答なら 0 とするとき， J 個の項目への反応が特定の正誤パターン $(u_1, u_2, \dots, u_J)$ となる条件付同時確率 $P(u_1, u_2, \dots, u_J | \theta)$ が

$$P(u_1, u_2, \dots, u_J | \theta) = P(u_1 | \theta) P(u_2 | \theta) \cdots P(u_J | \theta) \quad (1)$$

のように，各項目に関する条件付確率の積に等しくなるというのが，局所独立性の仮定である。この仮定は，特性値 θ における項目 j への正答確率を表す項目特性関数を $P_j(\theta)$ とすると，

$$P(u_1, u_2, \dots, u_J | \theta) = \prod_{j=1}^J P_j(\theta)^{u_j} [1 - P_j(\theta)]^{(1-u_j)} \quad (2)$$

と表現することができる¹⁾。

局所独立性が満たされない状況は一般に局所依存性

東京大学大学院教育学研究科・日本学術振興会
(Graduate School of Education, The University of
Tokyo/Japan Society for the Promotion of Science)
連絡先：〒113-0033 東京都文京区本郷 7-3-1
Tel：090-5229-5738
E-mail：toudou@p.u-tokyo.ac.jp

¹⁾ Lord (1980) が指摘している様に，項目特性関数は，厳密に言えば，「特定の個人が特定の項目に正答する確率」ではない。本論文では，そのことをふまえた上

(local dependence) と呼ばれるが、先行研究では、局所依存性を引き起こすものとして様々な要因が挙げられている (Ferrara, Huynh, & Michaels, 1999; Hoskens & De Boeck, 1997; Kreiner & Christensen, 2004; Yen, 1993). これらの要因は大きく以下の3つのタイプに分けることができる。

- タイプ I. 項目間に直接的なつながりのある項目群
- タイプ II. 項目間に間接的なつながりのある項目群
- タイプ III. 正答確率に特性値 θ 以外の特性が反映されている項目群

タイプ I には、前の項目への正答が当該項目での正答の必要条件となるような項目群が含まれる。例えば、1問目である計算問題の結果を答えさせ2問目でその計算過程を説明させる項目群や、1問目で $x = 1, 2, 3, 4$ のそれぞれの場合について $y = 2x + 1$ の y を求めさせ、2問目で x と y の散点図を描かせる項目群などがこれにあたる。

タイプ II には、文章読解や図表の読み取りなどに関する大問形式の項目群が含まれる。これらの項目群では、特性値の水準が同じ受験者であっても、たまたま文章の主旨を誤解したり、図表を読み違えたりすると、その大問の多くの項目に誤答する可能性が高くなるため、大問内の項目間に相関が生じることになる。また、文章読解問題の文章が、以前に読んだことのある文章であったり、強い興味をもっているテーマの文章であったりすると、特性値の水準が同じ他の受験者よりもその大問の多くの項目に正答する可能性が高くなるため、このような受験者と大問の内容との交互作用の存在も、大問内の項目間の相関に寄与し、局所依存性を生じさせることになる。

タイプ III には、当該項目に正答する確率が研究者・分析者が想定している特性 θ に加えて想定外の特性 θ' によっても規定されているような項目群が含まれる。このような項目群の例としては、特異項目機能 (differential item functioning, DIF) が生じている項目群等が挙げられる。タイプ III に含まれる項目群においては、それらに正答する確率が例えば受験者の性別といった他の特性 θ' によっても規定されている。したがって、特性 θ で条件付けた場合でも、他の特性 θ' の個人差によって項目間に相関が生じ、局所依存性を生むことと

なる。

池田 (1992) や石塚・中畝・内田・前川 (2001) において述べられているように、日本の学力試験の特徴として、大問形式の出題が多いことが挙げられる。先述の通り、近年では日本においても項目反応理論の利用が増加していることと考え合わせると、今後日本において大問形式の問題を含むテストの作成・分析・評価を行うにあたり、項目反応理論の利用が増加していくことが予想される。しかしながら、大問形式の問題は上述のタイプ II に含まれる項目群に該当し、これらの問題においては項目反応間に局所独立性が成り立たないと考えられる。先行研究においては、このような局所依存性が疑われる項目反応データに対して局所独立性を仮定して分析を行った場合の影響について様々な観点から検討がなされている (石塚他, 2001; Junker, 1991; Lee, 2000; Sireci, Thissen, & Wainer, 1991; 登藤, 2010, 2012)。

例えば, Bradlow, Wainer, & Wang (1999) や Chen & Wang (2007) では、局所依存性を考慮せずに分析を行った場合に項目母数の推定値にバイアスが生じ、その標準誤差も増加することが報告されている。これらの研究においては、局所依存性を表現する真のモデルとして Bayesian testlet model (BTM) (Wainer, Bradlow, & Wang, 2007) や constant interaction model (Hoskens & De Boeck, 1997) が使用されているが、これらのモデルにおいては特性値 θ における項目 j への正答確率 $P_j(\theta)$ が通常項目反応理論の応用場面で使用されるラッシュモデルや2パラメータ・ロジスティックモデル (2PLM) などと等しくならない (Braeken, 2011; Braeken, Tuerlinckx, & De Boeck, 2007; Ip, 2010; Ip, Smith, & De Boeck, 2009)。つまり、上記の研究から得られた知見には、本来比較不可能なものを比較したことによる影響も含まれており、先行研究において局所依存性が項目母数の推定に与える直接的な影響が検討されてきたとは言いがたい。

これに関連して、2010年の *Applied Psychological Measurement* 誌では、BTMの項目母数を通常の項目反応モデル (2PLM 等) における項目母数と比較可能なものに変換するための方法が Ip, E.H. により提案されている。先述の通り、今後大問形式の問題を含むテストの分析等に際し項目反応理論を用いる機会が増加するであろうことを考慮すると、項目反応間の局所依存性が項目母数の推定にどのような影響を与えるのかを、項目母数の比較可能性を確保した上で検討することは

で、「受験者 i が項目 j に正答する確率」という慣例的な表現を用いることとする。なお、Lord の指摘と局所独立性の概念の関係については、南風原 (2000) が詳細に論じている。

重要であると考えられる。

そこで、本研究では、Ip (2010) の知見を援用し、項目母数の比較可能性を確保した上で、項目反応間の局所依存性が項目母数の推定にどのような影響を与えるのか、シミュレーション実験を通して探索的な検討を行った。

2. 方法²⁾

本研究では、大問形式の問題を含むテストに対する仮想的な項目反応データを発生させ、これに対し局所独立性を仮定する通常のモデルと局所依存性を考慮した真のモデルを当てはめ、マルコフ連鎖モンテカルロ法 (Markov Chain Monte Carlo, MCMC) により項目母数の推定を行った。この手続きを複数回繰り返し、得られた複数組の項目母数の推定値、ならびに、項目母数の真値を互いに比較可能な値に変換にした上で、項目母数の推定量のバイアス (*Bias*)、平均二乗誤差平方根 (*RMSE*)、項目母数の真値と推定量との相関係数 (*cor*) を算出し、局所依存性が項目母数の推定に与える直接的な影響について検討を行った。

2.1. 仮想的なデータの発生モデル

大問形式の問題を含むテストに対する仮想的な項目反応データを発生させる際には、Bradlow, et al. (1999) で提案された以下の2値型のBTM、

$$P_j(\theta_i) = \frac{1}{1 + \exp(-1.7\alpha_j(\theta_i - \beta_j - \gamma_{id(j)}))} \quad (3)$$

を使用した。ここで、 α_j ならびに β_j はそれぞれ項目 j の識別力と困難度に関する項目母数である。そして、 $\gamma_{id(j)}$ は項目 j が含まれる大問 $d(j)$ における項目反応間の局所依存性を表すために導入された受験者 i に関する受験者母数であり、受験者 i と大問 $d(j)$ の交互作用を表している。よって、2値型のBTMにおいては受験者 i に関する受験者母数が $\theta_i - \gamma_{id(j)}$ の形で表されることになるため、 $\gamma_{id(j)}$ の値が正である場合には、項目 j における受験者 i の特性値は減少することとなり、 $\gamma_{id(j)}$ の値が負である場合には、増加することとなる。また、 $P_j(\theta_i)$ は特性値が θ_i で、かつ、大問 $d(j)$ との交互作用が $\gamma_{id(j)}$ である受験者 i が項目 j に正答する確率を表している。(3)式からも明らかなように、2値型のBTMにおいては特性値 θ で条件づけた場合にも

各項目への反応確率が θ 以外の受験者母数に依存するため、このモデルに基づき発生させた項目反応データにおいて局所独立性は満たされなくなる。なお、BTMにおいては $\gamma_{id(j)}$ の事前分布として、

$$\gamma_{id(j)} \sim N(0, \sigma_{\gamma_{d(j)}}^2) \quad (4)$$

が仮定される。ここで、 $\sigma_{\gamma_{d(j)}}^2$ は大問 $d(j)$ における局所依存性の程度を示す母数となっており、この母数の値が大きいくほど大問 $d(j)$ における局所依存性の程度が大きいくということになる。逆に、 $\sigma_{\gamma_{d(j)}}^2$ の値が0である場合には、大問 $d(j)$ 内の全ての項目への反応が局所独立となる。

2.2. 分析モデル

仮想的な項目反応データに当てはめる局所独立性を仮定した通常の項目反応モデルとしては、以下の2PLM、

$$P_j^{**}(\theta_i) = \frac{1}{1 + \exp(-1.7\alpha_j^{**}(\theta_i - \beta_j^{**}))} \quad (5)$$

を使用することとした。ここで、 $P_j^{**}(\theta_i)$ は特性値が θ_i である受験者 i が項目 j に正答する確率を表しており、 α_j^{**} ならびに β_j^{**} はそれぞれ項目 j の識別力と困難度を表す項目母数である。

また、局所依存性を考慮した項目反応モデルとしては、仮想的な項目反応データを発生させる際に使用した2値型のBTMを使用した。

2.3. 項目母数の変換方法

上述の(5)式における α_j^{**} は、 $\theta_i = \beta_j^{**}$ における項目特性関数 $P_j^{**}(\theta_i)$ の傾きを表す母数となっている。一方、(3)式における α_j は、 $\gamma_{id(j)} = 0$ であるときの $\theta_i = \beta_j$ における項目特性関数 $P_j(\theta_i)$ の傾きを表している。したがって、(3)式中の α_j と(5)式中の α_j^{**} ではその意味するところが互いに異なっており、これらの母数は互いに比較可能な状態とはなっていない。Ip (2010) は、 α_j と α_j^{**} が比較可能なものとなるためには(5)式を $\gamma_{id(j)}$ について周辺化すればよいと考え、周辺化テストレット項目反応関数 (marginalized testlet item response function, MIRF) と呼ばれる $\gamma_{id(j)}$ を積分消去した2値型のBTMを導出した (詳細についてはIp (2010) を参照のこと)。その結果、(3)式中の α_j を、

$$\alpha_j^* = \tau \alpha_j \quad (6)$$

のように変換すれば、 α_j と α_j^{**} が比較可能となるこ

²⁾ 本研究のシミュレーションは、登藤 (2012) の手続きを一部変更したものである。

とを示した。ただし、

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{k^2(1.7\alpha_j)^2\sigma_{\gamma d(j)}^2 + 1}} \quad (7)$$

$$k = \frac{16\sqrt{3}}{15\pi} \quad (8)$$

である。また、 β_j^{**} に関しては変換を行わなくても比較可能なこと、つまり、2PLM と比較可能な困難度母数 β_j^* が

$$\beta_j^* = \beta_j^{**} \quad (9)$$

であることが同論文にて示されている。

本研究では、項目母数の比較可能性を確保した上で局所依存性の影響を検討するため、Ip (2010) で提案された方法を使用し、2 値型の BTM における項目母数を 2PLM の項目母数と比較可能な値に変換することとした。

2.4. シミュレーションの手続き

シミュレーションを行う際には、全ての条件において、大問形式の問題を含む仮想的なテストが4つの大問から構成されるテストであるとし、各大問は5項目から成るものとした。また、各大問内で局所依存関係にある項目の割合を要因として操作することとし、大問内で局所依存関係にある項目を、5項目、3項目、2項目と変化させ、局所依存性の影響に関する検討を行った。さらに、テストに含まれる4つの大問の局所依存性の程度に関しても要因として操作することとし、テストに含まれる4つの大問の局所依存度について、

- 4 つとも局所依存度が強い
- 4 つのうち 3 つの局所依存度が強い
- 4 つのうち 2 つの局所依存度が強い
- 4 つのうち 1 つだけ局所依存度が強い
- 4 つとも局所依存度が弱い

という5つの条件を設定して、局所依存性の影響に関する検討を行った。ここで、大問の局所依存度の強弱に関しては、2 値型の BTM を提案した Bradlow, et al. (1999) を引用している 95 件の論文のうち、2 値型の BTM を実際の大問形式の問題に対し適用した 2 件の論文 (Li, Bolt, & Fu, 2005, 2006) と Bradlow, et al. (1999) を参考に決定した。具体的には、上記の論文において推定された 17 個の $\sigma_{\gamma d(j)}^2$ のうち上位 4 個の平均 (1.4075) を局所依存度が強い大問における $\sigma_{\gamma d(j)}^2$ の値、下位 4 個の平均 (0.155) を局所依存

度が弱い大問における $\sigma_{\gamma d(j)}^2$ の値とし、この基準に従い仮想的な項目反応データを発生させた。局所依存性が項目母数の推定精度に与える影響について検討した Chen & Wang (2007) では局所依存関係にある項目の割合が要因として操作され、Bradlow, et al. (1999) においては大問の局所依存度が要因として操作されている。上記のようにシミュレーション計画を設定することで、これらの研究で見られた各要因の影響が、項目母数の比較可能性を考慮した上でも見られるのか、検討することが可能となる。同時に、本シミュレーションでは受験者数についても要因として操作することとし、受験者数を 1000 人、300 人と変化させ、局所依存性の影響を検討することとした。上記 2 つの先行研究においては、一貫して受験者数が 1000 人と固定され検討が行われてきた。そこで、上記のように受験者数を変化させることで、受験者数が比較的多い場合のみならず少ない場合に関しても、局所依存性の影響を検討することが可能になる。

本研究で行ったシミュレーションの手順は以下の様にまとめられる。

Step1, 各受験者の特性値 θ_i 、各項目の項目母数 α_j 、 β_j 、ならびに、各大問における項目反応間の局所依存性を表現するための受験者母数 $\gamma_{id(j)}(d(j) = 1, 2, 3, 4)$ を、それぞれ標準正規分布 $N(0, 1)$ 、一様分布 $U(0.5, 1.5)$ 、標準正規分布 $N(0, 1)$ 、正規分布 $N(0, \sigma_{\gamma d(j)}^2)$ から発生させる。

Step2, 各受験者の各項目に対する正答確率を Step1 で得られた母数と 2 値型の BTM から計算し、 1000×20 (300×20) の正答確率行列 **A** を作成する。

Step3, 一様分布 $U(0, 1)$ から一様乱数を 20000 (6000) 個発生させ、 1000×20 (300×20) の一様乱数行列 **B** を作成する。

Step4, 行列 **A**, **B** の各要素を比較し、大問形式の問題を含むテストに対する項目反応データの行列 **U** を作成する。具体的には、**A** の (i, j) 要素 a_{ij} が **B** の (i, j) 要素 b_{ij} 以上であれば **U** の (i, j) 要素 u_{ij} を 1 とし、 a_{ij} が b_{ij} 未満であれば u_{ij} を 0 とする (ここで、 $u_{ij} = 1$ は受験者 i が項目 j に正答することを、 $u_{ij} = 0$ は項目 j に誤答することを、それぞれ表す)。

Step5, Step4 で得られた項目反応データに対して 2.1 節および 2.2 節で紹介した 2 つの分析モデルを当てはめ、母数を推定する。

Step6, Step3~5 の手順を R 回繰り返す。

Step7, 2.3 節で解説した Ip (2010) の方法を利用し, 2 値型の BTM を当てはめた場合に得られる項目母数の推定値とその真値を 2PLM の項目母数と比較可能な値に変換する.

Step8, Step7 の結果得られた R 組の推定値を用い, 2 つの分析モデルにおいて以下の指標値を計算する.

$$Bias(\hat{\lambda}_j) = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \hat{\lambda}_{jr} - \lambda_j \quad (10)$$

$$RMSE(\hat{\lambda}_j) = \sqrt{\frac{1}{R} \sum_{r=1}^R (\hat{\lambda}_{jr} - \lambda_j)^2} \quad (11)$$

$$cor(\hat{\lambda}, \lambda) = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R cor(\hat{\lambda}_r, \lambda) \quad (12)$$

Step9, Step8 で得られる全 20 項目分の $Bias(\hat{\lambda}_j)$ と $RMSE(\hat{\lambda}_j)$ のうち, 局所依存関係にある項目に対する $Bias(\hat{\lambda}_j)$ と $RMSE(\hat{\lambda}_j)$ の値をそれぞれ平均し, $MBias(\hat{\lambda}_j)$, $MRMSE(\hat{\lambda}_j)$ とする.

ここで, λ_j は項目 j に関する項目母数の真値を, $\hat{\lambda}_j$ は λ_j の推定量を, $\hat{\lambda}_{jr}$ はそれらの r 回目の推定値を, それぞれ表わしている. また, λ は全 20 項目のうち局所依存関係にある項目の α_j^* あるいは β_j^* をその要素とする項目母数の真値のベクトルを表しており, $\hat{\lambda}$ はその推定量を, $\hat{\lambda}_r$ はその r 回目の推定値をそれぞれ表わしている.

$Bias(\hat{\lambda}_j)$ は $\hat{\lambda}_j$ にどの程度の過大または過小推定の傾向があるのかを示す指標であり, $RMSE(\hat{\lambda}_j)$ は $\hat{\lambda}_j$ の推定の誤差の大きさを示す指標である. また, $cor(\hat{\lambda}, \lambda)$ は $\hat{\lambda}$ が λ の大小関係を平均的にどの程度再現するかを表す指標である.

なお, 反復回数 R に関しては, 繰り返しごとの項目母数の推定値の変動を考慮し, 受験者数が 1000 人の場合には 50 回とし, 受験者数が 300 人の場合には 100 回とした. データの発生アルゴリズムや $Bias(\hat{\lambda}_j)$, $RMSE(\hat{\lambda}_j)$ 等の計算アルゴリズムの記述と実行には R-2.12.0 を使用し, 擬似乱数の発生には R-2.12.0 に実装されているメルセンヌツイスターを使用した.

2.5. MCMC による母数の推定について

本研究では, MCMC により母数の推定を行った. 具体的には, 各母数の事後分布における期待値を母数の推定量として採用することとし, MCMC により得られた標本の事後平均をもってこれの推定値とした. 事後

分布における期待値を解析的に求めるためには多重積分を解く必要があるが, 今の場合この解を解析的に求めることは難しい. MCMC を用いることにより, このような解析的に求めることの難しい推定値を複雑な計算を伴うことなく容易に求めることが可能となる.

実際に MCMC を実行し, 各母数の事後平均を事後分布からの標本により求める際には, WinBUGS 1.4 (Spiegelhalter, Thomas, & Best, 2003) を使用した. また, MCMC のアルゴリズムとしては Neal (1997) により提案されたスライスサンプリング法を利用した. 推定にあたっては各母数が互いに独立であると仮定し, 各分析モデルに含まれる母数の事前分布については以下のように設定した.

• 2PLM に含まれる母数の事前分布

θ_i : 標準正規分布 $N(0, 1)$

α_j^{**} : 正規分布 $N(1, 0.25)$

β_j^{**} : 標準正規分布 $N(0, 1)$

• BTM に含まれる母数の事前分布

θ_i : 標準正規分布 $N(0, 1)$

α_j : 正規分布 $N(1, 0.25)$

β_j : 標準正規分布 $N(0, 1)$

$\gamma_{id(j)}$: 正規分布 $N(0, \sigma_{\gamma_{d(j)}}^2)$

$\sigma_{\gamma_{d(j)}}^{-2}$: ガンマ分布 $\Gamma(3, 1)$

各マルコフ連鎖の初期値については, θ_i に関するものには 0 と, α_j に関するものには 1 と, β_j に関するものには 0 と, $\gamma_{id(j)}$ に関するものには 0 と, $\sigma_{\gamma_{d(j)}}^{-2}$ に関するものには 3 とした. 各マルコフ連鎖の収束判定には標本の時系列プロットを使用し, 事前に行ったシミュレーションの結果から, 全てのシミュレーション条件において, どちらの分析モデルにおいても最初の 1000 個の標本を burn-in とすることにした. また, MCMC により事後分布から抽出する標本の数については, WinBUGS User Manual (Spiegelhalter, Thomas, Best, & Lunn, 2003) に基づき, 各マルコフ連鎖における標本平均の標準誤差の推定値が, 事後分布からの標本の標準偏差の約 5% 以下になるように設定した. 具体的には, 全てのシミュレーション条件において, 2PLM を当てはめた場合には burn-in 後の 3000 個の標本を母数の推定に用いることとし, BTM を当てはめた場合には burn-in 後の 4000 個の標本を母数の推定に用いることとした. なお, WinBUGS を使用する際に用いた各分析モデルの model file と WinBUGS のプログラムコードを記述した Batch file に関しては, 論文末の Appendix に記載した.

3. 結 果

3.1. 識別力の推定精度に関する結果

まず、項目反応間の局所依存性が識別力の推定精度に与える影響に関して、項目母数の比較可能性を確保した上で検討を行った。

その結果、 $MBias(\hat{\alpha}_j^*)$ の値に関しては、検討した全ての条件において、2PLM を当てはめた場合の値が BTM を当てはめた場合の値に比べて 0.031~0.132 ほど正の方向に大きくなった。また、 $MRMSE(\hat{\alpha}_j^*)$ の値に関しても、検討した全ての条件において、2PLM を当てはめた場合の値が BTM を当てはめた場合の値よりも 0.026~0.139 ほど大きくなった。一方、 $cor(\hat{\alpha}^*, \alpha^*)$ の値に関しては、2PLM を当てはめた場合の値と BTM を当てはめた場合の値との差が -0.311~0.009 となり、検討された条件においては、分析モデル間でほとんど差が見られないか、2PLM を当てはめた場合の値の方が小さくなっていた。ここでは例として、受験者数が 300 人の場合の分析結果を図 1~3 に示す。

3.2. 困難度の推定精度に関する結果

つづいて、項目反応間の局所依存性が困難度の推定精度に与える影響に関して、項目母数の比較可能性を確保した上で検討を行った。

その結果、 $MBias(\hat{\beta}_j^*)$ の値に関しては、2PLM を当てはめた場合の値と BTM を当てはめた場合の値との差が -0.040~0.008 となり、検討された条件においては、2 つの分析モデル間でほとんど差が見られないか、2PLM を用いた場合の値の方が負の方向にやや大きくずれていた。また、 $MRMSE(\hat{\beta}_j^*)$ の値に関しては、2PLM を当てはめた場合の値と BTM を当てはめた場合の値との差が -0.001~0.054 となり、検討した全ての条件において、分析モデル間で差が見られないか、2PLM を当てはめた場合の値の方がやや大きくなっていた。一方、 $cor(\hat{\beta}^*, \beta^*)$ の値に関しては、2PLM を当てはめた場合の値と BTM を当てはめた場合の値との差が -0.006~0.001 となっており、検討した全ての状況において、両分析モデルともにその推定値が真値と 0.99 前後の相関を示していた。ここでは例として、受験者数が 300 人の場合の分析結果を図 4~6 に示す。

3.3. 項目母数の比較可能性が局所独立性を仮定した場合の推定結果に与える影響

1 で述べたように、先行研究においては本来比較す

図 1. 受験者数が 300 人の場合の $MBias(\hat{\alpha}_j^*)$ の値

図 2. 受験者数が 300 人の場合の $MRMSE(\hat{\alpha}_j^*)$ の値

図 3. 受験者数が 300 人の場合の $cor(\hat{\alpha}^*, \alpha^*)$ の値

ることが不可能な項目母数同士が比較され、その結果に基づき、局所依存性が項目母数の推定に与える影響について検討がなされてきた。ここでは、項目母数の比較可能性を確保するか否かによって、局所独立性を仮定した場合の推定結果がどのような影響を受けるのかについて、実証的な検討を行うこととする。

図 4. 受験者数が 300 人の場合の $MBias(\hat{\beta}_j^*)$ の値 図 6. 受験者数が 300 人の場合の $cor(\hat{\beta}^*, \beta^*)$ の値 図 5. 受験者数が 300 人の場合の $MRMSE(\hat{\beta}_j^*)$ の値

図 7. 受験者数が 300 人の場合のバイアスの値

具体的な手続きとしては、データの発生モデルである 2 値型の BTM に含まれる α_j を真の識別力母数とし、2PLM を分析モデルとした場合に得られる $\hat{\alpha}_j^*$ の推定値 $\hat{\alpha}_j^*$ をその推定値とする。そして、これらの母数ならびに推定値から算出される全 20 項目分のバイアスと平均二乗誤差平方根のうち局所依存関係にある項目に対する $Bias(\hat{\alpha}_j)$ と $RMSE(\hat{\alpha}_j)$ の値を平均し、それぞれ $MBias(\hat{\alpha}_j)$ 、 $MRMSE(\hat{\alpha}_j)$ とした。また、全 20 項目のうち局所依存関係にある項目の $\hat{\alpha}_j^*$ と α_j の間の相関係数を算出し、その R 回分の平均を $cor(\hat{\alpha}^*, \alpha)$ とした。そして、これらの指標値を、3.1 節で 2PLM を適用して得られた $MBias(\hat{\alpha}_j^*)$ 、 $MRMSE(\hat{\alpha}_j^*)$ 、 $cor(\hat{\alpha}^*, \alpha^*)$ の値と比較し、項目母数の比較可能性が局所独立性を仮定した場合の推定結果に与える影響について検討を行った。なお、2.3 節で述べた様に、困難度母数に関しては、2 値型の BTM に含まれる β_j と 2PLM を分析モデルとした場合に得られる $\hat{\beta}_j^*$ の推定値 $\hat{\beta}_j^*$ との間で項目母数間の比較可能性が既に確保されているため、以下困難度母数に関する検討は行わないこととする。

検討の結果、項目母数の比較可能性を確保しなかった場合、検討された全ての条件において、 $MBias(\hat{\alpha}_j)$ の値は 0.077～0.464 ほど $MBias(\hat{\alpha}_j^*)$ の値を過少推定していた。また、 $MRMSE(\hat{\alpha}_j)$ の値と $MRMSE(\hat{\alpha}_j^*)$ の値との差に関しては一貫した傾向は見られなかったが、その差の大きさは 0.000～0.300 となっており、 $MRMSE(\hat{\alpha}_j)$ の値と $MRMSE(\hat{\alpha}_j^*)$ の値が大きく乖離する場合も見られた。 $cor(\hat{\alpha}^*, \alpha)$ の値に関しては、4 つの大問全ての局所依存度が強い、または、弱い場合には、 $cor(\hat{\alpha}^*, \alpha)$ の値と $cor(\hat{\alpha}^*, \alpha^*)$ の値の差が $-0.058 \sim 0.005$ となり、2 つの分析モデル間でほとんど差は見られないか、 $cor(\hat{\alpha}^*, \alpha)$ の値の方がやや小さくなった。それ以外の場合では、局所依存関係にある項目の数が 5 項目の場合には $cor(\hat{\alpha}^*, \alpha)$ の値が $cor(\hat{\alpha}^*, \alpha^*)$ の値を 0.047～0.181 ほど過大推定し、局所依存関係にある項目の数が 3 または 2 である場合には、 $cor(\hat{\alpha}^*, \alpha)$ の値が $cor(\hat{\alpha}^*, \alpha^*)$ の値を 0.101～0.328 ほど過少推定する傾向が見られた。ここでは例として、300 人の場合の分析結果を図 7～9 に示す。

図 8. 受験者数が 300 人の場合の平均二乗誤差平方根の値

図 9. 受験者数が 300 人の場合の真値と推定値との相関係数の値

4. 考 察

4.1. 局所依存性が項目母数の推定に影響を与えるメカニズムについて

本研究では、項目反応間の局所依存性が項目母数の推定に与える影響について、項目母数の比較可能性を確保した上で検討を行った。その結果、識別力母数に関しては、局所依存性を考慮せずに分析を行った場合、当該母数が大きく過大推定されてその平均二乗誤差平方根も大きくなること、真値と推定値の間の相関係数に関してはその値が低下する場合もあることが示された。また、困難度母数に関しては、局所依存性を考慮せずに分析を行った場合、当該母数が過少推定される場合もありその平均二乗誤差平方根も大きくなること、ただし、真値と推定値の間の相関係数に関してはほとんど変化が見られないことが示された。

Lord (1980) 等々に示されているように、2PLM に含まれる α_j^{**} ならびに β_j^{**} は、一定の仮定の下、それぞれ当該項目 j への項目反応 u_j と尺度の和得点 S との

間の双列相関係数 r_{bj} の関数として、それぞれ、

$$\alpha_j^{**} \cong \frac{r_{bj}}{\sqrt{1 - r_{bj}^2}} \quad (13)$$

$$\beta_j^{**} \cong \frac{z_{t_j}}{r_{bj}} \quad (14)$$

のように表すことができる。ここで z_{t_j} は、 u_j の背後に存在すると仮定される潜在変数 t_j がその値以上であれば $u_j = 1$ となる閾値を表している。データの発生モデルである 2 値型の BTM には特性値 θ に加え局所依存性を表現するための受験者母数 γ が含まれており、この γ の影響により、局所依存関係にある項目反応間の四分相関係数は特性値 θ のみに基づくものよりも強いものとなる。したがって、局所依存性を考慮せずに分析を行った場合、局所依存関係にある項目の四分相関係数は特性値 θ に基づく相関として過大推定されることになり、その結果、当該項目の双列相関係数も過大推定されることとなる。このとき、上述の (13) 式は r_{bj} の単調増加関数となり、(14) 式は単調減少関数となっているので、2PLM を当てはめた場合に得られる α_j^{**} ならびに β_j^{**} の推定値は、母数の真値 α_j^* ならびに β_j^* をそれぞれ過大、過少推定することになる。本研究で局所独立性を仮定して分析を行った場合に、局所依存関係にある項目の識別力と困難度に関するバイアスが局所依存性を考慮した真のモデルを当てはめた場合に比べてそれぞれ正と負の方向に大きくなったのは、上記のことが理由であると考えられる。また、局所依存関係にある項目の識別力と困難度に関する平均二乗誤差平方根が、局所独立性を仮定して分析を行った場合に共に大きくなったのは、上述のように、各母数のバイアスが大きくなったことがその一因であろうと考えられる。

なお、識別力母数に関しては、局所依存性を考慮した場合にも、局所独立性を仮定した場合ほどではないにしろ、真値を過大推定する傾向が見られた。本シミュレーションでは α_j の事前分布の平均が 1 と、 $\sigma_{\gamma_{d(j)}}^{-2}$ の事前分布の平均が 3 となっていることから、事前情報から予測される平均的な α_j^* の値は 0.949 となる。したがって、 α_j^* の値が 0.949 よりも小さい項目に関してはその推定値に過大推定の傾向が見られ、0.949 よりも大きい項目に関しては過少推定の傾向が見られると考えられる。実際に各条件における α_j^* の値を調べてみると、その値は 0.471~1.257 となっており、このことから、局所依存性を考慮した場合にも過大推定さ

れる傾向にある項目の方が多いことが推察される。局所依存性を考慮した場合にも識別力母数の真値が過大推定される傾向にあったのは、上記のことが理由であると考えられる。また、(7)式の分母に $\sigma_{\gamma d(j)}^2$ が含まれていることから、局所依存度の強い大問に含まれる項目に関しては、その α_j^* が α_j よりもより小さくなる傾向にある。これにより、局所依存度の強い大問の数が多いほど、過大推定の傾向が強まったのだと考えられる。また、識別力母数と困難度母数ともに、局所依存関係にある項目が5項目である条件において局所独立性を仮定した場合にのみ、真値と推定値との相関係数について他の条件とは異なる挙動が見られた。識別力母数、困難度母数ともに、局所依存関係にある項目の数が5項目である場合には局所依存関係にある項目の数が2や3である場合に比べてその推定量のバイアスの絶対値が大きくなる傾向が見られており、この推定量に生じるバイアスの差が、上記のような挙動が見られた一因であると考えられる。

4.2. 項目母数の比較可能性が項目母数の推定に与える影響について

本研究では、項目母数の比較可能性の有無が局所独立性を仮定した場合の項目母数の推定に与える影響に関しても検討を行った。その結果、項目母数の比較可能性を確保せずに局所独立性を仮定した場合の項目母数の推定精度に関する検討を行った場合、項目母数の比較可能性を確保した上で検討を行った場合に比べて、識別力に関するバイアスが大きく過少推定されること、平均二乗誤差平方根が過大推定される場合もあること、局所依存関係にある項目の数が多い場合には真値と推定値の間の相関係数が過大推定され、それ以外の場合には過少推定されること等が示された。

これらの結果より、項目母数の推定に対して局所依存性が与える影響を検討した先行研究の知見の少なくとも一部は、項目母数の比較可能性を確保しなかったために歪められていることが示唆された。

なお、真値と推定値の間の相関係数に関しては、その値が過大推定、あるいは、過少推定され、一貫した傾向は見られなかった。4.1節でも述べたように、項目母数の比較可能性を確保した場合、局所依存関係にある項目の数が5項目である場合には識別力母数の推定量に生じるバイアスが正の方向に大きくなる。一方で、項目母数の比較可能性を確保しなかった場合には、局所依存関係にある項目の数が減少するにつれてその推

定量にかかるバイアスが負の方向に大きくなっている。そのため、局所依存関係にある項目が5項目である場合には、項目母数の比較可能性を確保しなかった場合に真値と推定値の間の相関係数を過大推定し、2項目あるいは3項目である場合には、過少推定する傾向にあると考えられる。また、4つの大問の局所依存度が全て等しい場合には、各項目の推定量に同程度のバイアスが生じると考えられる。このため、上記の条件においては、項目母数の比較可能性を確保した場合としなかった場合との間で真値と推定値との間の相関係数に差が見られなかったと考えられる。

4.3. 今後の検討課題

項目反応間の局所依存性を表現し、かつ、各項目に正答する確率が通常の項目反応モデルと等しくなるようなモデルも先行研究においていくつか提案されている (Braeken, 2011; Braeken et al., 2007; Ip et al., 2009)。しかしながら、モデルの単純性や解釈のしやすさ、引用件数からうかがえる各モデルの普及具合を考慮し、今回の研究では、局所依存性を表現する真の項目反応モデルとして2値型のBTMを使用することとした。したがって、今回得られた知見は局所依存性を考慮せずに分析を行った場合の項目母数の推定精度への影響を検討したものではあるが、対象となる項目反応間の局所依存性が2値型のBTMで表現されるもの以外である場合にも同様の結果が成り立つのかに関しては、別途検討する必要があると考えられる。その際使用され得るモデルとしては、境界混合モデル (boundary mixture model) (Braeken, 2011) やラッシュ・コンピュータモデル (Braeken, et al., 2007)、局所依存線形ロジスティックテストモデル (locally dependent linear logistic test model) (Ip, et al., 2009) といったモデルが挙げられる。

また、実際のテストデータにおいても本研究で得られた知見と同様の傾向が見られるのかどうかに関しては、項目反応間で局所依存性が生じている実際のテストデータを利用して別途同様の検討を行う必要があると考えられる。

謝 辞

東京大学大学院教育学研究科の南風原朝和先生には、本稿を執筆するにあたり、大変貴重なご意見、ご指導を賜りました。心より感謝申し上げます。

また、審査員の先生方からも、本稿に関して貴重なご意見を賜りました。心より感謝申し上げます。

参考文献

- Bradlow, E.T., Wainer, H., & Wang, X.H. (1999). A Bayesian random effects model for testlets. *Psychometrika*, 64, 153–168.
- Braeken, J. (2011). A boundary mixture approach to violations of conditional independence. *Psychometrika*, 76, 57–76.
- Braeken, J., Tuerlinckx, F., & De Boeck, P. (2007). Copula functions for residual dependency. *Psychometrika*, 72, 393–411.
- Chen, C., & Wang, W. (2007). Effects of ignoring item interaction on item parameter estimation and detection of interacting items. *Applied Psychological Measurement*, 31, 388–411.
- Ferrara, S., Huynh, H., & Michaels, H. (1999). Contextual explanations of local dependence in item clusters in a large scale hands-on science performance assessment. *Journal of Educational Measurement*, 36, 119–140.
- 南風原朝和 (2000). 個人正答率に基づく局所独立性の概念の明確化—実験的独立性および一次元性との関係を中心に—. 2000年9月26日 <http://www.p.u-tokyo.ac.jp/~haebara/localind/> (2012年5月10日)
- Hoskens, M., & De Boeck, P. (1997). A parametric model for local dependence among test items. *Psychological Methods*, 2, 261–277.
- 池田 央 (1992). テストの科学—試験に関わる全ての人に. 日本文化科学社.
- Ip, E.H. (2010). Interpretation of the three parameter testlet response model and information function. *Applied Psychological Measurement*, 34, 467–482.
- Ip, E.H., Smith, D.J.M., & De Boeck, P. (2009). Locally dependent linear logistic test model with person covariates. *Applied Psychological Measurement*, 33, 555–569.
- 石塚智一, 中畝葉穂子, 内田照久, 前川眞一 (2001). テストレットモデルによる英語試験問題の分析. 大学入試センター研究紀要, 30, 21–38.
- Junker, B.W. (1991). Essential independence and likelihood-based ability estimation for polytomous items. *Psychometrika*, 56, 255–278.
- Kreiner, S. & Christensen, K.B. (2004). Analysis of local dependence and multidimensionality in graphical loglinear Rasch models. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 33, 1239–1276.
- Lee, G. (2000). A comparison of methods of estimating conditional standard errors of measurement for testlet-based test scores using simulation techniques. *Journal of Educational Measurement*, 37, 91–112.
- Li, Y., Bolt, D.M., & Fu, J. (2005). A test characteristic curve linking method for the testlet model. *Applied Psychological Measurement*, 29, 340–356.
- Li, Y., Bolt, D.M., & Fu, J. (2006). A comparison of alternative models for testlets. *Applied Psychological Measurement*, 30, 3–21.
- Lord, F.M. (1980). *Applications of item response theory to practical testing problems*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Lord, F.M., & Novick, M.R. (1968). *Statistical theories of mental test scores*. Reading, MA: Addison-Wesley.
- Neal, R. (1997). Markov chain Monte Carlo methods based on ‘slicing’ the density function. *Technical Report 9722*, Department of Statistics, University of Toronto, Canada.
- Sireci, S.G., Thissen, D., & Wainer, H. (1991). On the reliability of testlet-based tests. *Journal of Educational Measurement*, 28, 237–247.
- Spiegelhalter, D., Thomas, A., & Best, N. (2003). WinBUGS 1.4 [Computer program]. Cambridge, UK: MRC Biostatistics Unit, Institute of Public Health.
- Spiegelhalter, D., Thomas, A., Best, N., & Lunn, D. (2003). WinBUGS user manual. Version 1.4. Cambridge, UK: MRC Biostatistics Unit, Institute of Public Health.
- 登藤直弥 (2010). 局所独立性の仮定が満たされない場合の潜在特性推定への影響. 日本テスト学会誌, 6, 17–28.
- 登藤直弥 (2012). 大問形式の問題の項目群への項目反応に対する確率モデルの比較. 日本テスト学会誌, 8, 85–100.
- Wainer, H., Bradlow, E.T., & Wang, X.H. (2007). *Testlet response theory and its applications*. Cambridge University Press.
- Yen, W.M. (1993). Scaling performance assessments: Strategies for managing local item dependence. *Journal of Educational Measurement*, 30, 187–213.

(2012年5月31日受付, 2012年6月25日最終修正)

Appendix

本研究で使した model file ならびに Batch file のコードを以下に記載する。

・2PLM の model file のコード

#ただし, $P[i, j]$ は $P_j^{**}(\theta_i)$, $U[i, j]$ は u_j , $t[j]$ は θ_i ,
 # $a[j]$ は α_j^* , $b[j]$ は β_j^* を, 表すものとする.
 model{
 for(i in 1:N){
 for(j in 1:J){
 P[i, j] <- 1/(1+exp(-1.7*a[j]*(t[i]-b[j])))
 U[i, j]~dbern(P[i, j])
 }
 t[i]~dnorm(0, 1)

```

}
for(j in 1:J){
  a[j]~dnorm(1, 4)
  b[j]~dnorm(0, 1)
}
} #model 終了

```

・2 値型の BTM の model file のコード

#局所依存関係にある項目の数が 5 項目の場合のもの
#を例示する.

#ただし, $P[i, j]$ は $P_i(\theta_i)$, $U[i, j]$ は u_j , $t[i]$ は θ_i ,
$a[j]$ は α_j , $b[j]$ は β_j , $g[i, 1]$ は $\gamma_{id(j)}$ を,
$\tau[l]$ は $\sigma_{\gamma_d(j)}^{-2}$ を, 表すものとする.

```

model{
  for(i in 1:N){
    for(l in 1:4){
      for(j in (5*l-4):(1*5)){
        P[i, j] <- 1/(1+exp(-1.7*a[j]*(t[i]-b[j]-g[i, 1])))
        U[i, j]~dbern(P[i, j])
      }
      g[i, 1]~dnorm(0, tau[l])
    }
    t[i]~dnorm(0, 1)
  }
}

```

```

for(l in 1:4){
  tau[l]~dgamma(3, 1)
}
for(j in 1:J){
  a[j]~dnorm(1, 4)
  b[j]~dnorm(0, 1)
}
} #model 終了

```

・Batch file のコード

#分析モデルが 2PLM の場合を例示
display(log) #output options
check(model file) #model check
data(data file) #load data
compile(1) #compile
inits(1, inits file) #load inits
update(1000) #update (burn-in)
set.summary(a) #summary monitor of a set
set.summary(b) #summary monitor of b set
set.summary(t) #summary monitor of t set
update(3000) #update (sample)
stats.summary(*) #statistics summary
save(result file) #save as
#Batch file 終了