行動科学への数理の応用：探索的データ解析と測度の関係の理解

西 里 静 彦

Applications of Mathematics to Behavioral Sciences: Understanding the Relations between Exploratory Data Analysis and Measurement

Shizuhiko NISHISATO

The role of mathematics in behavioral sciences is essential for the objective and logical descriptions of the phenomena under consideration. However, the question one must bear in mind is if it is used validly and justifiably. The paper was written in the hope that the basic premises for logical descriptions be well understood and put into practice of data analysis. The views presented here are based on my own observations of current practice in data analysis, and its preliminaries are already discussed in my paper entitled “Generating optimal data as regressions of measurement on data” (*Bulletin of Data Analysis of Japanese Classification Society*, 2011, Volume 1, No.1, 1–9) and my book “*Data analysis for the behavioral sciences: Use of methods appropriate for data*” (2010, Baifukan), both in Japanese. The current paper starts with these preliminaries and places special emphasis on the importance of the relations between data and measurement. Through the understanding of their relations, we discover that our data are enormously informative, leading to the important objective of exploratory data analysis: Capture as much information as possible from data in hand.

Key words: Nominal measurement, dual relations, correlation, doubled space

キーワード：名義測度，双対関係，相関，次元数二倍の空間

1. 第一部 データ解析のお膳立て

1.1. データとは何か？

この質問に対して、「今更なぜ？」と反論する人が多からう。市場調査で、応答が男、女というのもデータであり、男何人、女何人というのもデータである。そして、製品（ソニーのテレビ、サムソンのテレビ、LG のテレビ、その他）のどれを使っているかという選択もデータであり、満足度として（大満足、ある程度満足、少々不満、強い不満）などの選択もデータである。この様に各種のデータを考えるとき、データ解析の前に、

当然データとは何かという質問の意味を理解する必要性が浮かび上がる。演算が不可能なデータも多数ある。それらを如何に処理すべきか？ データの性質の意味を吟味する前に、もう少しお膳立てを築いておこう。

1.2. データ解析とは何か？

どのような形のデータであれ、その性質により演算が可能で様々な統計量を算出できるか、或いは分類が可能であるか、或いは度数の計算が可能であるかなど、データの数学的性質により、解析の方法が課題として浮かび上がる。解析法はどうあれ、その底流にあるデータ解析の目的とは何であろうか？ それは「データから出来るだけ多くの情報を取り出して解釈すること」である。我々が一般にデータ解析といっている仕事の大半は探索的情報追及が目的なので、データに含まれる情報を無駄にしないように、という心がけが欲しい。データとは何か、データ解析とは何かに応えるには、

トロント大学名誉教授
(University of Toronto)
連絡先：(自宅) 9 St. George's Road, Toronto, Ontario
M9A 3S9, Canada
Tel：1-416-239-7503
E-mail：shizuhiko.nishisato@utoronto.ca

両者には欠かすことが出来ないもう一つの話がある。それは「測度」(または「尺度」)の話で、その理解はデータ解析に重要な役割を果たす。

1.3. スティーヴンスの測度の分類

測度とはある事象に一定の数学的操作に基づき数値を与えたものである。上記の様々なデータの例を見たが、それらがデータといわれる形で、解析の対象になるには、測度への変換過程を通過しなくてはならない。測度の考え方に関しては、論理的なもの(例えば、Suupes and Zinnes, 1963)から、誰でも理解できるものまで多数ある。そのうち、後者の例として、心理学で最もよく知られているスティーヴンスの測度の分類(Stevens, 1951)を取り上げよう。

数値を名札の目的に使った場合を「名義尺度」とよび、数学的には一対一の関係のみが当てはまる数値の使い方の測度で、例えばスポーツ選手の背番号とかグループに割り当てた1, 2, 3などの番号が名義尺度の例である。心理学では名義尺度には、通常の演算が応用できない(例:グループ1とグループ2を足してもグループ3にはならない)ので、一般には「数量」という概念の当てはまらないデータであるという取り扱いをしてきた。一般のデータ解析で名義尺度が得られると、それが解析の中心になることはめったに無く、したがって名義尺度のデータとしての役割は最小限だという認識が出来てしまった。しかし、その認識は正しいだろうか? 筆者の見解は、全くその逆で、名義尺度こそ、1対1という最も正確なデータの記述法であり、したがって様々なデータ記述の測度としては、最も重要、かつ最大の役割を果たすものだと考えている。これは特に探索的データ解析の場合に当てはまることである。

名義尺度より数学的には一つ水準の高い測度として、順位概念を取り入れたものが「順位尺度」である。例えば、観光都市の評判を示す為の、1番、2番などに使われる数値で、順位尺度も差し引きなどの演算の対象にはならない。ただ、順位尺度は、一対一の関係を表すほかに、測度の大小の比較を可能にしてくれる。

さらに、上記の特性に等単位という概念を加えると、「間隔尺度」がうまれる。例えば、知能指数、気温の摂氏や華氏、テストの点数、市場調査のリッカート得点などがある。行動科学の量的データは殆どが間隔尺度に属する。この水準の測度では、数学的に、一対一の操作、大小の比較、そして加算、減算の操作が可能で

ある。これらの操作ができればデータ解析には十分であるような気もするが、そこには大きな落とし穴がある。つまり間隔尺度には、絶対原点がない(例:知能指数0の定義がない、我々の使う気温の指標には絶対原点がない、テストの点数ゼロは必ずしも無能力をしめさない)。したがって、間隔尺度の割り算、掛け算には意味が無いことになる。例えば、「今日の摂氏20度の温かさは、10度だった昨日の気温の2倍の温かさだ」というのは誤りである。知能指数100の人は知能指数50の人の2倍の知能を持っているともいえない。共に測度の原点がゼロで無いからである。

最後に、測度に以上の性質に加え、絶対原点の情報を加えたものを「比率尺度」とよぶ。例えば距離は比率尺度である。この測度に至って、初めて一対一、大小の比較、加減算、そして掛け算、割り算が正当化できるようになる。しかし、行動科学で得られるデータで、比率尺度とよぶことが出来るものは、めったに見られない。それなのに、データが集まると、あらゆる数値処理を施して、出てきた結果を解釈している。それは誤った数学の応用としか言えない。

測度の問題はデータ解析に欠かせないにもかかわらず、統計学で上記のような測度の分類を深刻に取り上げている話はあまり聞かない。英国のRoyal Statistical Societyの会長を2回務めたHand (1996)も統計学が測度に対して無関心であることを批判している。むしろ、統計学の応用分野である行動科学で、測度の話が出てくるが、測度と統計学の関係の検討に深みがない。昔の話になるが、測度と統計学を直接つないで統計学を説いたものに、シーゲルの本(Siegel, 1956)があり、それが学生の座右の書となっていた。しかし、現在では統計の講義がたとえ測度の分類で始まっても、その後には統計解析には測度の話が出てこない。現時点からは、Hand (2004)に学ぶべきであろう。また測度の妥当性という観点から問題を論じたMichell (2009)も一読の価値がある。さらに、Hand (2006)は統計学の講義に測度を考慮にいられたNishisato (2007)を推薦している(註:Nishisato (2007)は2006年7月に出版されたが、著作権は2007)。

比率尺度がデータとして得られるという事態がめったに無い行動科学では、人手を介して「データ」が作られ、それが解析の対象になっている。殆どの場合、それらが比率尺度でなくても、加減算、掛け算割り算で処理されている。この深刻な問題を無視したデータ解析が日常茶飯事のように執行され結論が発表されて

表 1. 人口データ

被験者	性別	出身国	同性結婚	定年制
1	男	韓国	反対	反対
2	女	韓国	反対	中立
3	男	中国	反対	賛成
4	女	日本	中立	反対
5	男	日本	賛成	賛成
6	女	中国	反対	賛成
7	男	日本	賛成	中立
8	女	中国	中立	反対

表 2. 典型的な測度への変換

被験者	性別	出身国	同性結婚	定年制
1	1	3	1	1
2	2	3	1	2
3	1	2	1	3
4	2	1	2	1
5	1	1	3	3
6	2	2	1	3
7	1	1	3	2
8	2	2	2	1

いる、と言うのは余りにも批判的だろうか？ それが典型的なデータ解析ではなくても、測度と解析の問題はデータ解析の基礎であることを明記したい。

我々のデータ解析の対象になるデータが真に比率尺度であるなら、線型代数をはじめとする行動科学に役立つ数学の話は大いに意味がある。しかし、行動科学で集めるデータは、おおむねそのまま数的操作を施すだけの測度水準に無いにもかかわらず、多くの論文では高度の数的処理に関心が集中していることは否めない。

1.4. 解析のためのデータ作成

次の質問により「データ」を集めるとしよう。

- (1) 性別：男性，女性
- (2) 出身国：日本，中国，韓国
- (3) 同性結婚：反対，中立，賛成
- (4) 職の定年制：反対，中立，賛成

8 人の被験者から、次のようなデータが得られたとしよう。

表 1 の表現はデータの原本そのもので、データの全情報を荷っている。測度の問題は、このデータにどのような数値を与えて解析するかにある。現在広く用いられている方法で数値を与えてみよう。まず、性別は名義尺度で、男＝1，女＝2，出身国も名義尺度で、日本＝1，中国＝2，韓国＝3 としよう。同性結婚と定年制に対する反応選択肢には順序があるので、常套手段のリッカート尺度 (Likert, 1932) を用いて、反対＝1，中立＝2，賛成＝3 とする。この測度の応用で生まれるデータ解析の対象となるデータは、表 2 のようになる。

1.5. データ処理法の常套手段の再考

先ず、表 2 のデータが手元にある場合、通常の解析手

表 3. 名義測度によるデータの表示

被験者	性別		出身国			同性結婚			定年制		
	男	女	日	中	韓	反	中	賛	反	中	賛
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
2	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0
3	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
4	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0
5	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
6	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1
7	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0
8	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0

段では、性別と出身国が同性結婚と定年制に対する意見にどのような関係を持っているかを検討する。性別と出身国は名義尺度で分類に用いられ、同性結婚と定年制に対する反応に与えられたリッカート得点のデータは、間隔尺度として扱うのが普通であろう。絶対原点の無い間隔尺度は原点に影響されない相関係数を計算して結果を検討するのが妥当とされている。論理的には、これ等の解析法に異論を挟む余地が無いように見える。しかし、上記の方法では、データに含まれる全情報を解析の対象にしているとは言えない。それを説明しよう。

データの全情報は、全く人工的操作を加えない「名義尺度による表現」に含まれているというのが筆者の見解である。表 3 では 1 が反応（選択）、0 が無反応を示す。

このように全ての変数を名義尺度として表現するなら、多くの人は性別 × 同性結婚、性別 × 定年制、出身国 × 同性結婚、出身国 × 定年制の分割表を構成してカイ二乗検定を用いることを考えると思う。これは同性結婚と定年制に関するデータを間隔尺度として処

理するよりはまともな手続きである。しかし、これでデータに含まれる全情報を解析の対象にしたと言えるだろうか？ 筆者の応答は「ノー」である。表3のデータには、もっと沢山の情報が含まれている。データの全情報量を考える前に、現在の典型的解析法をとりあげ、その致命的問題点を検討しよう。

1.6. リッカート得点の限界

行動科学における市場調査、世論調査、心理テストなどで、質問紙には多肢選択法が広く用いられ、多くの場合選択肢に順序関係のあるものを使っている。順序関係をもつ選択肢に整数を与えて選択肢の得点とする方法は今からおよそ80年前に Rensis Likert が博士論文で提唱し、以後リッカート尺度 (Likert, 1932) として広く知られてきた。たとえば、「商品税の引き上げに賛成か？」の選択肢「強く反対、やや反対、どうでも良い、やや賛成、強く賛成」に、それぞれ1, 2, 3, 4, 5という得点を与える。「老後の心配はあるか？」の選択肢「全く無い、少しある、大いにある」に、それぞれ1, 2, 3という得点を与える。これ等は一般にリッカート尺度 (得点) といわれ、間隔尺度として解析の対象になっている。この得点は、簡単であり、調査データの基本のようになってしまい、何らの疑問も無く世界何処でも使われてきた。しかし、データ解析の目的が情報の回収にあるとすると、リッカート法には大きな難点がある。

市場調査の常套手段であるリッカート尺度を放棄せよと言っても、誰も耳を貸してくれない。Likert は有名なミシガン大学のサーベイリサーチセンターを創設 (後に拡大して Institute of Social Research, ISR に発展) し、アメリカ統計学会の会長も勤めた人だけに、彼の影響は絶大である。しかし、その効用は、探索的データ解析に貢献するどころか、むしろ弊害となっていることを知る人は少ない。

リッカート得点で表された測度 (選択肢の得点) は、名義尺度で表示された (1,0) のデータの情報分布と無関係である。極端に言えば、それは先験的に出された得点で、手元にあるデータとは無関係な「いい加減な」測度である。順序ある反応選択肢にあたえた1, 2, 3, 4, 5という整数は、主観的にはもっともに見えるが、データから情報を取り出すという目的とは「無関係」で、データに含まれる情報の回収に最適だという保障が何処にもない。むしろ、リッカート得点そのものではなく、データの情報を用いて、カテゴリー得点 $1+\alpha$,

$2+\beta$, $3+\gamma$, $4+\delta$, $5+\varepsilon$ として、データから未知数を推定して解析の対象にしたほうが、情報回収には遙かに効果的であろう。この際、これら未知数の推定は、データへの回帰として求められ、データと得点 (測度) の緊密な関係が生まれてくる。それにもかかわらず、何で、これまでリッカート得点のようないい加減な数値を解析の対象にしてきたのだろうか？

データには、様々な情報が含まれている。リッカート得点の「データから離れた得点」という特徴にもまして致命的なことは、リッカート得点は線型フィルターの役目を果たし、データに含まれる線形的情報だけを取り出すということである。例えば、「ケチくささと財産の関係」、「ケーキの好みと甘さの関係」など、すべて非線形の関係であると考えられるが、リッカート尺度でデータを集めて相関を計算すると、これらの相関は、いずれも0に近い値が予想される。つまり、リッカート尺度を使うと、これらの興味深い非線形関係は、すべて葬られるということである。したがって、リッカート得点を用いた市場調査データの主成分分析は多数の成分を抽出したとしても、それらは線形関係の多次元解析であって、データに含まれる全情報の解析にはならない。データによっては、殆どの情報を無視されてしまうことにもなりかねない。これはリッカート得点の致命的な側面である。

以上の議論から明らかなように、行動科学の大半を占める探索的データ解析には、リッカート尺度の効用は極めて限られていることを明記したい。

1.7. 行動科学データは豊富な情報を満載している

我々の周辺には変数の関係が線型とは限らないものや、名義尺度と間隔尺度の混在したデータセットなど、何処にでもある。さらに探索的データ解析である市場調査、世論調査、社会調査、医療調査など、目的とすることは、どのような情報がデータに含まれているか、どうすれば出来るだけ豊富な情報を取り出すことができるか、ということである。それなのに、何故リッカート得点を解析の対象にするのか、何故名義尺度と間隔尺度など、全てを一緒に解析しないのか？ この疑問を理解する為には、行動科学で遭遇するデータの具体例を吟味することが必要である。

(1) 年齢と体力の関係: 「年齢群」は、1-5 歳, 6-10 歳, 11-15 歳, 16-20 歳, ..., 80-85 歳の 17 群 (1, 2, 3, ..., 17 のリッカート得点で表示), 「体力」は弱いから強いまでの 10 段階 (1, 2, 3, ..., 10 のリッカー

ト得点)で、年齢と体力の相関をリッカート得点から求める。一般に体力は年少では弱く、年と共に強くなり、さらに年をとると弱化するので、年齢と体力の相関は殆ど0に近いことが予想される。この相関が0に近いというのは、関係がランダムだからではなく、非線型だからであり、リッカート得点の使用により、この明らかな非線形関係が無視されてしまう。

(2) 珈琲と温度：「コーヒーのうまさ」と「コーヒーの温度」をカテゴリーで示し、共にリッカート得点を与えて相関を求めると、これも高い相関は期待できない。なぜなら、コーヒーのうまさには適度の温度があり、アイスコーヒーの様に冷たいときと適度の熱さのときに好まれても、余りにも低温で凍り付いても、舌のやけどを招く沸騰したものも共に嫌われ、さらに生ぬるいコーヒーも避けられる。低い相関は、リッカート得点の使用によるもので、コーヒーの温度とコーヒーのうまさにはれっきとした関係がある。研究者の関心は、線型相関0ではなく、どのような関係が見出させるかにあるべきだ。

(3) 名義尺度の導入：「年齢」、「体力」、「コーヒーのうまさ」、「コーヒーと温度」などリッカート得点で表した変数に加え、性別、国籍など名義尺度で表される変数を同時に解析したい、という事態が考えられる。もう一つの例として、市場調査で化粧品ブランドや、女性の職業(主婦、OL、その他)などの名義尺度で示される変数、化粧品の様々な特性(若々しく見せる、肌をしっとりさせる、満足度、値段)などリッカート得点で示すことの出来る変数などを同時解析して、化粧品の評価、アピールの陰の変数の働き、経済的でアピールをする場合の女性の年齢、職業など、名義尺度、間隔尺度を問わずに、線型、非線形情報を徹底的に解析したい、ということもあろう。

これらの例のように、行動科学で接するデータは線形、非線形の関係を内包しているので、解析の対象を線形に限ることは正にタブーとすべきであろう。さらに非線形の関係の把握は、解析を複雑にするものではない。線形解析の戦略を再考し、特に探索的データ解析からは「線型解析だけ」を破棄してほしい。

1.8. 測度のデータへの回帰

データを名義尺度で示した(1,0)の表現こそ、データの全情報をにうものであると先に述べたが、それはデータに何らの制限も課さない表現法であるからで、これはデータ解析の戦略として、「データを down-grade

してから解析せよ」(Nishisato, 1999)という勧めに通ずる。すなわち、データにどのような情報が含まれているかは、解析するまで分からないので、いい加減な数値を解析前に導入しないようにという忠告である。表3の全情報データを再度取り上げよう。

4個の変数の11個のカテゴリーに未定の測度を与える。それらの測度の値を(1,0)のデータへの回帰として求める。つまり、「データにもっとも近い測度」を求める。それには様々な方法がある。すでに明らかなことかもしれないが、これは数量化の問題そのもので、数量化の発展には日本が大いに貢献してきた。数量化理論は歴史をたどると、いくつかの画期的論文に目が留まる。Ramensky (1930), Richardson and Kuder (1933), Hirschfeld (1935), Horst (1935), Fisher (1940), Guttman (1941, 1946), Hayashi (1951), Bock (1960), Benzécri and others (1973), Hill (1973), de Leeuw (1973), 林 (1974, 1992), 駒沢 (1978), Nishisato (1980, 1982, 1994, 1996, 2007), 小林 (1981), 駒沢, 林 (1982), Gauch (1982), Greenacre (1984, 1993), Tenenhaus and Young (1985), Takane, Yanai and Mayekawa (1991), Gifi (1992), Greenacre and Blasius (1994, 2006), Le Roux and Rouanet (2004) ほか、日本語の素晴らしい参考書も多数出ている。この数量化には双対性の原理(Nishisato, 1980)があり、(1,0)のデータへの回帰として求めるカテゴリーの測度(重み)は被験者の得点の分散を最大にする被験者の測度(得点)を割り出し、これ等の得点もデータへの回帰値に他ならない。すなわち、数量化の方法は、データへの回帰としての被験者の得点とカテゴリーの重みを同時に決定してくれる。これこそ、データから最大限の情報を取り出すもの、つまりデータに最も近い測度の算出法で、データ解析の目的を達成してくれる。

これに対して、リッカート得点は順序付けられた整数で、(1,0)で表されたデータとは関係なく、極端に言えば、名義尺度で示されたデータを全く関係の無い整数のセットに変換したものに過ぎない。換言すれば、名義尺度として表現されたデータの完全情報とリッカート得点に変えられたデータ行列とは無関係。さらにリッカート得点はデータから線型の情報を取り出そうとするが、この限られた目的さへ単調回帰に比べると、はなはだ効率が悪い。

1.9. データへの回帰による測度は間隔尺度

さて、名義尺度として表現されたデータへの回帰として算出する測度（カテゴリーの重み、被験者の得点）は、手元にあるデータを記述する最適の数量で様々な利点をもつが、測度水準は間隔尺度にとどまる。つまり、(1,0) のデータには原点に関する情報がなく、数量化による測度にも絶対原点がない。したがって測度間の割り算には意味が無い。幸い間隔尺度が与えられた時、原点に左右されない統計量の一つに相関係数がある。これにより我々が通常集めるデータには驚くほど沢山の情報が含まれていることを観察しよう。

2. 第二部 データの全情報とその解析

2.1. 数値例

一例によりデータ解析の目的が果されるようにデータの全情報を相関の統計量で記述してみよう。例題は Nishisato (2007) から借りる。データは次の六つの多肢選択質問に対する応答である。

問 1: 血圧は? (1 = 低, 2 = 中, 3 = 高)

問 2: 頭痛は? (1 = まれ, 2 = 偶に, 3 = しばしば)

問 3: 年齢は? (1 = 若い, 2 = 中年, 3 = 老年)

問 4: 不安度は? (1 = 低, 2 = 中, 3 = 高)

問 5: 体重は? (1 = 軽い, 2 = 中程度, 3 = 重い)

問 6: 身長は? (1 = 低い, 2 = 平均なみ, 3 = 高い)

どの質問の選択肢にも順序があるので、まずリッカート尺度でデータを表 4 のように示そう。

多くの研究では、このデータが解析の対象になる。その結果は、全情報を無理やり「線型のフィルター」にかけてから解析することになり、ほかの多くの情報を捨ててしまうので、これは避けたい。

2.2. リッカート法による線型相関

上の得点表からピアソンの相関行列を求めると表 5 の通り。

通常の研究は、この相関行列を主成分分析にかけて 6 個の主成分を抽出、これをもってデータの多次元解析としている。しかし、これは線型関係だけの多次元解析で、しかもリッカート得点が強制的に等間隔を用いることから、データの線形情報を忠実に捉えていない可能性も強い。それは名義尺度で示されるデータに比べると、極めて些少な情報の解析をすることになる。リッカート得点の解析が、どれだけ本来のデータ

表 4. リッカート尺度によるデータの表示

被験者	質問					
	1	2	3	4	5	6
1	1	3	3	3	1	1
2	1	3	1	3	2	3
3	3	3	3	3	1	3
4	3	3	3	3	1	1
5	2	1	2	3	3	2
6	2	1	2	3	3	1
7	2	2	2	1	1	3
8	1	3	1	3	1	3
9	2	2	2	1	1	2
10	1	3	2	2	1	3
11	2	1	1	3	2	2
12	2	2	3	3	2	2
13	3	3	3	3	3	1
14	1	3	1	2	1	1
15	3	3	3	3	1	2

表 5. リッカート尺度から求めた相関係数

	1.00						「リッカート得点」
血圧	1.00						
頭痛	-.06	1.00					
年齢	.66	.23	1.00				
不安	.18	.21	.22	1.00			
体重	.17	-.58	-.02	.26	1.00		
身長	-.21	.10	-.30	-.23	-.31	1.00	

の情報を結果に反映しているかは不明である。

2.3. 単調回帰による相関

リッカート得点は、なぜ反応カテゴリーを等間隔とするのか? 等間隔という制限を崩し、カテゴリー間には順序関係があるとしてデータへの単調回帰を考えれば、若干「データの情報を用いる」ので、リッカート得点を使うよりは、「データの解析」としては論理的である。この場合、各質問の 3 個の得点（重み）が未知数で、順位関係があるという拘束条件下で、相関を最大にするような総計 18 個の未知数を求めてから相関係数を計算する。単調回帰を用いて、相関係数を求めると表 6 の通りである。

単調回帰による相関行列の多次元解析のほうが、リッカート得点のものより正当化する根拠が遙かに強いが、より手が込むので、この解析は余り見かけない。しかし単調回帰は、データの情報を見ながら行うデータ解

表 6. 単調回帰得点による相関表

血圧	1.00	「単調回帰得点」				
頭痛	.49	1.00				
年齢	.74	.39	1.00			
不安	.40	.40	.54	1.00		
体重	.30	.33	.08	-.36	1.00	
身長	.21	.29	.29	.26	.30	1.00

析で、データを無視するリッカート得点の解析より、一段と論理的である。

2.4. 反応カテゴリーの順位付けは正当か？

しかし、何故カテゴリー間に順位の拘束条件を付けなくてはならないのか？ この疑問に対する圧倒的な応えは「反応カテゴリーに順序関係が有るから、それに対応する測度にも順序関係を」であろう。非常に興味深いことは、この応えが、多くの研究者の認めるところで、順位の拘束条件付きのスケージングが、しばしば研究の課題になってきたことである。行動科学における方法論の研究としては面白いが、その実用性は極めて限られている。何故なら、行動科学で「順序関係を測度の生成過程に条件として」課する必要があるというケースは意外に少ないからである。

反応カテゴリーに順位を想定することに関しては、さらに潜在的に二変量正規分布を仮定して求める多分相関係数 (polychoric correlation) があり、多分相関係数行列の因子分析を考える人もあろう。しかし、潜在構造として正規分布を考える限り、結果は線型解析に終わる。さらに、二変量正規分布の仮定も探索的データ解析では、その妥当性を疑うケースが多いことと思う。

測度は出来るだけデータに忠実であるべきことを思い出そう。そうすると順位の条件は必ずしも正当化できない。先にあげた年齢と体力の関係で、年齢（若いから年寄りまで）と体力（弱いから強いまで）に順位の拘束条件をつけて求めた測度では、逆 U 字関係（体力は小さい時には少なく、年と共に増し、さらに年をとると下降する）を捉えることができなくなる。つまり、データを忠実に記述できない。これは一例に過ぎないが、同じような例は行動科学が取り扱うデータでは後を絶たない。それを考えると、線型関係と順位の拘束条件をつけて測度を求めることは賢明ではない。それはデータ解析の目的に真っ向から反することになる。

以上の説明で、リッカート得点が行動科学のデータ

解析には役立つところか、むしろ弊害となること、そして妥協案としての単調回帰で選択肢の最適値を求めることも適案ではないことが明らかである。データの表示に名義尺度を選んだことと同じ理由で、解析も出来るだけ拘束条件を使わないことが、出来るだけ沢山の情報を取り出そうとするデータ解析には必要なことを理解して欲しい。

2.5. 名義尺度で示されたデータへの回帰としての測度と相関

結論は、データを拘束条件の一切無い名義尺度で示し、そのデータへの回帰として測度（選択肢の値、被験者の得点）を求めるのが、データの情報を最大限解析の対象とすることになる。このデータへの回帰として測度を割り出すという考えが、双対尺度法 (Nishisato, 1980) の出発点であり、数量化理論が目的とするところである。例題の場合、数量化理論を用いると、12 の相関行列が得られ、それがデータの総情報の記述になる（さらに各相関行列を主成分分析にかけることも出来る）。そのうちから最も情報豊かな二成分（第一、第二成分）の相関表を示すと表 7 の通りである。

数量化で、このような相関表が 12 個出るということだけでも、相関表が一つしか出てこないリッカート得点の解析や選択肢に順位をつけた解析より、はるかに多くの情報が解析の対象になっているのがわかる。12 個の相関表の解釈は、取り上げないが、数量化による解析は変数間の非線型関係も捉えていることを述べておこう。例えば、リッカート得点の場合の血圧と頭痛の相関が -0.06 で殆ど 0 に近いのに対して、数量化の第一成分では、その相関値が 0.99 まで上がり、「血圧が高くても、低くても頭痛があり、血圧が正常の時頭痛が少ない」という非線型の関係を捉えたからである。ここに、名義尺度で表現されたデータへの回帰として測度を求めることの重要性が明らかになろう。

2.6. ピアソンの相関と数量化の相関

線型、非線型に関する誤解を避けるため、若干の説明をしよう。それは相関係数の解釈である。ピアソン (Pearson, 1906) は彼の係数を正規相関 (normal correlation) と呼んでいることから、二変量正規分布を考えていたに違いない。この場合、二変数に線形関係があると相関は 1、関係がランダムである時には 0 と言うことになる。行動科学では、多くの場合二変量正規分布の仮定が当てはまらなくても、ピアソンの相関を

表 7. 数量化による第一成分と第二成分から得られた相関表

	「第一成分」							「第二成分」					
血圧	1.00						1.00						
頭痛	.99	1.00					-.06	1.00					
年齢	.60	.58	1.00				.59	-.31	1.00				
不安	.47	.52	.67	1.00			.07	.35	.35	1.00			
体重	.43	.39	.08	-.33	1.00		.28	.62	-.01	.19	1.00		
身長	.56	.57	.13	.19	.20	1.00	.31	.29	.32	.17	.38	1.00	

計算するので相関 0 の定義があいまいになる。その一例として、変数間の関係が非線形で U 字関係でも相関が 0 になる。これはランダムな関係ではない、相関の正当な解釈には正規分布が仮定されていなくてはならない。第二の点は、数量化理論の場合も、相関係数は線形関係をしめすが、それは非線型変換をした変量（測度）の間での線形関係である。つまり、線型相関が最大になるように、測度の非線型変換を求めるのが数量化の仕事である。端的に言うと、変数 x と変数 y がある場合、関数 $f(x)$ と $g(y)$ の線型相関が最大になるような関数 f と g を求めるのである。これが測度をデータに回帰させるという意味で、その時の変換値こそ、我々が求めようとしている測度である。つまり我々が対処するのは線型相関で、数量化の仕事は、その相関が最大になるような非線型変換を求めることである。

さて、12 の相関行列がデータから得られたとしても、すべてを解析することは大変だ。そこで相関が平均して最大値を示す第一成分の相関行列を解析すればよいのではないかと、という提案が考えられる。しかし、これには注意が必要だ。何故なら、数量化で得られる成分ごとの相関係数と言うのは、データ全体で得られる最大の相関値で、その値は、どのような変数がデータに含まれるかに依存する。例えば、上例のデータセットから年齢を取り除くと、血圧と頭痛の相関値が変わってしまう。それでは、数量化において、ほかの変数とは独立な血圧と頭痛の相関の推定値は、どうして求めれば良いのか？ データセットの他の変数に依存しない相関を知りたい。

2.7. 多次元空間の変数間の関係：クラメールの連関係数

通常のデータ解析では、二変数間の相関係数は、二変数のデータから直接計算できるので、「他の変数に依存しない」ということなど、考える必要がない。しかし、数量化の場合、例題では 12 次元空間に変数の情報が

表 8. クラメールの連関係数

	「クラメールの連関係数」					
血圧	1.00					
頭痛	.71	1.00				
年齢	.63	.45	1.00			
不安	.44	.56	.55	1.00		
体重	.37	.50	.40	.31	1.00	
身長	.46	.45	.25	.20	.40	1.00

分布しており、データセットにどのような変数が含まれているかにより主軸空間が決まり、他の変数に依存しない血圧と頭痛の相関は簡単に求まらない。我々が今求めようとしているのは、12 の相関行列から求める相関係数で、そのような係数として Nishisato (2006) が多面体間の相関係数 ν (ニュー) を提唱している。その計算は強制分類法 (Nishisato, 1984; Nishisato and Baba, 1999) を介し、一変数をもう一つの変数の空間に射影した場合の情報量を両空間が一致した場合の情報量で割り、その平方根を求めるというものである。紙面の関係でその過程は記述しないが、幸い Nishisato (2007) が、相関 ν はクラメールの連関係数 (Cramér, 1946) に一致することを証明した。従って本文では相関 ν の代わりに、クラメールの連関係数を、データに含まれる他の変数には左右されない変数間の多次元相関として紹介しよう。表 8 はクラメールの連関係表である。

これまでの論旨により、クラメールの連関係数とは、線型、非線型などあらゆる形の関数関係を総合した多次元空間の統計量であることがわかる。従って、その値を見ただけでは簡単に説明出来ない。その解釈には、多次元に分布する測度を吟味しなくてはならないという解釈の難しい統計量である。行動科学では、クラメールの統計量のこのような姿が理解されていないし、クラメールの連関係数を用いた研究論文も少ない。数量化で得られるこの統計量をデータ解析に如何に効果的に採用するかは、数量化理論ではいまだ研究されてい

表 9. 各成分と変数の相関の二乗値

成分	質問項目						平均値 (固有値)
	1	2	3	4	5	6	
1	.92	.93	.54	.41	.11	.36	.5441
2	.38	.34	.22	.29	.52	.49	.3747
3	.40	.48	.55	.48	.18	.01	.3455
4	.02	.03	.40	.36	.83	.21	.3070
5	.02	.01	.03	.31	.06	.35	.1307
6	.10	.06	.03	.02	.02	.49	.1202
7	.04	.08	.13	.06	.12	.03	.0750
8	.05	.04	.06	.06	.07	.00	.0473
9	.04	.01	.00	.03	.05	.05	.0316
10	.01	.02	.03	.01	.03	.01	.0173
11	.00	.01	.02	.01	.00	.00	.0066
12	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.0000
計	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	12.00

ないようである。これは将来の研究に託すが、様々な研究課題が出てきそうなトピックである。

2.8. 多次元空間における変数の情報分布

ところで、12 の成分にはデータの情報がどのように分布しているのか？ この問いに答えるのに、数量化で算出する測度は間隔尺度である事を考え、再び統計量として相関係数を選ぼう。「各成分と変数間の相関の二乗値」を各変数の各次元における情報量と定義しよう。そうすると例題の各変数の 12 次元の情報分布は表 9 の通りになる。

この表は、情報の分布を示すもので、どのような関係（線型、非線型）が捉えられたかと言う情報は各成分について、変数の測度（重み）を吟味しなくては分からない。例えば、第一成分に大きな寄与をしている血圧 (0.92) と頭痛 (0.93) の関係は、先にみたように非線形で、血圧が高いとき、低い時頭痛を訴え、血圧が中度のときは頭痛が少ないという関係で、その関係が際立っていることから第一成分でとらえられている。先に触れた強制分類法 (Nishisato, 1984) と言うのは、例えば、項目 1 を基準にした場合、上の情報分布は、項目 1 では成分 1 と 2 で情報値が共に 1、他の 10 成分では 0 になるような情報分布を作り出すことで、それに対応する他の項目の成分 1 と 2 の情報量が係数 ρ を計算する為の統計量となる。

次に、注目すべきは、各項目が 12 次元空間に寄与する情報の大きさが、選択肢の数から 1 を引いた数値 2 になっていることである。つまり、選択肢の数が同じ質問は全空間に同じ分だけ寄与すること、そして選択肢の数が多き質問は、少ない質問より全空間により多く寄与するということである。これは、数量化の場合、残念ながら、項目の絶対貢献度を求める為の十分な情報がデータに含まれていないことを示唆している。つまり、選択肢の数の同じ項目では、どれがより情報回収に貢献しているかを判断するだけの情報が含まれていない。数学的にはランク落ちのデータと言うことになる。

この統計量のもう一つの興味深い特徴は、各成分に関して全項目の統計量の平均値が数量化の固有値、特異値の二乗値に等しいことである。これらの関係から、項目と成分の相関の二乗という統計量はデータ解析に便利で大きな役割を果たす。

2.9. 多次元空間のデータ解析

現代科学の礎として“Principle of Parsimony”が唱えられ、データ解析でも、最小二乗法が多くの方面で使われ、主成分分析や因子分析では最初の 2 因子、あるいは 3 因子でデータを解釈し、それで良いとすることが多い。しかし、そのようにして、平均的統計量で、あるいは解析空間を小さくしてデータを解釈することは妥当であろうか？ 線型関係の多次元解析に比べて、線型と非線型を共にした数量化の多次元解析には大きな空間が必要で、解釈だけに小次元を使うということには抵抗感はないだろうか？ 我々の例ではリッカート得点解析の一個の相関行列の解析と名義尺度表解析の 12 個の相関行列の違いを前に、解釈だけ小次元でというのは、どういうものであろうか？ 本論では、多次元空間に存在する変数は、多次元空間の中で捉えるべきだという立場を薦めたい。これは全情報解析 Total Information Analysis (別名、総合的対尺尺度法 Comprehensive Dual Scaling) (Nishisato and Clavel, 2004) 提唱の立場であり、これに関しては他の文献も参考にしてほしい (Nishisato and Clavel, 2008, 2012; Clavel and Nishisato, 2008, 2012; Nishisato, 2014)。

現実には、残念ながら、3 次元空間以上の空間を視覚的に表現できない。この制限を乗り越え、数学的にとり上げた研究で有名なのは「アンドリュース曲線」(Andrews' curves)であろう (Andrews, 1972)。彼は、現在トロント大学の名誉教授である。彼の方法は、各

成分を三角関数に変換し、その和として、各変数を一個の曲線に纏めるもので、例題の場合は各変数が 12 の三角関数の和となる。フーリエ解析のように曲線のグラフがアウトプットである。彼のアイデアは素晴らしいが、実際の研究者は、果たしてそれを有効に使えるだろうか？多くの研究者が、その曲線を使ってきたが、残念ながら筆者の不勉強により、彼の方法がどれだけデータ解析に貢献したかが分からない。

2.10. 行空間と列空間を包括する二重多次元空間

数量化には長年未解決問題となっている行空間と列空間の同時グラフ化の問題がある。これは、数量化で抽出されたデータ行列の行の測度と列の測度が一般には同じユークリッド空間に布置しないにも関わらず、それらを同じグラフに示すのが習わしとなってしまう（いわゆる symmetric scaling, French plot）。そのためグラフ上の行と列変数の距離を正確に表現できない。従って、行変数と列変数のグラフ上の距離の解釈には「おおよそ」と言う代名詞が付されてきた。なぜ誤ったグラフ法を使用してきたのかといえ、それは簡単に誰でも使えるからであろう。しかし、これは無視できない問題である。

この問題は極めて重要なのに、それを解く Nishisato (1980) の議論が無視されてきた。彼の例を用いて解説しよう。全くの人工データであるが、Q1:「タバコをすうか否か? (イエス, ノー)」, Q2:「コーヒーより紅茶を好むか? (イエス, 時による (?), ノー)」に対し、13 人からデータは分割表 10 の通り。

表 10. 2×3 の分割表

		Q2		
		イエス	?	ノー
Q1	イエス	3	2	1
	ノー	1	2	4

この分割表からは数量化により 1 個の成分が抽出され、カテゴリーに対する重み (測度) は、次の通り。

Q1: イエス = 1.08 Q2: イエス = 1.26

Q1: ノー = -0.92 Q2: ? = 0.17

Q2: ノー = -1.14

これより、タバコを吸う人はコーヒーを好み、吸わない人は紅茶という関係が出てくる。データと最適の測度の間には、双対の関係 (dual relations, Nishisato, 1980) がある。いま 2×3 のデータ行列を $\mathbf{F}$, 行の周

表 11. 反応パターンによる表現

被験者	Q1 (タバコ)		Q2 (コーヒー, 紅茶)		
	イエス	ノー	イエス	?	ノー
1	1	0	1	0	0
2	1	0	1	0	0
3	1	0	1	0	0
4	1	0	0	1	0
5	1	0	0	1	0
6	1	0	0	0	1
7	0	1	1	0	0
8	0	1	0	1	0
・	・	・	・	・	・
・	・	・	・	・	・
13	0	1	0	0	1

辺度数, 列の周辺度数を対角項とする対角行列をそれぞれ $\mathbf{D}_r, \mathbf{D}_c$ で示し, 行と列の最適重みのベクトルを $\mathbf{y}, \mathbf{x}$, 特異値分解の特異値を ρ でしめすと, 双対関係は次式で示される。

$$\rho \mathbf{y} = \mathbf{D}_r^{-1} \mathbf{F} \mathbf{x}; \quad \rho \mathbf{x} = \mathbf{D}_c^{-1} \mathbf{F} \mathbf{y}$$

つまり, 行の重みは列の平均値かける特異値, 列の重みは行の平均値かける特異値で, 特異値が 1 でない限り, 行の重みと列の重みは同一空間にない。従って両者を同一空間に置くには, 片方の測度を他方の測度空間に射影することが必要であるが, そのための射影子が特異値である。これから, 一成分の行空間と列空間の隔たりの角度 θ は

$$\theta = \cos^{-1} \rho$$

となることがわかる。例題の場合, ずれの角度は 62 度, 従って, 行 (Q1) の重みと列 (Q2) の重みを同じ線グラフに示すのは明らかに誤りである。さらに空間の説明として Nishisato (1980) は, 上の分割表を表 11 のように 13×10 (被験者 $\times$ 選択肢) の形に表現している。

この表では 5 個の選択肢の重み (先の $\mathbf{y}$ と $\mathbf{x}$) は共に列に属するので同一空間にプロットできる (Young and Householder, 1938)。

同じデータであるにもかかわらず, 両者の解析には, 大きな違いがある。前者からは, 一成分が抽出され, 行と列は同一空間に布置しなかった, 後者では同じ 5 個の測度が同一空間に布置するという結論であった。何

故かという、後者の場合、空間の次元数が大きいからである。つまり、前者の分割表の行と列の重みを同じ空間に布置させるためには、次元の拡張が必要だということである。

時は移り、著名な研究者の Carroll, Green, Schaffer が、分割表を反応パタン (1,0) の形に表現すれば、分割表の行と列が、ともに上の例のように列に書き換えられるので、後者を解析すれば、行と列を同じ空間に布置させることができるとして、これを CGS スケーリング (Carroll, Green and Schaffer, 1986) として提唱した。これを Greenacre (1989) が強硬に批判し、CGS プロットの提唱者を沈黙させた。その時筆者は、CGS スケーリングと批判の論文が出たジャーナルに「双方ともある程度正しい」として和解をもとめたが、編集者は、ことは解決したとして、筆者の論文を審査にも出さず棄却し、Greenacre に軍杯を上げた。編集者は問題を理解できず筆者の論文を棄却したのである。空間を一次元に限るなら、Greenacre が、空間を二次元に拡張するなら Carroll, Green, Schaffer が正しい。しかし、次元の拡張は誰も述べていないので、非は双方にある。しかし、この問題は 1980 年に解決したのである。

行変数を列変数の空間に射影してグラフを書くことは、数学的には正しい。しかし、射影値のノルムは常に小さく、両者間の比較にはあまり役立たない。不正確でもフレンチプロットで、というのが現状で誠に残念である。

それでは、話をもっと一般的なケースに関して考えよう。分割表の数量化により、すべての成分を抽出したとしよう。それら全成分の座標から計算する行間の距離行列を $\mathbf{D}(\mathbf{xx})$ 、列間の距離行列を $\mathbf{D}(\mathbf{yy})$ で示し、これらをセット内の距離と呼ぶ。そして、行と列の間の距離行列を $\mathbf{D}(\mathbf{xy})$ 、 $\mathbf{D}(\mathbf{yx})$ で示し、これをセット間の距離と呼ぶ。セット間の距離は、各軸のずれの角度が特異値から計算できるので、余弦の法則を用いて計算できる (Nishisato and Clavel, 2010)。これらから、次の距離の大行列を構成する。

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}(\mathbf{xx}) & \mathbf{D}(\mathbf{xy}) \\ \mathbf{D}(\mathbf{yx}) & \mathbf{D}(\mathbf{yy}) \end{bmatrix}$$

この距離行列は、分割表の行内、列内、行列内すべての距離関係の情報を担っている。しかも、それは多次元空間における距離関係である。この距離行列を分解すれば、行空間と列空間の隔たりの問題は出てこない。

何故なら、変数すべてを同一空間で評価しているからである。大きな違いは、通常の数量化に用いる空間の次元の二倍の次元を解析の対象としていることである。いくなれば、行空間と列空間のずれの問題を解くには、空間の次元数を二倍にしなくてはならない “doubled multidimensional space” (Nishisato, 2014) という考えである。事実、 $\mathbf{D}$ のランクは元のデータの 2 倍になっている。

ここで、空間のずれの問題を解決するために、次元数を増やさなくてはならないということ益々 principle of parsimony の考えから遠ざかる。そのように多くの次元に分布するデータをどのようにして解析すべきか、全情報解析 (Nishisato and Clavel, 2010) では、距離行列の特異値分解ではなく、クラスター分析を奨励している。つまり、変数関係にゆがみを導入しない全空間において、変数がどのようなクラスターを構成しているか、を調べよということである。その文献では、一例として k-means clustering を述べているが、ほかのクラスター分析も提唱されている (Nishisato, 2012, 2014)。

これまでの研究を見ると、たとえ線形関係の多次元解析にとどまるとはいえ、多くの場合、変数間だけの相関の因子分析、被験者間だけの相関の因子分析というように、行間か、列間だけの多次元解析がほとんどであろう。しかし、データ解析を用いた多くの研究で知りたいことは、被験者と反応項目の関係がどのように多次元空間で記述できるか、ということではないであろうか？ 因子分析で、被験者の因子得点を推定するが、推定値は被験者 $\times$ 項目という限られたデータ行列からの射影値で因子得点のノルムが小さく、それを因子負荷量と同じグラフで比較するのには問題がある。むしろ (被験者, 項目) $\times$ (被験者, 項目) から得られる大距離行列の解析に焦点が向けられるべきである。基本的な考えは、全くゆがみの無い 2 重多次元空間で、被験者、選択肢がどのようなクラスターを構成しているかを探そうということである。

2.11. 結語

最近の行動計量学、社会科学の論文には高度の数学を用いたものが目に付く。問題意識はどうであろうか？ Nishisato (1980) が用いた双対式は、誰もが用いる特異値分解の一つの表現法で、双対式として捉えることにより、空間の隔たりの問題が浮かび上がっている。その本で用いられたもう一つの特異値分解の表現法は、

行 i 列 j の観測値を特異値, 行, 列の最適の重みで示す次の式で, この表現法により観測値の近似式が考え出された.

$$f_{ij} = \frac{f_i f_j}{f_t} 1 + \rho_1 y_1 x_1 + \rho_2 y_2 x_2 + \cdots + \rho_k y_k x_k$$

空間の隔たり, 近似式など, 特異値分解の式に没頭していれば見えない問題ではないかと思う.

1936-1950 年に出たサイコメトリカの論文には, 今でも我々の心を揺さぶるような素晴らしい研究が見られる。「原著を読み」という恩師の言葉は今でも生きている. 本文は, 半世紀も昔に語られた問題を再訪し, そこから新しい動きを垣間見た. その意味では, 数学の応用以前の問題が主となってしまい申し訳ない. これまで, 第一線の研究者から, 「そんな細かいことを言っても, 実際には何の役にも立たない」と何回も言われてきたが, 「実用上の便利さ」のとりこになり, 「複雑なデータの構造」を棚に上げることだけはしたくない. あえて現在の行動科学を支配している Principle of parsimony には眼をつぶる. 実際の我々のデータを傷つけないで記述するには, 「名義尺度を用いてデータを表現し, それを最適に説明する測度を割り出すには十分な多次元空間を用い, 行と列の変数を同一空間で見ることが, データ解析の本分である」という自論を強調した. 高度の数学が本文でとりあげた 2 重多次元空間における複雑なデータ解析に貢献してくれることは間違いない. 名義尺度で記述されたデータは, 現時点では, 手の届かないほど複雑な構造で, 数学を利用しなくては, 我々の理解できるデータ解析に到達できない. 豊かな情報がそこにある. 複雑だからといって, 諦めるとか, データの情報を損なうような簡便法を用いることは避けたい. 一番の願いは, 筆者が 1980 年に出版した時とは変わらない. 探索的データ解析には, リッカート尺度はそのままデータ解析にかけるものではなく, データの記録手段としてだけ用い, その先を数量化の技術にゆだね, 一歩先に進んで欲しい. 本文ではデータ解析の第一歩として往年の社会科学の研究法では必ず検討された測度の問題を再考察した. 初歩的な議論ではあるが, 測度の考察の重要性は否めない. 妥当な解析結果を導くための第一歩であると考えている.

最後に, この度のシンポジウムで, 雄山真弓氏の「ゆらぎの心理学」に心を打たれた. カオス理論の非線型数学と数量化の非線型解析を心に, 「非線形の時代」を身近に感じたのである.

謝 辞

担当委員千野直仁教授と二人の査読者から大変有益, かつ建設的なコメントがあり, 原稿が大幅に改善されました. ここに御礼申し上げます.

参 考 文 献

- Andrews, D. (1972). Plots of high dimensional data. *Biometrika*, **28**, 125-136.
- Benzécri, J.P. et al. (1973). *L'analyse des données: II. L'analyse des correspondances*. Paris: Dunod.
- Bock, R.D. (1960). Methods and applications of optimal scaling. *The University of North Carolina Psychometric Laboratory Research Memorandum*, No.25.
- Carroll, J.D., Green, P. E. and Schaffer, C.M. (1986). Interpoint distance comparison in correspondence analysis. *Journal of Marketing Research*, **23**, 271-280.
- Clavel, J.G. and Nishisato, S. (2008). Joint analysis of within-set and between-set distances. In K. Shigemasa, A. Okada, T. Imaizumi and T. Hoshino (eds.), *New trends in psychometrics*. Universal Academic Press, Inc. 41-50.
- Clavel, J.G. and Nishisato, S. (2012). Reduced versus complete space configurations in total information analysis. In W. Gaul, A. Geyer-Schultz, L. Schmidt-Thieme and J. Kunze (eds.), *Challenges at the interface of data analysis, computer science and optimization*. Springer, 91-99.
- Cramér, H. (1946). *Mathematical methods of statistics*. Princeton University Press.
- de Leeuw, J. (1973). Canonical analysis of categorical data. Doctoral thesis. Leiden University, the Netherlands.
- Fisher, R.A. (1940). The precision of discriminant analysis. *Annals of Eugenics*, **10**, 422-429.
- Gauch, H.G. (1982). *Multivariate analysis of community ecology*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Gifi, A. (1990). *Nonlinear multivariate analysis*. New York: Wiley.
- Greenacre, M.J. (1984). *Theory and applications of correspondence analysis*. London: Academic Press.
- Greenacre, M.J. (1989). The Carroll-Green-Schaffer scaling in correspondence analysis: A theoretical and empirical appraisal. *Journal of Marketing Research*, **26**, 358-365.
- Greenacre, M.J. (1993). *Correspondence analysis in practice*. London: Academic Press.
- Greenacre, M.J. and Blasius, J. (eds.) (1994). *Correspondence analysis in the social sciences*. London: Academic Press.

- Greenacre, M.J. and Blasius, J. (eds.) (2006). *Multiple correspondence analysis and related methods*. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC.
- Guttman, L. (1941). The quantification of a class of attributes: A theory and method of scale construction. In the Committee on Social Adjustment (ed.), *The prediction of personal adjustment*. New York: The Social Science Research Council, 319–348.
- Guttman, L. (1946). An approach for quantifying paired comparisons and rank order. *Annals of Mathematical Statistics*, **17**, 144–163.
- Hand, D.J. (1996). Statistics and the theory of measurement. *Journal of the Royal Statistical Society, A*, **3**, 445–492.
- Hand, D.J. (2004). *Measurement theory and practice: The world through quantification*. London: Arnold.
- Hand, D.J. (2006). Review of S. Nishisato “Multidimensional nonlinear descriptive analysis” (Chapman & Hall/CRC, 2007). *International Statistical Institute (ISI) On-line Short Book Review*.
- Hayashi, C. (1950). On the quantification of qualitative data from the mathematico-statistical point of view: *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **2**, 35–47.
- 林知己夫 (1974). 数量化の方法. 東洋経済社.
- 林知己夫 (1992). 数量化理論と方法. 朝倉書店.
- Hill, M. (1973). Reciprocal averaging: An eigenvector method of ordination. *Journal of Ecology*, **61**, 237–249.
- Hirschfeld, H.O. (1935). A connection between correlation and contingency. *Cambridge Philosophical Society Proceedings*, **31**, 520–524.
- Horst, P. (1935). Measuring complex attitudes. *Journal of Social Psychology*, **6**, 369–374.
- 岩坪秀一 (1987). 数量化の基礎. 朝倉書店.
- 小林龍一 (1981). 数量化理論入門. 日科技連.
- 駒沢勉 (1978). 多元的データの分析の基礎. 朝倉書店.
- 駒沢勉・林知己夫 (1982). 数量化理論とデータ処理. 朝倉書店.
- Lebart, L., Morineau, A. and Tabard, N. (1977). *Techniques de la description statistiques: Méthodes et logiciels pour l'analyse des grands tableaux*. Paris: Dunod.
- LeRoux, B. and Rouanet, H. (2004). *Geometric data analysis: From correspondence analysis to structured data analysis*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Likert, R. (1932). A technique for the measurement of attitudes. *Archives of Psychology*, No.140, 44–53.
- Maung, K. (1941). Measurement of association in contingency tables with special reference to the pigmentation of hair and eye colours of Scottish children. *Annals of Eugenics*, **11**, 64–76.
- Michell, J. (2009). Invalidity in validity. In R.W. Lissitz (ed.), *The concept of validity: Revisions, new directions, and applications*. Charlotte, N.C.: Information Age Publishing, 111–133.
- Nishisato, S. (1980). *Analysis of categorical data: Dual scaling and its applications*. University of Toronto Press.
- 西里静彦 (1982). 質的データの数量化：双対尺度法とその応用. 朝倉書店. Toronto: University of Toronto Press.
- Nishisato, S. (1984). Forced classification. A simple application of a quantification technique. *Psychometrika*, **49**, 25–36.
- Nishisato, S. (1994). *Elements of dual scaling: An introduction to practical data analysis*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Nishisato, S. (1996). Gleaning in the field of dual scaling. *Psychometrika*, **61**, 559–599.
- Nishisato, S. (1999). Data types and information: Beyond the current practice of data analysis. In R. Decker and W. Gaul (eds.), *Classification and information processing at the turn of the millennium*. (pp.40–51). Heidelberg: Springer-Verlag.
- Nishisato, S. (2006). Correlational structure of multiple-choice data as viewed from dual scaling. In M.J. Greenacre and J. Blasius (eds.), *Multiple correspondence analysis and related methods*. Chapter 6, 161–177. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC.
- Nishisato, S. (2007). *Multidimensional nonlinear descriptive analysis*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC.
- 西里静彦 (2010). 行動科学のためのデータ解析：情報把握に適した方法の利用. 培風館.
- 西里静彦 (2011). 測度のデータへの回帰による最適データの生成. データ分析の理論と応用. 第1巻, 第1号, 1–10.
- Nishisato, S. (2012). Reminiscence and a step forward. In W. Gaul, A. Geyer-Schulz, L. Schmidt-Thieme and J. Kunze (eds.), *Challenges at the interface of data analysis, computer science and optimization*. Springer-Verlag, 109–119.
- Nishisato, S. (2014). Structural representation of categorical data and cluster analysis through filters. In Gaul, W., A. Geyer-Schulz, Y. Baba and A. Okada (eds.), *German-Japanese interchange of data analysis results*. Springer, 81–90.
- Nishisato, S. and Baba, Y. (1999). On contingency, projection and forced classification of dual scaling. *Bahaviometrika*, **26**, 201–219.
- Nishisato, S. and Clavel, J.G. (2008). Interpreting data in reduced space: A case of what is not what in multidimensional analysis. In K. Shigemasa, A. Okada, T. Imaizumi and T. Hoshino (eds.), *New trends in psychometrics*. Universal academy press, 347–356.
- Nishisato, S. and Clavel, J.G. (2010). Total informa-

- tion analysis: Comprehensive dual scaling. *Behaviormetrika*, **37**, 15–32.
- 雄山真弓 (2012). 心の免疫力を高める「ゆらぎ」の心理学. 祥伝社.
- Ramensky, L.G. (1930). Zür Methodik der vergleichenden und Ordnung von Pflanzenlisten und anderen Objecten, die durch mehrere, verschiedenartig wirkende Factoren bestimmt werden. *Beitr. Biol. Pfl.*, **18**, 269–304.
- Richardson, M. and Kuder, G.F. (1933). Making a rating scale that measures. *Personnel Journal*, **12**, 36–40.
- Siegel, S. (1956). *Nonparametric statistics: For the behavioral sciences*. McGraw Hill.
- Stevens, S.S. (1951). Mathematics, measurement, and psychophysics. In S.S. Stevens (ed.), *Handbook of experimental psychology* (Chapter 1, pp.1–49). New York: Wiley.
- Suppes, P. and Zinnes, J.L. (1963). Basic measurement theory. In R.D. Luce, R.R. Bush and E. Galanter (eds.), *Handbook of mathematical psychology*, Volume 1, Chapter 1, 1–76.
- Takane, Y., Yanai, H. and Mayekawa, S. (1991). Relationships among several methods of linearly constrained correspondence analysis. *Psychometrika*, **56**, 667–684.
- Tenenhaus, M. and Young, F.W. (1985). An analysis and synthesis of multiple correspondence analysis, optimal scaling, dual scaling, homogeneity analysis and other methods for quantifying categorical data. *Psychometrika*, **50**, 91–119.
- Young, G. & Householder, A.S. (1938). Discussion of a set of points in terms of their mutual distances. *Psychometrika*, **3**, 19–22.

(2013年3月28日受付, 2014年6月29日最終修正)