多次元項目反応モデルにおけるプロクラステス回転を応用した 共通受検者による等化法の比較

沖 嘉訓, 前川 眞一

Comparison of Equating Methods for Multidimensional Item Response Theory
on Common Examinee Design with Factor Score Procrustes Rotation

Yoshinori OKI and Shin-ich MAYEKAWA

Multidimensional item response theory model (MIRT) is a sub-model of Item Response Theory (IRT). It assumes that multidimensional latent traits influence test item responses. Equating or linking, which calibrate the parameters of two or more tests, are critical to the application of IRT, because they allow for comparisons between test scores. However, little research has been conducted for MIRT equating, especially on the common examinee design. The present study describes three equating methods for MIRT, which utilizes rotation methods in factor analysis focusing on factor scores, by employing the common examinee design, and analyzes the characteristics of each method through computer simulations. The results of the simulations reveal that the Weighted Procrustes method is effective when correlations between equated scores of each dimension are expected to approximate the target ones.

Key words: IRT, MIRT, equating, linking, common examinee design, factor analysis, weighted Procrustes rotation

キーワード: 項目反応理論, 多次元項目反応モデル, 等化, 共通受検者, 因子分析, 重み付きプロクラステス回転

1. はじめに

項目反応理論(項目応答理論, Item Response Theory, e.g. Lord, 1980, 芝, 1991, 村木, 2011, 豊田, 2012, 加藤・山田・川端, 2014: 以下 IRT)は, テストを構成する各問題項目について, 受検者の能力と問題項目の特性の間にある種の確率的関数関係を仮定し, それによってテストの特性と同時に受検者の能力を推定していこうとする理論モデル(池田, 2001)であり, 個人の能力とテストの問題項目の特性を独立なものとして考え, 各問題項目の特性を受検者集団に依存しない形

で, また受検者の能力評価を問題項目の特性に依存しない形で捉える点に特徴がある(仁田・前川・柳本・前田・吉田・奈良・石田・福島・齋藤・福田・高久・麻生, 2005).

IRTには項目に対する回答の形式や, 受検者の能力特性と項目に対する反応の関係をどのように捉えるかということに対応して, いくつかの下位モデルが開発されている(e.g. van der Linden & Hambleton (Ed.), 1997). このうち多次元項目反応モデル(Multidimensional Item Response Theory Model, Reckase, 1985, Reckase & McKinley, 1991, Reckase, 2009: 以下 多次元 IRT)は, 項目に対する回答の背後に複数の能力の関与を想定し, 受検者を多次元の潜在空間における能力特性値ベクトルとして位置づけるモデルである.

Ackerman, Gierl & Walker (2005) や Yao & Boughton (2009) などが指摘するように, 多くのテストの回答の背後には多次元性が内在していると考え

東京工業大学大学院社会理工学研究科人間行動システム専攻

(Tokyo Institute of Technology)

連絡先: 〒152-8550 東京都目黒区大岡山 2-12-1

Tel/Fax: 03-5734-3242

E-mail: okiyoshinori@gmail.com

られる。たとえば学力テストにおいて、数学の問題の一部に文章題が含まれており、正答のために計算能力に加えて文章理解能力も必要とされるような場合には、回答の背後に多次元的能力特性を想定するのが自然である(孫, 1997)。また、性格検査において、測定対象の2つの性格特性に対応した短文を対にしてどちらが当てはまるかを問う形式や、複数の性格特性について自分ではまる順序を問う形式が利用されることがあるが、この場合は明らかに回答に複数の特性が同時に関与しており、多次元 IRT を利用することが妥当である(Brown & Maydeu-Olivares, 2010, Brown & Maydeu-Olivares, 2012)。

さて、IRT の重要な研究テーマの一つに複数のテストのスコアを同一の基準の上で比較可能とする等化法に関する研究があり、本邦においても積極的な研究が進められている(e.g. Arai & Mayekawa, 2011, 荒井・菊池・前川, 2013, 泉・山野井・山田・金森・対馬, 2012, 光永・前川, 2013, 光永・御園・水町, 2013)。多次元 IRT においても、等化に関する研究はやはり高い重要性をもつと考えられるが、その一方で Min (2007), Simon (2008) は多次元 IRT の等化法の研究が十分でないことを指摘している。

多次元 IRT の主な等化法には、対象となるテスト・フォームに共通して含まれる項目群である共通項目を利用する方法と、2つのテスト・フォームの両方を受検した共通受検者の能力特性値を利用する方法がある(Reckase, 2009)¹⁾。このうち、共通項目による等化については、1次元のIRTの場合の Stocking & Lord 法(Stocking & Lord, 1983)を多次元に拡張した方法(Oshima, Davey & Lee, 2000), Haebara 法(Haebara, 1980)を多次元に拡張した方法(Oshima, et al., 2000)などが提案されており、加えて多次元 IRT に固有の方法(Li & Lissitz, 2000, Min, 2007)も開発されている。もう一方の共通受検者による等化法に関する研究としては Hirsch によるもの(Hirsch, 1989)を挙げることができるが、その他にほとんど見あたらず、共通項目による等化法に関する研究に比べると非常に少ないのが現状である。

しかしながら、実際のテストの運用においては共通項目の項目特性値をテストフォーム間で近接させるこ

とよりも、共通受検者の能力特性値を近接させることの重要性のほうが高い場面もある。したがって、共通受検者による等化法を整備することの必要性は小さくないものと思われる。

ところで、多次元 IRT は項目反応が離散的な値を取る場合に対応した因子分析であると捉えることができる(Takane & Leeuw, 1987, Muraki & Carlson, 1995)。因子分析では通常、潜在的な因子と項目との関連性が興味を中心となることから、回転法は専ら因子負荷量に注目する形で構成されている。一方、多次元 IRT の共通受検者の能力特性値による等化は、因子分析の文脈では因子スコアに注目した回転に相当する。本研究では多次元 IRT の共通受検者の能力特性値による等化法として因子スコアに注目した回転法を示す。また、計算機を用いたシミュレーション的な実験を行って、その特徴を明らかにする。

2. 多次元項目反応モデル

回答データの形式や能力特性の各次元と項目への反応の関係をどのように捉えるかということに対応して、多次元 IRT にはいくつかの下位モデルが開発されている(e.g. 藤森, 1988, Reckase, 2009, 岡田, 2014)。このうち最もよく取り上げられ研究されているのは正誤2値データに対応した次の2パラメータ・ロジスティック補償型モデル(two-parameter logistic compensatory model, Reckase, 2009)であると思われる。本研究でも、このモデルについて検討する²⁾。

$$P(x_{ij} = 1 | a_j, d_j, \theta_i) = \frac{\exp(a_j^T \theta_i + d_j)}{1 + \exp(a_j^T \theta_i + d_j)} \quad (1)$$

上式で x_{ij} は項目 j について受検者 i が正解した場合に1、誤答の場合に0をとる2値の回答データである。また a_j は項目 j の各次元の識別力を縦に並べたベクトル、 d_j は項目 j の困難度に関連するパラメータ、 θ_i は受検者 i の各次元の能力特性値を縦に並べた能力特性値を表すベクトルである。

いま(1)式の指数関数の中の部分を取り出して $z = a_j^T \theta_i + d_j$ とし、これをテストを構成する項目および受検者についてまとめた次の行列について考える。

¹⁾ 他に Reckase (2009) では、ランダムサンプリングした受検者群の回答データを用いて共通項目や共通受検者のデータを利用せずに等化を行う方法が紹介されている。

²⁾ ただし、本研究で提案する等化法の適用可能範囲は2パラメータ・ロジスティック補償型モデルに限定されるものではなく、3パラメータ・モデル、正規累積モデルなど多くの補償型のモデルに適用可能である。

$$Z = \Theta A^T + \mathbf{1}_n \mathbf{d}^T. \quad (2)$$

ただし、上式右辺の Θ は θ_i^T を受検者数分縦に並べた $n \times m$ の行列、 A は $\mathbf{a}_j^T$ を項目数分縦に並べた $p \times m$ の行列、 $\mathbf{1}_n$ は 1 を n 個縦に並べた縦ベクトル、 $\mathbf{d}$ は d_j を項目数分縦に並べた要素数が p の縦ベクトルである。なお、 m は次元の数、 p はテストを構成する項目の数、 n は受検者数をそれぞれ表す。

ここで、(2) 式の Θ , A , $\mathbf{d}$ について、任意の正則な $m \times m$ の行列 W と要素数が m のベクトル $\mathbf{u}$ を利用して、それぞれ次のように変換することを考える。

$$\tilde{\Theta} = \Theta W + \mathbf{1}_n \mathbf{u}^T, \quad (3)$$

$$\tilde{A}^T = W^{-1} A^T, \quad (4)$$

$$\tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{d} - A(W^{-1})^T \mathbf{u}. \quad (5)$$

このとき、(2) 式の Θ , A , $\mathbf{d}$ をそれぞれ $\tilde{\Theta}$, $\tilde{A}$, $\tilde{\mathbf{d}}$ と入れ替えても

$$\begin{aligned} \tilde{Z} &= \tilde{\Theta} \tilde{A}^T + \mathbf{1}_n \tilde{\mathbf{d}}^T \\ &= (\Theta W + \mathbf{1}_n \mathbf{u}^T) W^{-1} A^T + \mathbf{1}_n [\mathbf{d} - A(W^{-1})^T \mathbf{u}]^T \\ &= \Theta A^T + \mathbf{1}_n \mathbf{d}^T \end{aligned}$$

となつて (2) 式に一致する。すなわち、2 パラメータ・ロジスティック補償型モデルの多次元 IRT では能力特性値 θ と項目パラメータ A , $\mathbf{d}$ の間に一種の不定性が存在し、能力特性値と項目パラメータの双方に上記のような変換を行なっても正答確率には影響を与えないことがわかる。

3. 共通受検者による等化

前述の不定性を利用することで、多次元 IRT の等化を行うことができる。等化の方法には共通項目による方法と共通受検者による方法がある (Reckase, 2009) が、ここでは共通受検者による等化について考える。同じ能力次元を測定する 2 つのテスト・フォーム³⁾について、両方に共通する受検者が存在し、各受検者の能力特性値がテスト・フォームを通じて変わらないことを仮定できる場合には、共通受検者のデータを利用して 2 つのテストを等化することができる。

等化先のテストにおける n 人分の受検者の能力特性

値の行列を Θ 、等化対象となるテストにおける同じ受検者群の能力特性値の行列を Θ_g と記すことにする。なお Θ_g の行および列は Θ とそれぞれ対応しているものとし、 Θ と Θ_g の関係に次式を仮定する。

$$\Theta = \Theta_g W_g + \mathbf{1}_n \mathbf{u}_g^T. \quad (6)$$

上式の $\mathbf{u}_g$ は Θ_g の位置の変換に対応するベクトル、 W_g は回転 (rotation)、伸縮 (dilation) の変換を表す行列である。以降簡単のために、 Θ と Θ_g は共に各列の平均が 0、分散が 1 に標準化されているものとする。

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}_g = 0,$$

$$\text{diag}(S) = \text{diag}(S_g) = I.$$

このとき $\mathbf{u}_g = 0$ である。ただし $\bar{\theta}$, $\bar{\theta}_g$ はそれぞれ θ , θ_g の平均、 S , S_g はそれぞれ θ と θ_g の分散共分散行列を表す。この場合、等化の問題は等化後の θ_g の各次元の分散が 1 という制約条件下で Θ と Θ_g を一致に近づけるような (6) 式の W_g を求めることであり、次のように定式化できる。

$$\min f = \frac{1}{2} \text{tr} \left[(\Theta - \Theta_g W_g)^T (\Theta - \Theta_g W_g) \right] \quad (7)$$

$$\text{s.t. } \text{diag}(W_g^T S_g W_g) = I. \quad (8)$$

W_g が得られれば (4) 式から項目パラメータである A についても等化後の値を得ることができる。

ところで (2) 式の A を因子負荷量行列、 Θ を因子スコア行列とした因子分析モデルと見なした場合、多次元 IRT における等化の問題は因子分析における回転の問題として捉えることができる。本研究では (8) 式の制約下で (7) の問題の解を得る方法として、斜交プロクラステス回転による方法、Hirsch の方法 (Hirsch, 1989)、重み付き直交プロクラステス回転による方法の 3 つについて検討する。このうち Hirsch の方法は、先行研究によって示されたものであり、他の 2 つの方法は因子分析における因子負荷量に注目した回転法を多次元 IRT の等化に応用したものである。なお、通常因子分析では因子負荷量に注目して回転の問題が取り扱われるが、本研究で検討する共通受検者による等化は因子スコアに注目した回転に対応している。したがって、斜交プロクラステス回転と重み付きプロクラステス回転については、因子スコアに注目した回転の場合の解が必要となる。以下で、これらの解についても示す。

³⁾ 例えば英語のテストの場合、文法的知識と単語に関する知識の 2 つを同時に測定するためのテストが 2 つ存在するような場合

3.1. 斜交プロクラステス回転による方法 (OQ)

W_g を斜交回転行列であると考え、(8) 式の制約を考慮せずに (7) 式を最小化する W_g を求めると

$$W_g = \frac{1}{n} S_g^{-1} \Theta_g^T \Theta \quad (9)$$

となる。このとき、 Θ_g の変換後の分散共分散行列は、

$$\begin{aligned} W_g^T S_g W_g &= \left(\frac{1}{n} S_g^{-1} \Theta_g^T \Theta \right)^T S_g \left(\frac{1}{n} S_g^{-1} \Theta_g^T \Theta \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \Theta^T \Theta_g S_g^{-1} \Theta_g^T \Theta \end{aligned}$$

となるが、この対角成分は必ずしも 1 にはならず (8) 式の制約は満たされない。したがって変換後の各次元の分散が 1 となるよう次の調整を行う。

$$W_g^* = W_g [\text{diag}(W_g^T S_g W_g)]^{-1/2}.$$

因子分析における因子負荷量に注目した回転の場合、調整後の回転行列 W_g^* は一種の近似解であり、制約条件下で目的関数を厳密に最小化するものとはならない (市川, 2010) が、本研究で取り扱う能力特性値すなわち因子スコアに注目した回転の場合には、この方法で厳密な解が得られる。詳細な導出については付録に記す。

3.2. Hirsch の方法 (HM)

Hirsch (1989) は、次の方法で W_g を求めることを提案している。

まず Θ と Θ_g の基底を揃えるために Θ_g を

$$\Theta_g^* = \Theta_g P \Lambda^{-1/2} \Delta^{1/2} Q^T$$

と変換する。ただし Λ, P はそれぞれ S_g をスペクトル分解した場合の固有値を対角に並べた行列と、対応する固有ベクトルを順に並べた行列、 Δ, Q は S をスペクトル分解した場合の固有値を対角に並べた行列と固有ベクトルを順に並べた行列で、 $S_g = P \Lambda P^T$, $S = Q \Delta Q^T$, $P P^T = P^T P = Q^T Q = Q Q^T = I$ である。

つぎに、変換後の Θ_g^* に Θ をターゲットとした直交プロクラステス回転 (付録参照) を適用することによって回転行列 T を求める。 T が得られれば W_g は、

$$W_g = P \Lambda^{-1/2} \Delta^{1/2} Q^T T$$

によって求めることができる。このとき変換後の Θ_g の分散共分散行列は

$$W_g^T S_g W_g$$

$$\begin{aligned} &= (P \Lambda^{-1/2} \Delta^{1/2} Q^T T)^T S_g (P \Lambda^{-1/2} \Delta^{1/2} Q^T T) \\ &= T^T S T \end{aligned}$$

となる。もし $S = I$ であれば上式は $T^T S T = I$ となるが、 Θ の次元間には特別な場合を除いて相関があるため、一般には $S = I$ ではない。したがって Hirsch の方法によって等化を行った場合の変換後の能力特性値の分散共分散行列は、通常等化先の能力特性値のものとは一致しない。

3.3. 重み付きプロクラステス回転による方法 (WP)

Hirsch の方法では、 Θ と Θ_g の基底を一致させてから回転を行なっているが、別の方法として基底の変換と直交回転を同時に実現することが考えられる⁴⁾。この場合、等化は次の基準を最小化する直交回転行列 T を求めることに対応する。この方法では、後述するように変換後の Θ_g の分散共分散行列が Θ の分散共分散行列に必ず一致する。

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2} \text{tr} [(\Theta - \Theta_g W_g)^T (\Theta - \Theta_g W_g)] \quad (10) \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} [(\Theta - \Theta_g P \Lambda^{-1/2} T \Delta^{1/2} Q^T)^T \\ &\quad (\Theta - \Theta_g P \Lambda^{-1/2} T \Delta^{1/2} Q^T)]. \end{aligned}$$

ところで (10) 式は

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2} \text{tr} \left[\left(\Theta Q \Delta^{-1/2} - \Theta_g P \Lambda^{-1/2} T \right) (\Delta^{1/2} Q^T) \right. \\ &\quad \left. (Q \Delta^{1/2}) \left(\Theta Q \Delta^{-1/2} - \Theta_g P \Lambda^{-1/2} T \right)^T \right] \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} \left[(\Theta_L - \Theta_{gL} T) \Delta (\Theta_L - \Theta_{gL} T)^T \right] \end{aligned}$$

と変形することができる。ただし $\Theta_L = \Theta Q \Delta^{-1/2}$, $\Theta_{gL} = \Theta_g P \Lambda^{-1/2}$ とした。ここで Θ_L, Θ_{gL} は、それぞれ Θ と Θ_g を直交化した行列であると見なせるから、上式の基準を最小化する T は、 Θ と Θ_g をそれぞれ直交化した後に、 Δ を重みとして考慮した重み付きプロクラステス回転 (Koschat & Swayne, 1991) となる。 T が得られれば W_g は、

$$W_g = P \Lambda^{-1/2} T \Delta^{1/2} Q^T$$

⁴⁾ 柳井・前川・繁栞・市川 (1990) の p.22 および p.97 を参考にした。なお、この方法では Hirsch の方法と同様、途中の展開において直交回転を利用するが、全体としては斜交回転となる。

によって求めることができる．この場合の等化後の θ_g の分散共分散行列は

$$\begin{aligned} W_g^T S_g W_g &= W_g^T P \Lambda P^T V_g \\ &= (P \Lambda^{-1/2} T \Delta^{1/2} Q^T)^T (P \Lambda P^T) (P \Lambda^{-1/2} T \Delta^{1/2} Q^T) \\ &= Q \Delta Q^T = S \end{aligned} \quad (11)$$

となって等化先の θ のものと常に一致する．

さて (10) 式を展開すると、

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2} [tr(\Theta_L^T \Delta \Theta_L) - 2tr(\Delta \Theta_L^T \Theta_{gL} T) \\ &\quad + tr(\Theta_{gL} T \Delta T^T \Theta_{gL}^T)] \end{aligned}$$

となるが、上式の右辺括弧内の第 1 項は Θ が所与の場合には定数と見なすことができる．また、右辺第 3 項についても $tr(\Theta_{gL} T \Delta T^T \Theta_{gL}^T) = tr \Delta = tr S$ となるから、やはり定数と見なすことができる．したがって、この場合の f を最小化する T は、 $tr(\Delta \Theta_L^T \Theta_{gL} T)$ を最大化するような T であり、因子スコアに注目した直交プロクラステス回転（付録参照）を利用して

$$T = \Theta_{gL}^T \Theta_L \Delta (\Delta \Theta_L^T \Theta_{gL} \Theta_{gL}^T \Theta_L \Delta)^{-1/2}$$

と解析的に求めることができる．

4. 実験 1：能力特性値の相関に関する実験

これら 3 つの等化法について、それぞれの性質を確認するために計算機を用いたシミュレーション実験を行った．実験の手順は以下のとおりである．

まず、 $N = 300$ 人の仮想的な受検者の $m = 2$ 次元の能力特性値 θ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) と $p = 40$ 個の問題項目の項目パラメータ $\mathbf{a}_j$ および d_j ($j = 1, 2, \dots, p$) を、 θ_i については、 $\theta_i \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right)$ 、 $\mathbf{a}_j$ と d_j は $\mathbf{a}_j \sim N(\mathbf{0}, \sigma_a^2 I)$ 、 $\sigma_a^2 = 0.5^2$ 、 $d_j \sim N(0, 1)$ としてそれぞれ乱数で生成した．なお、能力特性の次元間の相関の強さによる影響を考慮して、相関係数 ρ については 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9 の 5 パターンを用意した．

つぎに θ_i と $\mathbf{a}_j$, d_j を (1) 式のモデルに代入して正答確率を求め、一様乱数によってそれぞれの受検者の問題項目に対する 2 値の正誤データ (0, 1) を生成した．生成した正誤データについて項目パラメータおよび受検者の能力特性値 θ_{gi} の推定を行った．

このようにして推定した受検者毎の能力特性値を転置した θ_{gi}^T を受検者数分縦に並べた行列 Θ_g について、

真の能力特性値を転置した θ_i^T を受検者数分縦に並べた行列 Θ を等化先として等化を行った．等化の方法としては、前述の 3 つの方法に直交プロクラステス回転（付録参照）を加えた計 4 つの方法を用いた．

上記の手続きを相関係数 ρ の各値について、それぞれ $c=200$ 回繰り返し、つぎに示す $RMSE(\theta)$, $RMSE(r)$, $RMSE(A)$ の値を求めた．

$$RMSE(\theta) = \sqrt{\frac{1}{cmN} \sum_{k=1}^c \sum_{i=1}^N \|W_g^T \theta_{gi} - \theta_i\|_k^2}$$

$RMSE(\theta)$ は、値が小さいほど等化後の θ_g と等化先の θ が一致傾向にあることを表す．

また、 $RMSE(r)$ は、等化後の θ_g の次元間の相関係数に関連する指標で、値が小さいほど等化後の θ_g の次元間の相関係数が等化先の θ の次元間の相関係数に平均的に近いことを表している．

$$RMSE(r) = \sqrt{\frac{1}{c} \sum_{k=1}^c [r(W_g^T \theta_g) - r(\theta)]_k^2}$$

上式の $r(W_g^T \theta_g)$ は等化後の θ_g の次元間の相関係数、 $r(\theta)$ は等化先の θ の次元間の相関係数である．

$RMSE(A)$ は、等化後の項目パラメータ A に関連する指標で、値が小さいほど等化後の A パラメータが等化先の A に近いことを表す．

$$RMSE(A) = \sqrt{\frac{1}{cmp} \sum_{k=1}^c \|W_g^{-1} A_g^T - A^T\|_k^2}$$

上式の $W_g^{-1} A_g^T$ は等化後の A パラメータ行列、 A^T は等化先の A パラメータ行列である．

なお、シミュレーション実験のプログラムは R3.0.0 (R Development Core Team, 2013) によって作成した．また、多次元 IRT の項目パラメータと受検者の能力パラメータの推定には mirt パッケージ (Chalmers, 2012) を利用した．

$RMSE(\theta)$ に関する結果を図 1 に、 $RMSE(r)$ に関する結果を図 2 に、 $RMSE(A)$ に関する結果を表 1 にそれぞれまとめる．

まず、 $RMSE(\theta)$ についてみると、全般に次元間の相関係数が小さい場合には各手法間の差が小さいが、次元間の相関が大きくなるに従って等化法間の差が大きくなっていることがわかる．今回検討する等化法は、能力特性値間の相関をどのように捉えるかという点に

図 1. シミュレーション結果 $RMSE(\theta)$ 図 2. シミュレーション結果 $RMSE(r)$

違いがあるため、相関が大きいほど差異が明確になるのは妥当な結果であると言える。

以下では、 $RMSE(\rho)$ 、 $RMSE(A)$ の結果も含めて、4つの等化法に関する結果を順にみていくと、まず直交プロクラステス回転法 (OT) では、特に ρ の値が大きく次元間に相関がある場合に、 $RMSE(\theta)$ 、 $RMSE(r)$ の値が双方とも大きくなっている。これは、因子スコアによる直交プロクラステス回転が、能力特性値の次元間に直交性を仮定しており、能力特性値の相関に上

表 1. ρ 毎の $RMSE(A)$

	OT	OQ	HM	WP
$\rho = 0.1$	.73 (.21)	.73 (.21)	.73 (.21)	.73 (.21)
$\rho = 0.3$	.72 (.21)	.73 (.21)	.71 (.21)	.72 (.21)
$\rho = 0.5$	.74 (.20)	.78 (.21)	.74 (.20)	.74 (.20)
$\rho = 0.7$	.77 (.21)	14.14 (13.95)	.79 (.20)	.79 (.21)
$\rho = 0.9$	.78 (.21)	81.79 (79.22)	.96 (.26)	.96 (.27)

※括弧内の数値は各繰り返し毎の $RMSE(A)$ の標準偏差

手く追従できないためであると考えられる。ただし、OT 法で ρ の値が 0.9 と大きい場合に $RMSE(A)$ の値が他の手法に比べて小さくなっている。OT 法は、能力特性値を等化先に近づけすぎない分、項目特性値の側から見ると安定した結果が得られている可能性もある。これは、特に多次元 IRT の等化において、等化対象のテストと等化先のテストで受検者の能力特性値を近接させることが、必ずしも項目特性値を近接させることを同時に実現するものではないことを示す点で注目すべき結果であると言える。

つぎに、斜交プロクラステス回転法 (OQ) についてみると、いずれの ρ の値についても $RMSE(\theta)$ が他の手法に対して小さな値となっていた。これは、斜交プロクラステス回転法が最も少ない制約の下で等化先と等化後の能力特性値を近接させる構造となっていることの結果であると思われる。ただし、 ρ の値が大きい場合に $RMSE(r)$ の値が比較的大きくなっており、相関構造の再現性という点でみると斜交プロクラステス回転は必ずしも優れた方法とはいえない点に注意が必要である。能力特性値の次元間の相関関係はテストが測定する次元間の関係性に対応するものと考えられるが、等化によってこれが大きく変化してしまうことはテストの運用という面では望ましい性質ではない。

ところで ρ が大きい場合の斜交プロクラステス回転による等化後の θ_g の次元間相関を確認したところ、値が 1 に近いケースが見られた (図 3)。これは一部には実験において α パラメータを小さく設定したことの結果であるが、斜交プロクラステス回転を利用した等化では等化後の能力特性値の次元が縮退してしまう可

図 3. OQ 法による等化後の θ の例 $\rho = 0.9$ の場合

図 4. WP 法による等化後の θ の例 $\rho = 0.9$ の場合

性能があることを表すものである。テストが測定内容の面でも想定した次元数に対応しているとすれば、このような状況はやはり適切なものではない。なお、同様の現象は他の等化法、例えば重み付きプロクラステス回転法においては見られなかった（図 4）。また、項目パラメータに関する指標である $RMSE(A)$ について見ても、斜交プロクラステス回転では次元間相関が 0.7 以上の場合に値が極めて大きくなっており、項目

パラメータの再現についてもうまく行っていないことがわかる。特に次元間の相関が高い場合に斜交プロクラステス回転を利用する際には、等化後のパラメータが妥当なものであるか十分注意する必要があると考えられる。

Hirsch の方法（HM）と重み付きプロクラステス回転による方法（WP）は、コンセプトにおいて類似性が高いため、比較する形で結果を確認する。まず図 2 において、 ρ の値に関わらず重み付きプロクラステス回転による方法では $RMSE(r)$ の値が常にゼロになっていることがわかる。これは (11) 式で示したように、この手法では等化後の能力特性値の次元間の相関が等化先の能力特性値の次元間の相関に常に一致することの結果である。一方の Hirsch の方法では特に ρ の値が小さい場合に $RMSE(r)$ が比較的大きな値となっている。また、図 1 の $RMSE(\theta)$ の結果を見ると、 ρ の値にかかわらず重み付きプロクラステス回転法のほうが値が小さくなっており、等化後の θ_g と等化先の θ の近接性という面でも重み付きプロクラステス法のほうが優れていることがわかる。したがって、共通受検者による等化において次元間の相関の再現性が求められる場合には、Hirsch の方法よりも重み付きプロクラステス回転による方法を利用するほうが、一般に良好な結果が得られるものといえる。

これらの結果から、能力特性値間の相関が 0.3 を目安として一定の水準を超えるような場合の共通受検者による等化法としては、重み付きプロクラステス回転による方法（WP）を利用することが適切だと考えられる。一方、特に等化対象のテストと等化先のテストで能力特性値を一致させる要請が強い場合には、斜交プロクラステス回転法（OQ）の利用が検討されてもよい。ただし、この場合には能力特性値間の相関構造は再現されないこと、能力特性値間の相関が強い場合には項目パラメータや能力特性値そのものが不安定になることに注意する必要がある。

5. 実験 2：項目数に関する実験

つぎに、問題項目数を変化させた場合の各等化法の違いを確認するために、能力特性値間の相関係数は $\rho = 0.7$ に固定し、項目数 p について 20, 40, 100, 200 の 4 パターンを用意して実験を行った。相関係数と項目数以外の設定および評価の指標は実験 1 と同様である。 $RMSE(\theta)$ に関する結果を図 3 に、 $RMSE(r)$ に関す

図 5. シミュレーション結果 $RMSE(\theta)$ 図 6. シミュレーション結果 $RMSE(r)$

る結果を図 4 に、 $RMSE(A)$ に関する結果を表 2 にそれぞれまとめる。

まず、 $RMSE(\theta)$ の結果をみると、項目数が増えるほどどの手法でも明らかに値が小さくなる傾向があることがわかる。これは、項目数を増やすことで等化前の能力特性値の推定精度が高くなることの効果であると考えられる。また、 $RMSE(\theta)$ の値は、項目数に関わらず OQ 法、WP 法、HM 法、OT 法の順に小さくなっており、等化対象のテストと等化先のテストの能

表 2. 項目数毎の $RMSE(A)$

項目数	OT	OQ	HM	WP
$p = 20$	.77 (.26)	2.24 (1.85)	.77 (.26)	.81 (.30)
$p = 40$	.76 (.21)	.85 (.28)	.77 (.21)	.77 (.21)
$p = 100$	.84 (.25)	.88 (.25)	.85 (.25)	.85 (.25)
$p = 200$	.90 (.27)	.93 (.27)	.92 (.27)	.92 (.27)

※括弧内の数値は各繰り返し毎の $RMSE(A)$ の標準偏差

力特性値の一致度合という観点でみると、この順で有効な方法であると考えられる。

$RMSE(\rho)$ 、 $RMSE(A)$ の結果も含めて 4 つの等化法に関する結果を順にみていくと、直交プロクラステス回転法 (OT) では $RMSR(\theta)$ 、 $RMSR(r)$ の両指標ともに他の等化法と比較して相対的に大きな値となっており、特に項目数が多い場合にこの傾向が顕著であることがわかる。OT 法は今回検討する 4 つの手法の中で最も制約の強い方法であり、能力特性値の近接度、相関構造の再現性の面では他の手法のほうが有利であると言える。 $RMSR(\theta)$ 、 $RMSR(r)$ の値が大きくなるのは、このことを反映したものである。ただし $RMSE(A)$ をみると、いずれの項目数の場合についても他の手法よりも値が小さくなっており、相関係数の実験結果と併せて考えると、特に次元間の相関が強い場合には、項目特性値については直交プロクラステス回転法が安定した結果をもたらすものと考えられる。

斜交プロクラステス回転法 (OQ) は、 $RMSR(\theta)$ が項目数に関わらず 4 つの等化法の中で最も小さい値となっており、等化対象のテストと等化先のテストの能力特性値を一致に近づけるという点で優れた方法であるといえる。前述の項目数を 40 に固定した相関係数に関する実験では、能力特性値の次元間の相関が高い場合に相関構造や項目パラメータの再現性において問題が見られた。一方、項目数に関する結果をみると、項目数が多くなるほど $RMSE(r)$ 、 $RMSE(A)$ の値は改善し、特に項目数が 80 問を超えると $RMSE(A)$ の値は他の等化法と遜色ない値となっている。これらの結果から、相関構造の再現性があまり重要ではなく能力特性値の近接性が重視される場合で、かつテストを構成する項目数が十分多いような状況では、斜交プロク

ラステス回転は有効な方法であると考えられる。

Hirsch の方法 (HM) と重み付きプロクラステス回転による方法 (WP) をみると, $RMSR(\theta)$, $RMSR(r)$, $RMSR(A)$ の各値とも, 項目数が多くなるにしたがって両手法での差は小さくなっており, 特に項目数が 80 以上の場合にはかなり近接した結果となっていることがわかる. ここから, Hirsch の方法と重み付きプロクラステス回転による方法は, 特に項目数が多い場合には類似した特徴を示すものと考えられる. ただし, 重み付きプロクラステス回転による方法では $RMSR(r)$ の値が常にゼロとなることを考慮すれば, やはり重み付きプロクラステス回転法のほうが実用上は有利であるものと思われる.

6. まとめと課題

複数のテストのスコアを比較可能なものとする等化法に関する研究は, IRT において重要な課題である. これは多次元 IRT においても同様であるが, 特に共通受検者による多次元 IRT の等化法に関する研究はこれまであまりなされてこなかった.

本研究では, 多次元 IRT における共通受検者を利用した場合の等化について, 先行研究で示された Hirsch の方法に加えて, 因子分析における回転法を応用した斜交プロクラステス回転法, 重み付きプロクラステス回転法の 2 つの方法を示し, これに直交プロクラステス回転法を加えた 4 つの方法について計算機によるシミュレーション実験を行って性質を検証した. なお, 通常の因子分析では, 因子負荷量に注目した回転が利用されるが, 共通受検者による等化は因子スコアに注目した回転に相当する. このため, 因子スコアに注目した斜交プロクラステス回転および重み付きプロクラステス回転の解を示した.

実験の結果, 等化後の個人の能力特性値と等化先の個人の能力特性値を一致に近づけることを第一に考える場合には, 斜交プロクラステス回転法が最も有効な手法であることが示された. ただし, テストを構成する項目数が少ない場合に, 斜交プロクラステス回転法では等化後の能力特性値の次元間の相関係数が等化先のそれを再現したものとならないことがあることがわかった. 能力特性間の次元間の相関は, テストが測定している能力特性間の関係性を表すものであるが, 斜交プロクラステス回転を利用した等化では, この関係が変化してしまう可能性がある点には注意が必要である.

また, 等化後の能力特性値の次元間の相関を等化先に一致させることが重視される場合には, 重み付きプロクラステス回転による方法が有効であることが確認できた. 重み付きプロクラステス回転では, 等化後の能力特性値についても斜交プロクラステス回転法に次いで等化先の能力特性値との近接性が高い結果となっており, 特に能力特性値の次元間の相関が小さい場合には斜交プロクラステス回転法との差が小さい傾向であった. したがって, 等化にあたって能力特性値の次元間の相関を等化先に近づけることにも配慮する必要がある場合, 重み付きプロクラステス回転による方法の総合的な有用性は高いものと考えられる.

ところで, 本研究では共通受検者による等化に限定してその性質を比較したが, 多次元 IRT において共通項目による等化と共通受検者による等化の両方が実行できるような場合に, いずれの等化法を利用したほうが精度において望ましいかといった事柄についても, 今後把握する必要があるテーマであると思われる. ただし, 本研究で示した共通受検者による等化法では, いずれの方法についても等化のための変換係数行列を数値的な繰り返し計算によらず解析的に求めることができる. 一方, 共通項目による等化では繰り返し計算が必要となるものが多い (e.g. Simon, 2008). プログラム開発の負荷など実際場面での活用を考えれば, 比較的シンプルな形で等化後のパラメータが得られるという意味においても, 共通受検者による等化には利点があるものと思われる.

さて, 本研究では等化法の特徴を把握するための指標として, 主に能力特性値と相関係数の残差平方和に関連する値を利用した. これらの指標は各等化法の平均的な性質を表すものであるが, 状況によっては各手法の平均的な特性の優劣よりもたとえば結果の安定性のほうが重要であるケースも考えられる. この点を含めて, 実際の状況に即したより幅広い観点から各等化法の特徴を見極めていく必要があると言える.

また, 実験では受検者の能力特性値を二次元に設定したが, 実際のテストの運用場面では, より多くの次元を考慮すべき場合もあり得る. また, 受験者数についても特定のパターンに限定して実験を行ったが次元数や受験者数が大きい場合を含めた, より多様な条件においても一貫した結果が得られるかどうかについては今後確認していく必要がある.

参考文献

- Ackerman, T.A., & Gierl, M.J., & Walker, C.M. (2005). Using multidimensional item response theory to evaluate educational and psychological tests. *Educational Measurement: Issues and Practice*, 22, 3, 37–51.
- Arai, S., & Mayekawa, S. (2011). A comparison of equating methods and linking designs for developing an item pool under item response theory. *Behaviormetrika*, 38, 1–16.
- 荒井清佳・菊池賢一・前川眞一 (2013). 三つ以上のテストフォームを等化する場合の等化精度の違いについて. 日本テスト学会第11回大会発表論文抄録集, 60–61.
- Brown, A., & Maydeu-Olivares, A. (2010). Item response modeling of paired comparison and ranking data. *Multivariate Behavioral Research*, 45, 6, 935–974.
- Brown, A., & Maydeu-Olivares, A. (2012). How IRT can solve problems of ipsative data in forced-choice questionnaires. *American Psychological Association*.
- Chalmers, R.P. (2012). mirt: A multidimensional item response theory package for the R environment. *Journal of Statistical Software*, 48, 6.
- 藤森進 (1988). OR 型多次元項目反応モデルによる TPI 尺度データの分析. *教育心理学研究*, 36, 96–103.
- Haebara, T. (1980). Equating logistic ability scales by a weighted least squares method. *Japanese Psychological Research*, 22, 144–149.
- Hirsch, T. (1989). Multidimensional equating. *Journal of Educational Measurement*, 26, 4, 337–349.
- 市川雅教 (2010). 因子分析 行動計量の科学 7. 朝倉書店.
- 池田央 (2001). 項目応答理論. 現代テスト理論, 朝倉書店.
- 泉毅・山野井真児・山田剛史・金森保智・対馬英樹 (2012). 共通項目数が等化の精度に及ぼす影響: 大規模学力テストデータを用いた探索的研究. *教育実践学論集*, 13, 49–57.
- 加藤健太郎・山田剛史・川端一光 (2014). R による項目反応理論. オーム社.
- Koschat, M.A., & Swayne, D.F. (1991). A weighted Procrustes criterion. *Psychometrika*, 56, 2, 229–239.
- Li, Y.H., & Lissitz, R.W. (2000). An evaluation of the accuracy of multidimensional IRT linking. *Applied Psychological Measurement*, 24, 115–138.
- Lord, F.M. (1980). Applications of item response theory to practical testing problems. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Min, K. (2007). Evaluation of linking methods for multidimensional IRT calibrations. *Asia Pacific Education Review*, 8, 1, 41–55.
- 光永悠彦・前川眞一 (2013). 多群 IRT モデルにおけるモデル簡素化の評価—水平等化場面のシミュレーションを通じて—. *行動計量学*, 40, 29–42.
- 光永悠彦・御園真史・水町龍一 (2013). 共通項目デザインを用いた多値型データによるテストにおける等化方法の比較—大学1年次向け数学コンピテンシーテストのデータを用いて—. 日本テスト学会第11回大会発表論文抄録集, 56–59.
- 村木英治 (2011). 項目反応理論. 朝倉書店.
- Muraki, E., & Carlson, J.E. (1995). Full-information factor analysis for polytomous item responses. *Applied Psychological Measurement*, 19, 73–90.
- 仁田善雄・前川眞一・柳本武美・前田忠彦・吉田素文・奈良信雄・石田達樹・福島統・齋藤宣彦・福田康一郎・高久史磨・麻生武志 (2005). 項目反応理論を用いた第1回共用試験医学系 CBT の統計解析. *医学教育*, 36(1), 3–9.
- 岡田謙介・前川眞一 (2014). 補償型・非補償型を包含する多次元項目反応理論モデル. 日本テスト学会第12回大会発表論文抄録集.
- Oshima, T.C., Davey, T.C., & Lee, K. (2000). Multidimensional linking; four practical approaches. *Journal of Educational Measurement*, 37, 357–373.
- R Core Team (2013). R: A language and environment for statistical computing. <http://www.R-project.org/>.
- Reckase, M.D. (1985). The difficulty of test items that measure more than one ability. *Applied Psychological Measurement*, 9, 401–412.
- Reckase, M.D. (2009). Multidimensional item response theory. Springer.
- Reckase, M.D., & McKinley, R.L. (1991). The discriminating power of items that measure more than one dimension. *Applied Psychological Measurement*, 15, 361–373.
- 芝祐順 (編) (1991). 項目反応理論—基礎と応用. 東京大学出版会.
- Simon, M.K. (2008). Comparison of concurrent and separate multidimensional IRT linking of item parameters. PhD thesis, University of Minnesota.
- 孫媛 (1997). 多次元データに対する項目反応モデル. 学術情報センター紀要 第9号, 103–111.
- Stocking, M.L., & Lord, F.M. (1983). Developing a common metric in item response theory. *Applied Psychological Measurement*, 7, 201–210.
- Takane, Y., & Leeuw, J.D. (1987). On the relationship between item response theory and factor analysis of discretized variables. *Psychometrika*, 52, 3, 393–408.
- 豊田秀樹 (2012). 項目反応理論〔入門編〕(第2版). 朝倉書店.
- 柳井晴夫・前川眞一・繁耕算男・市川雅教 (1990). 因子分析—その理論と方法—. 朝倉書店.
- van der Linden, W.J., & Hambleton, R.K. (Ed.) (1997). Handbook of modern item response theory. Springer.
- Yao, L., & Boughton, K. (2009). Multidimensional linking for tests with mixed item types. *Journal of Educational Measurement*, 46, 2, 177–197.

(2015年3月17日受付, 2015年9月8日最終修正)

付録 1：能力特性値（因子スコア）に注目した直交プロクラステス回転

次の問題について考える．

$$\min. \quad f = \frac{1}{2} \text{tr}(\Theta - \Theta_g W)^T (\Theta - \Theta_g W) \quad (12)$$

$$\text{s.t.} \quad \text{diag}(W^T S_g W) = I. \quad (13)$$

いま W が $W^T W = I$ を満たす直交回転行列であるとする．上式の f を展開すると、

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2} \text{tr}(\Theta^T \Theta - 2\Theta^T \Theta_g W + W^T \Theta_g^T \Theta_g W) \\ &= \frac{1}{2} \text{tr}(nS - 2\Theta^T \Theta_g W + nW^T S_g W) \end{aligned}$$

となるが、 $W^T W = I$ より $\text{tr}(W^T S_g W) = \text{tr}(S_g)$ であるから、(12) 式の最小化は $\Theta^T \Theta_g W$ の最大化と同値である． $\Theta^T \Theta_g$ が正則な場合、このような W は

$$W = \Theta^T \Theta_g (\Theta_g^T \Theta \Theta_g^T)^{-1/2}$$

と求めることができる (e.g. 市川, 2010)．さて、この場合の Θ_g の変換後の分散は $W^T S_g W$ の対角成分であるが、この各成分の値は一般には 1 にならない．ただし特に $S_g = I$ の場合には $W^T W = I$ より

$$W^T S_g W = W^T W = I$$

となる． $S_g \neq I$ の場合には変換後の Θ_g の分散で W を調整した

$$W^* = W [\text{diag}(W^T S_g W)]^{-1/2}$$

を利用する．

付録 2：能力特性値（因子スコア）に注目した斜交プロクラステス回転

いま f が W の関数であることを明示的に $f(W)$ と書くことにすると、(12) 式の (13) 式による条件付き最小化問題は

$$g = f(W) - \frac{1}{2} \text{tr} \left[(\text{diag}(W^T S_g W) - I) \Gamma \right] \quad (14)$$

の最小化と同値であり、解は

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial W} = \frac{\partial f(W)}{\partial W} - S_g W \Gamma = 0 & (15) \\ \frac{\partial g}{\partial \Gamma} = \text{diag}(W^T S_g W) - I = 0 & (16) \end{cases}$$

を満たす．ただし、 Γ はラグランジュの未定乗数を表す対角行列である．ここで、

$$G = \frac{\partial f(W)}{\partial W}$$

とすると、(15) 式から

$$G = S_g W \Gamma$$

であり、上式の両辺に左から W^T をかけると、

$$W^T G = W^T S_g W \Gamma$$

となる．ここで Γ が対角行列であることに注意すると、任意の j ($j = 1, 2, \dots, m$) について

$$(W^T G)_{jj} = (W^T S_g W)_{jj} \Gamma_{jj}$$

が成り立つ．ただし上式の下付きの添字 jj は各行列の j 行 j 列成分を表す．上の関係を考慮すると、(16) 式より

$$\Gamma = \text{diag}(W^T G)$$

であることがわかる．これを (15) 式の Γ に代入すると

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f(W)}{\partial W} - S_g W \text{diag}(W^T G) \\ &= nS_g W - \Theta_g^T \Theta - S_g W \text{diag}[W^T (nS_g W - \Theta_g^T \Theta)] \\ &= S_g W \text{diag}(W^T \Theta_g^T \Theta) - \Theta_g^T \Theta \end{aligned}$$

(途中 (16) 式を利用した) となるから、

$$S_g W \text{diag}(W^T \Theta_g^T \Theta) - \Theta_g^T \Theta = 0$$

であり、 W に関連する項を右辺にまとめて

$$S_g^{-1} \Theta_g^T \Theta = W \text{diag}(W^T \Theta_g^T \Theta) \quad (17)$$

を得る．いま、

$$V = S_g^{-1} \Theta_g^T \Theta$$

とすると、(17) 式から

$$V = W \text{diag}(W^T S_g V).$$

さらに、 $[\text{diag}(W^T S_g V)]_{jj} \neq 0$, ($j = 1, 2, \dots, m$) を仮定して⁵⁾

⁵⁾ $[\text{diag}(W^T S_g V)]_{jj} = 0$ となるのは、 W の j 列の各成分が全て 0 の場合か、 $\Theta_g W$ すなわち等化後の能力特性値と等化先の能力特性値 Θ の第 j 次元が直交する場合であるが、前者は (16) 式に反する．また、後者の場合は等化の設定に問題があると考えられる．

$$K = [\text{diag}(W^T S_g V)]^{-1} \quad (18)$$

とすると,

$$W = VK.$$

これを, (18) 式に再び代入すると

$$K = [\text{diag}(K^T V^T S_g V)]^{-1} = [\text{diag}(V^T S_g V)]^{-1} K^{-1}$$

となる. 上式を K について解くと

$$K = [\text{diag}(V^T S_g V)]^{-1/2}$$

であるから, 結局 W は

$$W = VK = V[\text{diag}(V^T S_g V)]^{-1/2}$$

となる⁶⁾ (以上).

⁶⁾ 上の W は本文の W_g^* に対応する