主観確率を含んだ累積プロスペクト理論モデルの 推定精度について

藤 田 和 也, 岡 田 謙 介

Precision of the Cumulative Prospect Theory Model for Estimating the Subjective Probability

Kazuya FUJITA and Kensuke OKADA

Measurement of subjective probability may theoretically be achieved based on the decision making tasks which require participants to choose between two gambles with known and unknown outcome probabilities. However, this approach is known to suffer from the effect of a human cognitive factor known as the ambiguity aversion. Moreover, because this approach is not based on statistical model, the estimation precision of the subjective probability cannot be evaluated. In the current study, we introduce the cumulative prospect theory model to this problem, and derive its Fisher information matrix. Using this information, we propose an adaptive presentation of the decision making tasks. Simulation studies and an empirical application confirmed that the derived Fisher information corresponds well with the empirical posterior standard deviation, and that the proposed adaptive task selection method performs much better than selecting the tasks at random. Furthermore, adaptive task selection which fixes the rewards of the two gambles was found to perform worse than the unconstrained ones. We conclude that unconstrained adaptive task selection is desirable for measurement of subjective probability under ambiguity.

Key words: cumulative prospect theory, adaptive testing, subjective probability, Fisher information matrix

キーワード: 累積プロスペクト理論, 適応型テスト, 主観確率, フィッシャー情報行列

1. は じ め に

主観確率の測定法を開発し評価することは重要な課題である。なぜなら, 意思決定研究において, 主観確率は意思決定を規定する要因の 1 つだからである (Savage, 1972)。人の意思決定を規定する主観確率を正確に評価し測定することができれば, 意思決定研究への貢献および意思決定の説明・予測・介入に繋がる可能性がある。

事象 B が生起する主観確率とは, 事象 B が生起するという信念の度合いである (Ramsey, 1931) と定義さ

れる。主観的期待効用理論 (Savage, 1972) では, 行動して得られる結果の価値と, 結果が得られる主観確率に基づいて人の意思決定が説明される (竹村, 2015)。主観確率が意思決定を規定するならば, 意思決定の結果という行動データから, 参加者の主観確率を推定することができるだろう (Gilboa, 2009 川越訳, 2014)。実際, クジや賭け状況を利用して主観確率を測定するための方法を利用することが, 少なくとも原理的には可能である (繁樹, 1995)。クジ B が当たりとなる主観確率の値を特定したい場合には, クジ B が当たりとなる客観確率情報は提示せず, クジ A が当たりとなる客観確率情報のみを変化させて選択肢を提示し, 参加者に繰り返し意思決定を課す。このとき, クジ A とクジ B に対する選好が切り替わる試行における客観確率 (等価点: クジ A とクジ B が同等に好まれる点) がクジ B の主観確率に対応していることになる。こうし

東京大学大学院教育学研究科
(Graduate School of Education, The University of Tokyo)

連絡先: 〒113-0033 東京都文京区本郷 7-3-1

E-mail: kfujita@p.u-tokyo.ac.jp

た考えに基づいて Lauriola & Levin (2001) は、当たりが出る客観確率が提示される選択肢（リスクジ）と、当たりが出る客観確率が提示されず参加者には分からない選択肢（曖昧ジ）とを対提示する曖昧性-確率トレードオフ課題（ambiguity-probability tradeoff task）による主観確率測定を行った。彼らは、この課題中で提示する客観確率を操作して参加者に意思決定を繰り返してもらい、得られた等価点を主観確率としている。

しかし、人間の意思決定では確率の分からない曖昧ジが確率の定まったリスクジよりも避けられやすい、という曖昧性忌避 (Ellsberg, 1961; 繁樹, 1988) が生じるために、単純に曖昧性-確率トレードオフ課題の等価点として主観確率を求める方法は、適切ではないことが指摘されている。曖昧性忌避が生じると、曖昧性-確率トレードオフ課題等での等価点として単純に求められた主観確率は、有限加法性を満たさない (Gilboa, 2009 川越訳, 2014)¹⁾。つまり、曖昧性忌避が生じている状況で測定された主観確率は、コルモゴロフの公理に照らせば確率とは言えないのである。

この問題は重要であるため、曖昧性-確率トレードオフ課題を利用した曖昧性忌避に関する後続の研究が行われている。しかし、これらの先行研究はいずれも主観確率の推定精度が不明であり、結果の信頼性を評価することが難しいという問題点がある。例えば、Liu & Onculer (2015) は最尤法など統計的理論を利用した推定を行っておらず、個人レベルの推定精度の指標を出すことができない。Lauriola & Levin (2001) や Lauriola, Levin, & Hart (2007) も同様であるほか、リスクジの確率や報酬等の実験刺激の選定基準の議論もなく、報酬額は明示されないか選択肢間で同額と設定されている。つまり、こうした先行研究で利用された実験刺激の選定法は、主観確率の推定精度の意味で最適ではない可能性が高い。

こうした現状を踏まえると、主観確率の推定精度を評価する方法、および精度を改善できる実験刺激の選択基準（以下項目選択基準）を開発することが有用だと考えられる。推定精度の数量的な評価指標を算出す

ることができれば、先行研究の信頼性を確認することが可能となり、結果の解釈の一つの参照情報が得られることが期待される。さらに、実験実施前に試行数や実験刺激をデザインして精度の高い測定を行うことが可能となる。

推定精度を評価するためには、統計モデルを考える必要がある。本研究ではこのための認知モデルとして、累積プロスペクト理論 (cumulative prospect theory, CPT; Tversky & Kahneman, 1992) を導入する。CPT とは、選択肢の情報に対してそれを編集し、主観的な価値である価値関数と意思決定の重みである確率加重関数によって選択肢の価値を算出し意思決定を行うというモデルである。CPT は、人の意思決定をよく記述するための心理学的な仮定と非加法的な数理理論を総合した記述理論である (竹村, 2015)。CPT を導入する利点は主に三つある。第一に、(累積) プロスペクト理論が、記述力の高さ等の利点から最も広く利用される意思決定理論の一つであることである。特に経済活動に関する人間の意思決定に対する記述力が高いことがよく知られており (Barberis, 2013)、推定されるパラメータの時間的安定性が高く記述力に寄与する個人差が取り出せるとされている (Glockner & Pachur, 2012)。第二に、認知モデルを導入することで推定精度の評価とモデルの拡張が容易になることである。第2節で述べるように、本研究でもこの特長を活かし、従来のリスクジのみを提示した状況における CPT に対して新たなパラメータとして主観確率を導入する。先行研究においても多くの拡張が行われている (e.g. Seo, 2009; Gonzalez & Wu, 1999; Kilka & Weber, 2001)。さらに、CPT では価値関数も推定できるため、報酬額を選択肢間で同額にする必要性はなく、報酬額を変化させて主観確率を推定する統計モデルを構築することができる。第三に、適用可能な状況が広範であることである。CPT は非加法的な確率測度を仮定する理論に分類されているが、Wakker & Tversky (1993) では期待効用理論 (expected utility theory, EUT; von Neumann & Morgenstern, 1944) からの一般化の文脈でプロスペクト理論と EUT との関連が考察されている。また CPT は、確率加重関数が線型であれば加法的な確率測度の理論も包含することになる (Tversky & Kahneman, 1992; 竹村, 2015) という、柔軟なモデルでもある。

このように CPT は柔軟で有用なモデルだが、CPT の推定法の改善に関する研究 (Nilsson, Rieskamp, &

¹⁾ 先行研究 (Lauriola & Levin, 2001) では主観確率の測定ではなく曖昧態度の測定と表現している。これは曖昧性忌避と主観確率が分離できないためである。本研究では曖昧性忌避を抑制できる可能性を考慮し (Liu & Onculer, 2015)、選好が切り替わる点を主観確率と表現する。

Wagenmakers, 2011) や統計学的議論の重要性の認識はあるものの (Murphy & Brincke, 2017), 報酬額固定の有無などの実験刺激がパラメータの推定精度にどう影響するののかという問題について議論されている先行研究は見当たらない。記述力やモデルの拡張性の高さから CPT における推定精度の改善について一般的に利用できる方法を確立しておくことは有用と考えられる。

そこで本研究では、推定精度の評価と項目選択基準について議論するために項目反応理論 (item response theory, IRT; van der Linden & Hambleton, 1997; 加藤・山田・川端, 2014) を CPT に適用することを提案する。項目反応理論は、テストや質問紙調査の項目への反応モデルであり、人に関する能力特性パラメータと項目に関する項目パラメータに分離することを可能とした。また参加者の能力や特性値ごとの項目情報量という、その項目が推定精度に寄与する量についての研究もなされ、情報量が最大となるようにテストや項目を選ぶという適応型テストに関する研究も盛んに行われている (van der Linden, 2018)。項目反応理論も CPT もロジスティック関数を利用した潜在変数モデルであるという類似点が存在し、項目反応理論で展開されている項目情報量の導出や適応型テストの構成を CPT に適用することが可能であると考えられる。CPT の推定精度を評価することができれば、曖昧性-確率トレードオフ課題等の意思決定課題に CPT を適用することで、主観確率の推定精度を評価することが可能となる。

なお、CPT の適応型刺激選択²⁾には Toubia, Johnson, Evgeniou, & Delquié (2013) と Cavagnaro, Gonzalez, Myung, & Pitt (2013) の先行研究がある。Cavagnaro et al. (2013) は CPT と EUT 等のモデル識別力の観点から適応的アプローチを提案しており、Toubia et al. (2013) では CPT と遅延による価値割引パラメータを同時に推定するモデルにおける適応型刺激選択を行っている。しかし、本研究で提案するのは主観確率を含んだ CPT であり Toubia et al.

(2013) とは異なるモデルである。また、Toubia et al. (2013) ではシステムの開発に重点がおかれ、フィッシャー情報行列が具体的にどのような形になるかや、その導出が書かれていない。そこで本研究では、第 3 節でフィッシャー情報行列の具体的な形を示すとともに、その導出も詳しく記述する。さらに Toubia et al. (2013) は項目反応理論とは別の文脈で議論されているため、項目選択基準 (詳しくは第 3 節) による推定精度の違いに関する議論が少なく、また確率加重関数として Prelec (1998) の方法のみを利用している (詳しくは第 2 節で述べる)。これに対し、本研究では項目選択基準および確率加重関数の設定による推定精度の違いも検討する。

以上を踏まえ、本研究では主観確率の推定精度を評価するために CPT モデルを拡張し、そのフィッシャー情報行列 (項目情報関数) を算出してこれを利用した推定精度の評価および改善のための適応型刺激選択法を開発することを目的とする。また項目選択基準やモデルの確率加重関数、報酬額固定の推定精度への影響も検討する。第 2 節で CPT について説明し、第 3 節でフィッシャー情報行列の導出および項目選択基準を説明する。第 4 節でシミュレーションによって、報酬額を固定したり、実験前にランダムに実験刺激を決める方法よりも適応型刺激選択の方が推定精度が高いことを確認する。第 5 節で実データの解析を行い、最後に第 6 節で全体の考察と今後の展望について述べる。

2. CPT と主観確率の導入

2.1. 実験状況

本研究で考える実験状況について典型的な先行研究の設定と対比しながら説明するため、本段落ではまず、典型的な先行研究における実験状況を述べる (e.g., Nilsson et al., 2011)。クジ A に関する参加者 i の j 番目の試行を A_{ij} と書く (以下、クジ A_{ij} と呼ぶ)。いま、確率 $p_{ijk}^{(A)}$ で報酬 $\$x_{ijk}^{(A)}$ がもらえる ($k = 1, 2$) クジ A_{ij} と、確率 $p_{ijk}^{(B)}$ で報酬 $\$x_{ijk}^{(B)}$ がもらえるクジ B_{ij} の 2 種類が用意され、これらを対提示してどちらかを選択する意思決定を行ってもらう実験デザインを考える。 k はクジの結果 (の分割) を表しており、本研究では確率 $p_{ij1}^{(A)}$ で報酬 $\$x_{ij1}^{(A)}$ がもらえ、確率 $p_{ij2}^{(A)}$ で報酬 $\$x_{ij2}^{(A)}$ がもらえる状況を考えていることになる。た

²⁾ 本研究は能力や学力を測るテストではないため、適応型テストではなく適応型刺激選択という表現を採用した。また本研究では、報酬額やリスククジの確率を実験刺激、各試行で提示される刺激のペアを項目、全試行における項目の集合を課題と呼ぶ。実験刺激を選んでいいため適応型刺激選択と表現した。なお、項目選択基準については項目反応理論では一般的であるため、項目選択基準と呼ぶことにした。

図 1. 意思決定課題の例

参加者はクジ A_{ij} ・クジ B_{ij} のうち一方を選択する意思決定を行い、選択したクジの壺から球を 1 つ引く。Lauriola et al. (2007) を参考に作成した。

だし、表記の複雑化を避けるため、クジの種類を表す右肩の (A), (B) はクジ A と B に共通する場合を記述する際には省略する。典型的な意思決定課題では、 p_{ijk} と x_{ijk} は具体的な値として参加者に提示される。したがって p_{ijk} は報酬 x_{ijk} がもらえる客観確率である。また、明らかに $p_{ij1} = 1 - p_{ij2}$ である。曖昧クジ B を含んだ意思決定の場合は、 $p_{ijk}^{(B)}$ は提示されない。なお曖昧クジの確率値が参加者に学習されることを避けるため、結果のフィードバックは行われない。

これを踏まえ、以下では本研究で考える実験状況について説明する (図 1)。赤球と黒球が合計 100 個入っている 2 つの壺 (緑色の壺と白色の壺) があるとする。各試行において、白色の壺の赤球の個数は $100 \times p_{ij1}^{(A)}$ 個、黒球の個数は $100 \times p_{ij2}^{(A)}$ 個と提示され、緑色の壺の赤球および黒球の個数は具体的には提示されないとする (Ellsberg, 1961)。すなわち、クジ A (白色の壺) がリスククジでクジ B (緑色の壺) が曖昧クジに対応し、両者は壺の色によって区別される。ただし、緑色の壺における赤球の個数は、60~100 個等、ある個数の範囲としては分かっても良いとする (e.g. Liu & Onculer, 2015)。各試行では、各壺において赤球を引いた場合 (および黒球を引いた場合) の報酬額 ($x_{ij1}^{(A)}, x_{ij2}^{(A)}, x_{ij1}^{(B)}, x_{ij2}^{(B)}$) が明示され (e.g. Nilsson et al., 2011)、それらの情報からどちらの壺から球を 1 つだけ引くかを意思決定してもらう。 $x_{ij1}, x_{ij2}, p_{ij1}^{(A)}$ (したがって $p_{ij2}^{(A)}$ も) は実験者が操作し、参加者には具体的な値として提示される。この状況は、試行ごとに $x_{ij1}, x_{ij2}, p_{ij1}^{(A)}$ を操作し、意思決定データを取得する恒常法に対応すると考えられる。参加者は報酬を最大化することを目指す。

この状況において、研究者が測定したいのは曖昧クジ (緑色の壺) における、実験参加者が赤球を引く事象の主観確率である。上記の意思決定を繰り返し課すことによりデータを観測して、この主観確率を推測する。また、推測すべき主観確率が試行間で変わることは望ましくないため、壺の色により区別し、実験前に「緑色の壺は試行間で常に同一であり、したがってその中の赤球の個数も同一である。ただし具体的な個数は分からない」ということを明示する。一方、白色の壺については、試行間で毎回中身が入れ替えられ、その中の赤球の個数が提示されることも説明する。現実場面への応用例としては「ある会社の株価が 1 年後に 2% 上昇する」という事象 B に対する主観確率を測定すること等が考えられる。このような状況において、対提示するリスククジの報酬および客観確率は操作される (繁樹, 1995) が、対象としている事象 B は試行間で不変であり、したがって事象 B についての参加者の主観確率も不変であると考えられることができる。曖昧性忌避が生じることから状況に応じて一貫した (加法的な) 主観確率はそもそも想定できないとする先行研究の知見もあるが (Gilboa, 2009 川越訳, 2014)、本研究では、時間的に連続して行われた測定では一貫した主観確率に基づいて意思決定が行われることを仮定し、その主観確率を CPT モデルに基づいて測定する方法を検討する。

プロスペクト理論では、2 つの選択肢の双方について、報酬に加え確率も分かっているリスククジを扱うことが多い。一方、本研究では一方の選択肢の確率は分からない曖昧クジを含む状況における意思決定を扱う。以下では、前者の (2 つの選択肢双方がリスクク

ジである) 状況における CPT モデルを 2.2 節で、後者の (片方の選択肢が曖昧クジとなった) 状況における CPT モデルを 2.3 節で説明する

2.2. 曖昧クジを含まない場合の CPT モデル

CPT モデルでは、選択肢 A_{ij} の価値は $V(A_{ij}) = v(x_{ij1})w(p_{ij1}) + v(x_{ij2})(1 - w(p_{ij1}))$ により定まるとする。ただし、 $x_{ij1} > x_{ij2} \geq 0$ とする。 $0 \leq x_{ij1} < x_{ij2}$ や両方とも負、および異符号の場合も同様に Tversky & Kahneman (1992) の定義に従う (e.g. 付録)。ここで、 $v(\cdot)$ は報酬 x_{ijk} と参加者 i にとっての効用 $v(x_{ijk})$ の間の関係を表す価値関数 (value function) であり、 $w(\cdot)$ は確率 p_{ijk} に対応する主観的な意思決定の重み $w(p_{ijk})$ を決める確率加重関数 (weighting function) である。例えば、 A_{ij} が $2/3$ の確率で \$70、 $1/3$ の確率で \$50 もらえるクジである場合は、 $V(A_{ij}) = v(\$70)w(\frac{2}{3}) + v(\$50)(1 - w(\frac{2}{3}))$ となる。 $w(p_{ijk})$ と $v(x_{ijk})$ の形については様々な設定が提案されているが、Tversky & Kahneman (1992) はデータへの当てはまりから、

$$v(x_{ijk}) = \begin{cases} x_{ijk}^{\alpha_i} & \text{if } x_{ijk} \geq 0 \\ -\lambda_i (-x_{ijk})^{\beta_i} & \text{if } x_{ijk} < 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$w(p_{ij1}) = \begin{cases} \frac{p_{ij1}^{\gamma_i}}{(p_{ij1}^{\gamma_i} + (1 - p_{ij1})^{\gamma_i})^{\frac{1}{\gamma_i}}} & \text{if } p_{ij1} \geq 0 \\ \frac{p_{ij1}^{\delta_i}}{(p_{ij1}^{\delta_i} + (1 - p_{ij1})^{\delta_i})^{\frac{1}{\delta_i}}} & \text{if } p_{ij1} < 0 \end{cases} \quad (2)$$

を提案している。ただし、 $w(p_{ij2}) = 1 - w(p_{ij1})$ であり、この設定は最も一般的に用いられるものの一つである。ここでは説明のために $x_{ijk} < 0$ の場合も含めて記述した。ただし、(2) 式は $|x_{ij1}| > |x_{ij2}|$ (かつ同符号) の場合である。以下では、明示しない場合には $x_{ij1} > x_{ij2} \geq 0$ とする。

CPT の特徴は、報酬の大小による順序関係に依存して意思決定の重み $w(p_{ijk})$ の式が異なること (順位依存) に加え、(1) 式および (2) 式のように参照点である報酬額 $x_{ijk} = 0$ を境に、報酬が正の場合と負の場合とでパラメータ α_i と β_i 、および γ_i と δ_i が異なること (符号依存) である。主観的な金銭的価値である効用 $v(x_{ijk})$ はべき関数となっており、客観的な金額が大きいかほど金額の増加に鈍感になることを示している。パラメータ α_i 、 β_i はべき関数の曲率である。 λ_i は損失が利得に比べてどれほどインパクトがある

図 2. Tversky & Kahneman (1992) の確率加重関数の例
実線が $\gamma = 0.61$ の場合、点線が $\gamma = 1.0$ の場合 (線形) である。

かを表す損失回避 (loss aversion) パラメータである。パラメータ γ_i, δ_i は確率加重関数 $w(p_{ijk})$ の曲率である。一般に γ_i, δ_i は 1 以下であり確率加重関数は逆 S 字カーブを描く (図 2)。 γ_i, δ_i が 1 のときには確率加重関数は線型となる (図 2)。項目選択基準を含めて損失の場合は利得の場合と同様に議論できるため、以下では利得の場合のみに限定して議論する。

確率加重関数としては、(2) 式のほかに Prelec (1998) がいくつか提案した中で最もよく知られたものとして

$$w(p_{ij1}) = \exp(-(-\log(p_{ij1}))^{\gamma_i}) \quad (3)$$

がある (中村, 2013)。これは Toubia et al. (2013) の先行研究で利用された設定でもある。そこで、本研究では確率加重関数の形として (2) 式もしくは (3) 式のいずれかを考える。

クジ A_{ij} の選択を $u_{ij} = 0$ で、 B_{ij} の選択を $u_{ij} = 1$ で表現する、意思決定結果の 2 値変数 u_{ij} を導入する。このとき、 u_{ij} は各選択肢の価値の差分に対応した選択確率

$$P(u_{ij} = 1; \zeta_i) = \frac{1}{1 + \exp(-\phi_i(V(B_{ij}) - V(A_{ij})))} \quad (4)$$

によって

$$u_{ij} \sim \text{Bernoulli}(P(u_{ij} = 1; \zeta_i)) \quad (5)$$

と与えられると考える。ここでパラメータ ϕ_i は価値の差分に依存した選択を行う程度を表す。オリジナルの CPT (Tversky & Kahneman, 1992) においては、

価値の差分によって決定的に意思決定が行われると仮定されるが、確率的に選択がなされるという仮定をおくこともあり (e.g. Nilsson et al., 2011; Cavagnaro et al., 2013), 同一の項目に対しても同じ意思決定とならないことも考えられるため, 本研究では確率的な意思決定を仮定する. ζ_i はパラメータの集合であり, 利得の場合は $(\gamma_i, \alpha_i, \phi_i)$ である.

2.3. 曖昧クジを含む場合への CPT モデルの拡張

本研究では, 客観確率が与えられていない曖昧クジを含む状況へと上述の CPT モデルを拡張する. すなわち, 意思決定データ $\{u_{ij}\}$ に基づいて, CPT モデルにより曖昧クジについての主観確率 θ_i の測定を行う. 確率加重関数として (2) 式の設定を考える場合, 主観確率 θ_{ik} の確率加重関数として $w(p_{ijk})$ の式中の p_{ijk} に θ_{ik} を代入した

$$w(\theta_{i1}) = \frac{\theta_{i1}^{\gamma_i}}{(\theta_{i1}^{\gamma_i} + (1 - \theta_{i1})^{\gamma_i})^{\frac{1}{\gamma_i}}} \quad (6)$$

を考える. ただし, $\theta_{i1} = \theta_i, \theta_{i2} = 1 - \theta_i$ であり, 参加者 i の主観確率 θ_i は試行間で一貫すると仮定する. 確率加重関数として (3) 式の設定を考える場合も同様に, (3) 式の p_{ijk} を θ_{ik} に置き換えることで θ_{ik} の測定モデルとする.

CPT の応用では, 主観確率は確率尺度 w に対して与えられることが多い. しかし, クジや事象を定めれば, すなわち θ_{ik} が定まれば $\gamma_i = 1$ の時 $w(\theta_{ik}) = \theta_{ik}$ である. また, 客観確率 p_{ijk} と対応するのは θ_{ik} である. そこで本研究では θ_{ik} を主観確率と呼ぶことにする.

本研究で考える (6) 式の形の拡張と同様に, 曖昧クジを考え主観確率を含む形へと CPT を拡張することを目指した先行研究のモデルとして, two-stage モデル (Tversky & Fox, 1995; Kilka & Weber, 2001) がある. これは, 初めに意思決定者はある事象に対する確率判断を行い, その後その確率を意思決定の重みに変換するというモデルであり (Kilka & Weber, 2001), 意思決定の重みを意思決定に対する態度と信念 (本研究における θ_i と γ_i) とに分離することを志向するものである (Wakker, 2004). しかし, two-stage モデルの先行研究では, 主観確率 θ_i を別の意思決定課題もしくは言語報告により測定し, その値は既知として確率加重関数のパラメータ γ_i を推定するという段階推定を行う (e.g. Kilka & Weber, 2001; Abdellaoui,

Vossman, & Weber, 2005). 本研究で提案する (6) 式のように, 主観確率を含んだ CPT モデルにおいて, 1 つの意思決定課題から θ_i と γ_i を同時推定する研究は見当たらない.

本研究では two-stage モデルと異なり, 全てのモデル中のパラメータを同時に推定する. 同時推定には主要な利点が 2 つある. 第一に, 測定課題が 1 種類で済むため実験時間が短縮できる点である. 先行研究では 1 人あたり課題を 3 種類行うため計 2 時間もかかることが報告されており (Abdellaoui et al., 2005), 時間短縮の意義は大きいと考えられる. 第二に段階推定では, 第一段階で生じる推定誤差を第二段階の推定において考慮できないことによるバイアスが生じてしまうが, 同時推定ではその問題は生じない点である. ただし, 第 4 節で詳述するように, この (6) 式のモデルに対して, ランダムに実験刺激を選びシミュレーションを行ってもパラメータリカバリ (パラメータの復元) は適切に行われぬ (表 1 を参照). 適切な推定を行うためには, 適応型の刺激選択を行う必要がある.

以上をまとめると, 本研究では Tversky & Kahneman (1992) の提案した CPT に対して, 先行研究 (e.g. Nilsson et al., 2011) と同様に, 意思決定が確率的な変動をもって行われると仮定する. さらに, two-stage モデルにおいて仮定されるのと同様に (Kilka & Weber, 2001), 主観確率と確率加重関数に関するパラメータを分離する. さらに本研究では先行研究とは異なり, 全てのパラメータを同時に推定する. 主観確率を含む CPT モデルを単一の課題から同時に推定できるよう推定精度を改善するために, 本研究では新たに適応型刺激選択法を提案する.

3. CPT のフィッシャー情報行列

3.1. フィッシャー情報行列の導出

推定精度を保ちながら効率的に少ない項目数で特性や能力パラメータを推定する方法論は, 項目反応理論の分野で適応型テストとして研究されている. このとき, 参加者パラメータについて, フィッシャー情報量 (もしくは行列) の逆数 (もしくは逆行列) が漸近的な分散 (もしくは共分散行列) となるため, 推定精度を評価する指標としてフィッシャー情報行列が利用される. 本研究で提案するのは, この考え方を, 主観確率を含める形に拡張した CPT モデルに適用することである. 本節では, このために当該モデルにおける

フィッシャー情報行列の導出を行う。

u_{ij} を観測したときの参加者パラメータ ζ_i のフィッシャー情報行列は

$$\mathbf{F}(\zeta_i) = E \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta_i} \log L(\zeta_i; u_{ij}) \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta_i} \log L(\zeta_i; u_{ij}) \right\}^t \right] \quad (7)$$

と定義される。ただし t は転置を表し、 $\log L(\zeta_i; u_{ij})$ は対数尤度関数であり

$$\log L(\zeta_i; u_{ij}) = u_{ij} \log(P(u_{ij} = 1; \zeta_i)) + (1 - u_{ij}) \log(1 - P(u_{ij} = 1; \zeta_i)) \quad (8)$$

となる。また、主観確率をパラメータとして含んだ CPT の拡張モデルについて考えているため、 ζ_i の要素は 4 つであり、利得の場合には $\zeta_i = (\theta_i, \gamma_i, \alpha_i, \phi_i)$ となる。

対数尤度関数の偏微分を計算するためには $P(u_{ij} = 1; \zeta_i)$ の偏微分を求める必要がある。本モデルの場合は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \zeta_i^{(l)}} P(u_{ij} = 1; \zeta_i) \\ &= \phi_i \left[\frac{\partial}{\partial \zeta_i^{(l)}} \text{diff}_{ij} \right] P(u_{ij} = 1; \zeta_i) (1 - P(u_{ij} = 1; \zeta_i)), \quad (9) \\ & l = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \phi_i} P(u_{ij} = 1; \zeta_i) \\ &= \text{diff}_{ij} P(u_{ij} = 1; \zeta_i) (1 - P(u_{ij} = 1; \zeta_i)) \quad (10) \end{aligned}$$

となる。ただし、 $\text{diff}_{ij} = (V(B_{ij}) - V(A_{ij}))$ であり $\theta_i, \gamma_i, \alpha_i$ については同じ形の式となるため $\zeta_i^{(1)} = \theta_i, \zeta_i^{(2)} = \gamma_i, \zeta_i^{(3)} = \alpha_i$ とまとめて表した。

対数尤度関数の偏微分を計算すると、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \zeta_i^{(l)}} \log L(\zeta_i; u_{ij}) \\ &= \phi_i \left[\frac{\partial}{\partial \zeta_i^{(l)}} \text{diff}_{ij} \right] (u_{ij} - P(u_{ij} = 1; \zeta_i)), \quad l = 1, 2, 3 \quad (11) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi_i} \log L(\zeta_i; u_{ij}) = \text{diff}_{ij} (u_{ij} - P(u_{ij} = 1; \zeta_i)) \quad (12)$$

となる。よって、フィッシャー情報行列は u_{ij} の局所独立性を使い、 $D\zeta_i^{(l)} = \frac{\partial}{\partial \zeta_i^{(l)}} \text{diff}_{ij}$ とすると、

$$\mathbf{F}(\zeta_i) = \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & X_{1,3} & Y_{1,4} \\ X_{2,1} & X_{2,2} & X_{2,3} & Y_{2,4} \\ X_{3,1} & X_{3,2} & X_{3,3} & Y_{3,4} \\ Y_{1,4} & Y_{2,4} & Y_{3,4} & X_{4,4} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & X_{m,n} \\ &= \left\{ \phi_i^2 D\zeta_{ij}^{(m)} D\zeta_{ij}^{(n)} P(u_{ij}; \zeta_i) (1 - P(u_{ij}; \zeta_i)) \right\}, \\ & m = 1, 2, 3, \quad n = 1, 2, 3 \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Y_{l,4} = Y_{4,l} \\ &= \left\{ \phi_i D\zeta_{ij}^{(l)} \text{diff}_{ij} P(u_{ij}; \zeta_i) (1 - P(u_{ij}; \zeta_i)) \right\}, \\ & l = 1, 2, 3 \quad (15) \end{aligned}$$

$$X_{4,4} = \left\{ [\text{diff}_{ij}]^2 P(u_{ij}; \zeta_i) (1 - P(u_{ij}; \zeta_i)) \right\} \quad (16)$$

と表すことができる。これが 1 項目に対するフィッシャー情報行列であり、複数項目に対するフィッシャー情報行列は 1 項目に対するフィッシャー情報行列を項目数分足し合わせれば求めることができる。

ここまでの議論は、価値関数 $v(\cdot)$ および確率加重関数 $w(\cdot)$ の具体的な形を指定しない、一般的な議論であった。 $D\zeta_{ij}^{(l)} = \frac{\partial}{\partial \zeta_i^{(l)}} \text{diff}_{ij}$ を求め、シミュレーションや実データへの適用を行うためには $v(\cdot)$ および $w(\cdot)$ の関数形を決めなければならない。 $v(\cdot)$ に (1) 式のべき関数を、 $w(\cdot)$ に Tversky & Kahneman (1992) による (2) 式、もしくは Prelec (1998) による (3) 式の形を仮定した場合の $D\zeta_{ij}^{(l)} = \frac{\partial}{\partial \zeta_i^{(l)}} \text{diff}_{ij}$ の導出を付録で説明する。

3.2. 項目選択基準

1 次元の項目反応理論の場合、フィッシャー情報量が最大となる項目を選択すれば良い (Birnbbaum, 1968)。しかし多次元の場合には、フィッシャー情報行列を 1 次元の値に射影する必要がある。Segall (1996) はフィッシャー情報行列の行列式を最大化するように項目を選択するという D 最適化を提案している。つまり、1~ j 試行目までで出題した項目とデータ、およびパラメータ推定値を利用して算出したフィッシャー情報行列を $\mathbf{F}_j(\hat{\zeta}_i)$ と表現し、 $j+1$ 試行目である項目を採用した時のフィッシャー情報行列を $\mathbf{F}_{j+1}(\hat{\zeta}_i)$ と書く

$$\det \left(\mathbf{F}_j \left(\hat{\zeta}_i \right) + \mathbf{F}_{j+1} \left(\hat{\zeta}_i \right) \right) \quad (17)$$

を最大化するように項目を選択すれば良い。なお、項目反応理論で項目情報関数と呼ばれる、1 項目に対するフィッシャー情報行列 ($\mathbf{F}_{j+1}(\hat{\zeta}_i)$) は、ランクが 1 であり多次元の 2PL (parameter logistic) モデルの場合は常に行列式が 0 となってしまうため (Chalmers,

2016; 星野, 2001), テスト情報関数と呼ばれる複数項目に対するフィッシャー情報行列を利用する必要がある。

これ以外と異なる項目選択基準としては、フィッシャー情報行列のトレースを最大化する T 最適化がある (Chalmers, 2016)。D 最適化により推定精度が改善することは Segall (1996) が示しているが、D 最適化と T 最適化は異なる着眼点に基づく方法であるため (Chalmers, 2016)、推定精度にも差異があることが考えられる。そこで、本研究では D 最適化と T 最適化を扱い、項目選択基準による推定精度の違いについても検討する。

4. シミュレーション

4.1. 方法

第3節で導出したフィッシャー情報行列に基づく適応型刺激選択により推定精度が改善するかどうかを確認するためにシミュレーション実験を行った。①ランダムに実験刺激を決める方法 (以降ランダム刺激選択) と比べて適応型刺激選択は推定精度を改善させるか、およびフィッシャー情報行列によって適切に推定精度が評価できているか、②パラメータの真値が変わってもパラメータリカバリーの程度は高い状態を保てるか、および項目選択基準やモデルの確率加重関数による推定精度の違いがあるか、③報酬額を固定するという制約が適応型刺激選択の推定精度に及ぼす影響があるかという大別して3点の検討事項を本シミュレーションでは検討した。

シミュレーションの具体的な設定は以下の通りである。はじめに、ランダム刺激選択、報酬額固定という制約ありの適応型刺激選択および制約なしの適応型刺激選択で共通の事項について述べる。パラメータ $\theta_i, \gamma_i, \alpha_i, \phi_i$ の真値と試行数を先行研究 (Nilsson et al., 2011; Tversky & Kahneman, 1992) に倣い $\gamma_i = 0.61, \alpha_i = 0.88, \phi_i = 1$, 試行数 = 60 とし、また本研究では θ_i は 0.6~1 を想定しているため中点の $\theta_i = 0.8$ をベースの値とした。 θ_i を高確率の範囲に限定したのは、曖昧性忌避が高確率事象で生じやすいため (Liu & Onculer, 2015) である。なお、②では3つのパラメータはベースの値で固定し、残りの1つのパラメータの値を変えたときのパラメータリカバリを確認した。真のモデルの確率加重関数は、Tversky & Kahneman (1992) による (2) 式、もしくは Prelec

(1998) による (3) 式とした。項目選択基準は D 最適化もしくは T 最適化とした。以上は後述のパラメータ推定および項目選択について常に同じ設定であった。

さらに、実験刺激の取りうる値を先行研究 (Nilsson et al., 2011) に倣い報酬は 0~100 の 5 刻みの値に、リスクジの確率は 0.6~1 の 0.025 刻みの値に定めた。ランダム刺激選択では、予め試行数 (60 試行) 分の実験刺激を取りうる値の中から全てランダムに決定した。一方、適応型刺激選択では以下の適応型アルゴリズムを用いて実験刺激を決定した。

最初から 5 試行目までの項目は、 γ_i を変化させたときの選択確率のプロットを参考に 0.5~1 の範囲で傾きが急なものを実験刺激として選んだ。これは γ_i の推定が悪くなることが多いためである。6 項目目以降の実験刺激は以下のようにして決定した。

1) **パラメータ推定** $j-1$ ($j = 6 \sim 60$) 番目の試行までの実験刺激および選択データを利用してパラメータ推定を行った。パラメータの事前分布は、 $\theta_i \sim U(0.6, 1)$, $\gamma_i \sim U(0, 2)$, $\alpha_i \sim \text{student_}t(4, 1, 0.25)$, $\phi_i \sim \text{student_}t(4, 0, 3)$ と設定した。推定には RStan (Stan Development Team, 2018) を用いた。繰り返し数 5000 回、ウォームアップ数 2000 回で 3 系列の独立なチェーンを走らせて 5 つおきの MCMC サンプルを抽出した。この推定法はランダム刺激選択でも同様である。

2) **項目選択** j 番目の試行における実験刺激を、1) で求めたパラメータの点推定値および $j-1$ 番目の試行までの実験刺激により求めたフィッシャー情報行列を利用して、項目選択基準に従って決定した。ここで利用する点推定値は $\theta_i, \gamma_i, \alpha_i$ については事後分布の期待値、 ϕ_i については事後分布の最頻値を利用した。 ϕ_i のみ最頻値を利用したのは ϕ_i が正に歪んだ分布になることが多いためである。

3) **選択データ生成** 2) で決定した j 番目の実験刺激と真のモデルおよびパラメータ $\theta_i, \gamma_i, \alpha_i, \phi_i$ の真値を利用して、 j 番目の試行の選択データを生成した。

j の値を規定の試行数に達するまで一つずつ大きくして、1), 2), 3) を繰り返した。最後に全試行のデータを利用したパラメータの推定を行い、その収束について確認した。

なお、2) の項目選択では $x_{ij1}^{(A)}, x_{ij1}^{(B)}, x_{ij2}^{(A)}, x_{ij2}^{(B)}, p_{ij1}^{(A)}$ の 5 つの実験刺激を取りうる値の範囲で動かした時の行列式やトレースを計算できるが、今回のシミュレーションでは計算量を減らすため $x_{ij1}^{(A)}$ と $x_{ij2}^{(B)}$ はランダム

表 1. 適応型刺激選択とランダム刺激選択における推定精度

		θ		γ		α		ϕ	
		Bias	PSD	Bias	PSD	Bias	PSD	Bias	PSD
試行数 = 60	適応型刺激選択	0.018	0.023	0.026	0.037	0.048	0.062	0.364	0.471
	ランダム刺激選択	0.057	0.066	0.137	0.176	0.062	0.052	0.782	0.652
試行数 = 20	適応型刺激選択	0.036	0.039	0.057	0.054	0.098	0.074	0.649	0.826
	ランダム刺激選択	0.048	0.051	0.366	0.248	0.072	0.046	0.679	0.544

Note. 指標は真値 ($\theta = 0.8$, $\gamma = 0.61$, $\alpha = 0.88$, $\phi = 1$) からのバイアスの絶対値 ($|Bias|$) と事後標準偏差 (PSD) の平均値である。

ムに決めておき, $x_{ij1}^{(B)}, x_{ij2}^{(A)}, p_{ij1}^{(A)}$ の組について項目選択基準の意味で最適な実験刺激を選ぶこととした。ただし, $x_{ij1}^{(A)}$ と $x_{ij2}^{(B)}$ に対し $x_{ij1} = x_{ij2}$ は順位がタイになってしまうため, 候補から除いた。また, 報酬額固定の適応型刺激選択では, 選択肢間で報酬額を固定する場合は $x_{ij1}^{(A)} = x_{ij1}^{(B)}$, $x_{ij2}^{(A)} = x_{ij2}^{(B)} = 0$ という制約を, 試行間でも報酬額を固定する場合は本研究では $x_{ij1}^{(A)} = x_{ij1}^{(B)} = 100$, $x_{ij2}^{(A)} = x_{ij2}^{(B)} = 0$ という制約を項目選択の際に加えた。

シミュレーションは, ②ではパラメータの真値 ($\theta_i = 0.7, 0.8, 0.9, \gamma_i = 0.8, 1$) とモデルの確率加重関数および項目選択基準を変えて行った。①および③では, パラメータの真値はベースの値のシミュレーションのみを行った。各設定で 60 回の試行を 1 セットと考えて 50 セットシミュレーションを繰り返した。推定精度の指標としては, パラメータの真値と推定値の差 (バイアス) の絶対値と事後分布の標準偏差 (以降, 事後標準偏差) を利用した。シミュレーションには統計ソフトウェア R (R Core Team, 2018) のバージョン 3.4.4 を利用した³⁾。

4.2. 結果と考察

MCMC の有効サンプル数および $\hat{R}$ は以下の分析で概ね問題なかったため全ての結果を利用した。

検討事項①について ランダム刺激選択と適応型刺激選択の推定精度を比較するために各項目選択基準におけるバイアスの絶対値と事後標準偏差を算出したのが表 1 である。上 2 行が試行数 = 60 の場合, 下 2 行が試行数 = 20 の場合の結果である。なお真のパラメータはベースの値, 確率加重関数は Tversky &

Kahneman (1992) のもの, 項目選択基準は D 最適化である。結果を見ると, 多くのパラメータ・試行数の条件において, ランダム刺激選択よりも適応型刺激選択でバイアスの絶対値および事後標準偏差が小さくなり, 推定精度が改善していることがわかる。特に θ_i , γ_i については, ランダム刺激選択で 60 試行行うよりも, 適応型刺激選択で 20 試行行う方が推定精度が良いことが分かる。

また, 適応型刺激選択におけるフィッシャー情報行列の逆行列を求め, その対角成分の平方根を理論的な標準偏差として求めた。理論的な標準偏差と事後標準偏差をプロットしたのが, 図 3 である。図 3 を見ると, 全てのパラメータにおいて理論的な標準偏差と事後標準偏差が概ね似た値となっており, 両者の間の相関も θ_i で 0.86, γ_i で 0.82, α_i で 0.77, ϕ_i で 0.95 と高い。したがって, フィッシャー情報行列が推定精度の指標として利用可能であることが経験的に確かめられた。ただし今回のシミュレーションの場合, θ_i, γ_i については 0.02 程度過小に事後標準偏差を予測する傾向が見られた。

検討事項②について ①で見られた適応型刺激選択のパラメータリカバリの良さが, 真のパラメータの値をある程度広い範囲で動かしても保たれるかを確認するために, パラメータの値を変えた時の結果を示したのが表 2 である。試行数は全て 60 試行である。結果をみると θ_i や γ_i の真値を変化させても, バイアスはほぼ同程度に小さく, 真値を十分な精度で復元できていることがわかる。また項目選択基準およびモデルの確率加重関数による推定精度の違いも確認される。モデルの確率加重関数については, θ_i に関しては一貫した違いは見られないものの, γ_i に関してはバイアスの絶対値や事後標準偏差が Prelec (1998) の確率加重関数を用いた場合の方が大きくなってしまうことがわか

³⁾ シミュレーションで利用した R コードは <https://osf.io/h84q2/> からダウンロードできる。

図 3. 理論的な標準偏差と実際に推定した事後標準偏差に関する散布図

理論的な標準偏差はフィッシャー情報行列の逆行列の対角成分の平方根である。それぞれ (a) が θ , (b) が γ , (c) が α , (d) が ϕ に関する結果である。実線は $y=x$ の直線であり理論的な標準偏差と事後標準偏差が一致する点の集合である。

る。また項目選択基準については θ_i, γ_i とともに D 最適化の方が T 最適化よりも推定精度が良いことがわかる。

検討事項③について 報酬額を固定することの影響を調べるため、報酬額固定の適応型刺激選択と制約なしの適応型刺激選択の結果を示したのが表 3 である。これを見ると、報酬額固定にした場合、とりわけ γ_i に関してバイアスの絶対値および事後標準偏差が大きくなることがわかる。なお、モデルの確率加重関数は Tversky & Kahneman (1992), D 最適化で、パラメータの真値はベースの値である。なお、試行間で報酬額を固定する場合、全ての試行で報酬額は同じ値であり α_i の推定はできないため、欠損となる。

5. 実データ解析

5.1. 分析の概要とデータ

本節では, Erev, Ert, Plonsky, Cohen, & Cohen

(2017) の研究で用いられたうち、曖昧クジを含んだ意思決定課題におけるデータを解析対象とする。提案する適応型刺激選択による推定誤差の減少の程度を確認するために、項目をランダムな提示順に並び替えた場合の推定結果と、適応型刺激選択により項目提示順を選んだとした場合の推定結果を比較する。ここで言うのは既存のデータの再分析であり、同データで実際に項目選択がランダムに、もしくは適応的に行われたわけではない。しかし、通常の項目反応理論の応用でおかれる項目間の独立性を前提とすれば、このデータに基づいて、項目提示を適応的に、もしくはランダムに行なった場合の検討を行うことも可能となる。

Erev et al. (2017) は、意思決定に関する 14 もの現象に対して追試を行い、これらの統一的な説明を目指した研究である。彼らが挙げる実験課題の持つ 11 の要素の 1 つに、曖昧性 (ambiguity)、すなわち客観確率がわからないことが挙げられている。本節では、彼らの報酬額を選択肢間で変化させている Calibration

表 2. 適応型刺激選択における, パラメータの真値, 項目選択基準, 真のモデルを変えた時の推定精度

		D 最適化				T 最適化			
		θ		γ		θ		γ	
		Bias	PSD	Bias	PSD	Bias	PSD	Bias	PSD
$\theta = 0.7$	モデル 1	0.020	0.024	0.028	0.035	0.022	0.028	0.044	0.066
	モデル 2	0.020	0.026	0.054	0.069	0.022	0.031	0.060	0.073
$\theta = 0.8$	モデル 1	0.019	0.023	0.026	0.037	0.023	0.029	0.038	0.051
	モデル 2	0.020	0.025	0.048	0.064	0.023	0.030	0.055	0.074
$\theta = 0.9$	モデル 1	0.018	0.019	0.029	0.029	0.024	0.024	0.049	0.048
	モデル 2	0.017	0.022	0.040	0.052	0.023	0.025	0.066	0.065
$\gamma = 0.8$	モデル 1	0.018	0.020	0.046	0.050	0.023	0.023	0.081	0.083
	モデル 2	0.020	0.025	0.059	0.070	0.020	0.027	0.082	0.099
$\gamma = 1.0$	モデル 1	0.016	0.021	0.068	0.081	0.019	0.024	0.067	0.083
	モデル 2	0.023	0.027	0.093	0.114	0.025	0.030	0.094	0.125

Note. 項目選択基準は D 最適化と T 最適化, 真のモデルはモデル 1 = Tversky & Kahneman (1992) の確率加重関数を用いる場合とモデル 2 = Prelec (1998) の確率加重関数を用いる場合の条件を設定した. パラメータのベースの値を $\theta = 0.8$, $\gamma = 0.61$, $\alpha = 0.88$, $\phi = 1$ とし, 1つのパラメータの真値のみを変化させた (e.g. $\gamma = 1.0$ 条件は $\theta = 0.8$, $\gamma = 1.0$, $\alpha = 0.88$, $\phi = 1$ が真値).

表 3. 報酬額固定の有無による推定精度の違い

	θ		γ		α		ϕ	
	Bias	PSD	Bias	PSD	Bias	PSD	Bias	PSD
適応型刺激選択	0.019	0.023	0.026	0.037	0.048	0.062	0.364	0.471
報酬額固定 (選択肢間)	0.007	0.010	0.347	0.245	0.093	0.063	0.287	0.399
報酬額固定 (試行間)	0.006	0.008	0.374	0.151	NA	NA	0.273	0.384

Note. 報酬額固定の適応型刺激選択では選択肢間のみで同額とする場合と, 全ての試行で同額に固定する場合に分けた. 真値は $\theta = 0.8$, $\gamma = 0.61$, $\alpha = 0.88$, $\phi = 1$ であり, D 最適化および Tversky & Kahneman (1992) のモデルを利用した.

Study で取り上げられた課題番号 61~90 のうち, 曖昧クジを含み, 選択肢 A が確実なクジではない, すなわち報酬が得られる確率が 1 ではなく, フィードバックを行っていない初めの 5 試行のデータを解析対象とした⁴⁾. フィードバックなし (NoFB) の試行のみを対象としたのはフィードバックを与えると主観確率が変化する可能性が考えられるからである. 参加者数は

80 名, 項目数は 35 (5 試行 $\times$ 7 種類の刺激) 項目であった.

5.2. 分析方法

まず推定法について述べる. 安定して推定を行うために, 課題番号が異なる課題に対しても, NoFB 試行では主観確率は一貫していること, および報酬には損失も含むがパラメータは利得と損失で参加者内では共通の値であることを仮定した. なお, これらは強い仮定ではあるが, 少なくとも本節の分析における第一義的な目的である適応型刺激選択による推定誤差等の

⁴⁾ データは http://departments.agri.huji.ac.il/economics/teachers/ert_eyal/Raw.htm の Experiment 2 からダウンロードできる. 刺激に関する情報は同論文の Appendix G を参照

挙動の確認上、これらの仮定がおけるときの結果を条件間で比較することには意義があると考えられる。また、今回のデータセットでは刺激の種類が少なく α_i の学習が困難であったため、 $\alpha_i=0.88$ と固定した⁵⁾。

次に項目選択について述べる。①ランダム刺激選択の条件では、今回のデータセットの実験刺激と選択データの対は保ったまま、ランダムにその対を並び替えて提示順をランダム化することを表現し、試行ごとにパラメータ推定を行った。一方、②適応型刺激選択の条件においては、初めの5項目は初期項目としてランダム刺激選択と同一の実験刺激と選択データ対を用いたが、6項目目以降は第4節で説明したアルゴリズムに従って実験刺激（と選択データ対）を選び、試行ごとに推定を行った。モデルの確率加重関数には Tversky & Kahneman (1992) のものを、項目選択基準は D 最適化を利用した。ただし、適応型刺激選択において実験刺激と選択データ対は繰り返し二度以上使うことはしなかった。なお、5項目目までおよび35項目全てのデータを使った場合はデータが完全に一致するため①ランダム刺激選択と②適応型刺激選択による推定結果は一致することになる。

推定精度の指標として事後標準偏差を利用し、これらの値を各参加者各試行ごとに算出して、参加者に関して平均をとった⁶⁾。

また、CPT および上記の仮定を置いて分析することの妥当性を検討するために、事後予測モデルチェック (Posterior Predictive Model-Checking; 以下、PPMC) を行った。PPMC はベイズ的なモデルチェックの方法であり、シンプルで有用な方法である (Rubin, 1984; Gelman et al., 2014)。IRT における PPMC の方法は Sinharay, Johnson, & Stern (2006) により提案されており、本研究は CPT を IRT の枠組みによって扱うため、この方法を援用した。また、本研究で用いる指標は全項目を用いた場合の指標であるため、35項目全てのデータを利用してモデルチェックを行った。

具体的には、以下の手続きによりモデルチェックを行った。(1). パラメータ ζ を事後分布 $P(\zeta|\mathbf{u})$ からサンプリングした。 $\zeta, \mathbf{u}$ はそれぞれ ζ_i, u_{ij} をまとめたベクトルおよび行列である。本研究の場合、パラメー

タ $\zeta_i = (\theta_i, \gamma_i, \phi_i)$ を MCMC によってサンプリングした。(2). CPT および (1) でサンプリングしたパラメータを用いてデータの事後予測値 $\mathbf{u}^{rep}$ を生成した。本研究では、各参加者35項目分の事後予測値を生成した後、合計スコアに変換し、合計スコア (0~35) ごとの度数を求めた。(3). 事後予測値、観測値それぞれに基づく解離度指標 (discrepancy measure) $Dis(\mathbf{u}^{rep}), Dis(\mathbf{u})$ を求めた。本研究では、解離度指標として

$$\chi_{NC}^2 = \sum_{r=0}^R \frac{[NC_r - E(NC_r)]^2}{E(NC_r)} \quad (18)$$

を利用した。ただし、 $R = 35$ で NC_r は合計スコアが r 点の参加者の人数、 $E(NC_r)$ はその期待度数であり、その算出法は Lord & Wingersky (1984) および Sinharay (2006) が説明している。

(1), (2), (3) を MCMC サンプルの数だけ繰り返し、グラフィカルな事後予測チェック、および求めた解離度指標の値を用いて事後予測 p 値を算出することによって、モデルチェックを行った。この、グラフィカルな方法および事後予測 p 値による方法の2つは、ベイズ統計学的なデータ分析における典型的な事後予測チェック法である (Gelman et al., 2014)。事後予測 p 値とは、 $P(Dis(\mathbf{u}^{rep}) > Dis(\mathbf{u}))$ である。グラフィカルな検討はシンプルでかつ汎用的であり、重要なモデルチェックの方法である。特に合計スコアの度数と事後予測分布における合計スコアの期待度数 (事後予測期待度数) をプロットする方法が用いられ (e.g. Béguin & Glas, 2001; Sinharay et al., 2006)、事後予測値に基づく95% (もしくは90%) 事後予測区間の中に観測値が含まれているかを確認することが多い。本研究でもこの方法を利用した。一方で、1つの値で量的に評価したい場合には解離度指標を利用することができる。この解離度指標 $Dis(\mathbf{u})$ から事後予測 p 値を算出する。事後予測 p 値は、モデルがデータに当てはまっていない場合0 (もしくは1) 付近の極端な値となる。仮説検定における p 値とは意味が異なる指標ではあるが、0.05 以下 (もしくは0.95 以上) の場合にモデルが当てはまっていないと判断することが多い (Sinharay et al., 2006)。本研究で利用した解離度指標 χ_{NC}^2 は、シミュレーション実験によって真のモデルと分析に利用するモデルが異なる時に、モデルの当てはまりの悪さを検出できることが確認されており、有用な指標だとされている (Sinharay et al., 2006)。

⁵⁾ 結果で γ_i の学習もやや困難であることが示されるが、 γ_i は関心のあるパラメータであるため推定を行った

⁶⁾ 利用した R コードは <https://osf.io/h84q2/> からダウンロードできる

5.3. 結果と考察

まず事後予測モデルチェックの結果について、グラフィカルな方法、合計スコアが0点もしくは35点(満点)である参加者を含める場合と除く場合の事後予測p値による方法の、合計3つの分析に分けて述べる。第一にグラフィカルな方法については、合計スコアを横軸に、その観測度数および事後予測期待度数を縦軸に示したのが図4である。「○」が事後予測値から求めた度数の中心、点線が95%事後予測区間、「△」が観測値から求めた観測度数である。図4を見ると、合計スコアが35点の参加者1名を除いたすべての参加者について、95%事後予測区間に観測度数は含まれている。したがって、CPTモデルはデータをほぼ適切に説明できていると考えられ、本データセットに適用する上で実用に足るモデルであると判断できる。合計スコアが35点である1名(もしくは0点である2名)の参加者はどんな刺激でも曖昧クジ(リスククジ)を選ぶという、実験における操作を反映しない方略をとった可能性が高い。CPTモデルは、この35点の1名(0点は2名)を除いたほか全ての参加者について、その観測値を適切に説明できていると考えられる。

第二に、合計スコアが0点および35点の参加者を含めた場合における、 χ^2_{NC} に基づく事後予測p値を求めた。事後予測p値は0.01未満であり、モデルの当てはまりはよくない結果となった。これは、合計スコアが35点の参加者に大きく影響されたためであると考えられる。本研究の場合、合計スコア35点の事後予測期待度数はほぼ0であり、 χ^2_{NC} では事後予測期待度数で割っているので $Dis(u)$ が非常に大きな値となってしまったからである。合計スコアの端の方に大きく影響されることは、Béguin & Glas (2001)でも確認されている。

第三に、0点および35点の参加者を除いた場合の事後予測p値を同様に求めた。得られた値は0.59と妥当なものであり、CPTモデルの実用性が確認された。以上の結果から、合計スコアが極端な参加者(35点1名、0点2名)を除いた、適切に実験的操作を反映した回答を行ったと考えられる回答者については、CPTモデルを利用して本研究のデータを分析することは妥当であると判断された。

次に、パラメータ推定結果について述べる。5試行目以降の各試行について、主観確率 θ_i の事後標準偏差をプロットしたのが図5(a)である⁷⁾。横軸が試行数(5~35試行)、縦軸が事後標準偏差であり、「○」

がランダム刺激選択、「△」が適応型刺激選択における結果を表す。5試行目の事後標準偏差は一致しているが、適応型刺激選択の方がその後の事後標準偏差の減少量が大きくなっている。また、15試行目あたりからはほとんど横ばいになり、35試行目ではランダム刺激選択の結果と一致する。このように適応型刺激選択により、少ない項目数で推定誤差を効率的に減少させられることがわかる。同様に、 γ_i の事後標準偏差をプロットしたのが図5(b)である。 θ_i とは異なり γ_i では、一部を除き初めから22、3試行程度まででは適応型刺激選択で事後標準偏差の改善がある程度見られるものの、後半の試行に関しては大きな改善は見られない。これは、全体的に事後標準偏差が横ばいであり、報酬額固定の場合と同じように、実験刺激の種類が少ない状態では γ_i の学習が困難であることを示唆している。

なお、6試行目以降の各試行で4回以上選ばれた項目の数を求めた所、(初めの5試行+)11、12試行目あたりで平均が1になり、(5+)18試行目で平均が2を超える。つまり、初めの5試行でその項目が選ばれた場合、適応型刺激選択で12個刺激を選べば推定精度の意味で効率的な刺激を平均的に1種類使い果たし、18個選べば2種類使い果たすことになる。18個のうち、およそ半分は同一の刺激を提示していることになる。すなわち、このデータでは効率的な刺激が早期に使い果たされ、あとは非効率的な刺激しか残らなかったことが、特に(5+)10~20試行目あたりから事後標準偏差が減少しづらかった原因かもしれない。

6. 全体考察

6.1. 結論

本研究では、主観確率の推定精度を評価するためにCPTモデルを拡張し、そのフィッシャー情報行列(項目反応理論で言う項目情報関数)を導出して、これを利用した推定精度の評価と改善のための適応型刺激選択法を開発した。また、シミュレーション実験では報酬額固定という制約や項目選択基準およびモデルによる推定精度への影響を検討した。本研究のシミュレーションおよび実データ解析の結果から、項目反応理論

⁷⁾ 合計スコアが0点、もしくは35点の参加者を除いた77名分のデータを用いた結果を示す。合計スコアが0点、35点の参加者を含めた場合でも図5の結果の傾向は変わらなかった。

図 4. 合計スコアの観測度数と, CPT モデルを仮定した場合の合計スコアの事後予測期待度数および 95% 事後予測区間のプロット

観測度数は Erev et al. (2017) のデータセットにおける合計スコアの横軸の値の点の参加者の人数, 事後予測期待度数は CPT モデルから予測される合計スコアの度数の中心, 95% 事後予測区間は CPT モデルから予測される合計スコアの度数の予測区間を表す。

の枠組みを利用してフィッシャー情報行列を求めることで推定精度の評価が可能となり, 適応型刺激選択により推定精度を改善できることが示された。また, CPT による主観確率の推定においてはモデルの確率加重関数や項目選択基準による推定精度の違いが存在すること, 報酬額固定という制約により推定精度が急激に悪くなることが明らかにされた。

この主張の根拠について以下では論じる。シミュレーション①ではランダム刺激選択よりも適応型刺激選択でバイアスが減少し (表 1), シミュレーション②からパラメータの真値を広い範囲で動かしても推定精度は良く (表 2), 実データ解析の結果からは特に主観確率 θ_i について, ランダム刺激選択よりも適応型刺激選択の方が事後標準偏差の減少が早い (図 5) ことが明らかとなり, 適応型刺激選択による推定精度の改善が確認された。項目反応理論ではランダム刺激選択より適応型刺激選択で推定精度が良いことが先行研究で報告されているが (Mulder & van der Linden, 2009), 主観確率を含んだ CPT においても同様の結果が確認されたことになる。適応型刺激選択により, 段階的な推定ではなく, 全てのパラメータの同時推定が可能となった。2.3 節で述べたように段階推定には,

実験に 1 人あたり計 2 時間といったような多くの時間を要すること, 第一段階における推定誤差が第二段階の意思決定の重みや主観確率の推定に伝播してしまうことという 2 点の問題があった。本研究で提案する方法では単一の課題から同時推定を行うことが可能になるため, これらの問題は生じない。ただし, 実データ解析においては, 用いたデータセットが CPT を適用する目的の実験ではなかったため, 推定精度の意味で良い実験刺激の種類および数が少なく, とりわけ γ_i においては顕著な効果は出なかったと考えられる。

また, 推定精度の評価については, フィッシャー情報行列の逆行列の対角要素の平方根が各パラメータの事後標準偏差と強く相関しており, フィッシャー情報行列が推定精度の評価に利用可能であることが示された (図 3)。最尤推定法の文脈で漸近正規性および有効性からフィッシャー情報行列の逆行列が共分散行列に収束することは知られている。シミュレーションの結果から, 本研究で利用したベイズ推定による事後標準偏差も, 経験的にフィッシャー情報行列と対応づけて評価できることが明らかとなった。さらにフィッシャー情報行列は参加者の反応 u_{ij} に依存しない量であるため, 実験実施前に推定精度を評価することが可

図 5. ランダムに提示順を決める方法（ランダム刺激選択）と、D 最適化により提示順を決める方法（適応型刺激選択）における、試行（5～35 試行）ごとの各参加者の事後標準偏差の平均値のプロット

(a) は θ , (b) は γ に関する結果である。なお適応型刺激選択における最初の 5 項目は初期項目としてランダム刺激選択と同一の項目を選択した。実線は、全試行（35 試行）のデータを使った推定における事後標準偏差である。

能である。ただし、本研究の場合 0.02 程度と非常に小さい値ながらも過小に予測する傾向が見られたため、実際にはシミュレーションによってどのような値をとる傾向があるかを確認してから評価および実験デザインの参考情報として利用することが推奨される。

シミュレーション②では確率加重関数および項目選択基準の選択が推定精度へ影響することが示された（表 2）。CPT の適応型刺激選択を行った Toubia et al. (2013) では Prelec (1998) の確率加重関数が利用されていたが、本研究の経験的な結果からは Tversky & Kahneman (1992) の確率加重関数の方が推定精度が良かった。また、Toubia et al. (2013) では検討されていない項目選択基準については、D 最適化の方が T 最適化よりも良かった⁸⁾。

シミュレーション③では報酬額固定という制約によ

り推定精度が悪くなることが確認された（表 3）。Liu & Onculer (2015) の実験や, Lauriola et al. (2007) では報酬額を固定もしくは明示しないという測定法を利用していたが、これは本研究の結果からは望ましくないと考えられる。特に、Lauriola et al. (2007) はロジスティック関数を利用したモデルで分析を行っており、これは本研究のモデルと類似しているため、報酬額を固定することは推定の効率性の観点から問題であった可能性がある。

以上の結果から、曖昧性忌避に関する研究に対し

⁸⁾ シミュレーション②では、パラメータの真値を変化させて推定精度を確認したが、例えば一様分布からパラメータの真値を生成して評価することも考えられる。また、 θ_i が 0.5 より低い場合についても検討することも考えられる。

てCPTもしくはCPTに類似した認知モデルを適用する際には、本研究で導いたフィッシャー情報行列によって推定精度を評価し、実験刺激を推定精度の意味で最適化することが有用であると言える。Liu & Onculer (2015) のように統計的推論を利用しない方法も使われていたが、こうした方法では推定精度が議論できない。CPTのような認知モデルを導入し統計的推論を行うことで、推定精度を(事前に)評価することが可能になる。また、報酬額固定という従来利用されてきた制約は推定精度の観点からは望ましくないため、今後の実験では報酬額を変化させて価値関数まで推定するという方法が検討されることが望ましいと言える。

6.2. 本研究の長所と限界および今後の発展

本研究の方法の副次的な長所が二つある。第一に、フィッシャー情報行列の導出自体はCPTやIRTのみに限った議論ではないため、本研究の結果を援用して他のモデルでも適応型刺激選択を構築し、精度が改善される程度をシミュレーションにより経験的に確認できることである。第二に、提案手法では項目反応理論のように項目プールを構築する必要がないことである。これは報酬額や確率のスケールは参照点として0の意味も定まっているためである。そのため、項目反応理論で多くのコストがかかる項目プール作成という作業は不要になる。

本研究の限界は二点挙げることができる。第一に、実データへの適用例は先行研究のデータの再分析であったため、その実験刺激がCPTモデルの推定上、十分良い設定とは言えなかったこと、および比較的強い仮定が求められたことである。課題番号が異なる場合、事象に対する信念はリセットされる可能性は十分考えられ、主観確率が課題間でも一貫しているという仮定は、主観確率の事後標準偏差に対してもバイアスを生じさせた可能性は否定できない。今後のさらなる研究では、項目選択基準に照らして良好な多くの種類の刺激のセットを用意した実験データにおいて解析を行うことが望まれる。第二に、CPTと他のモデルとの比較をしていないことである。推定精度の改善が確認されたが、それはCPTを使った場合という狭い範囲での検討であり、他に推定精度や予測力の意味で良いモデルが存在するかもしれない。また、報酬額固定が望ましくないという議論もCPTを使う場合という条件付きの議論であり、統計的推論を利用しない場合

にも報酬額固定が望ましくないとは強く主張することはできない。ただし、CPTは意思決定課題で広く利用され、その有用性が広く受け入れられている枠組みであり、実際に実データ解析においてもCPTのデータへの当てはまりは悪くなかった(図4)。CPTを導入することで推定精度の統計学的評価が可能になるという長所は強調されてよいと考えられる。

今後の研究の方向性については2点指摘しておきたい。一つは計算量についてである。フィッシャー情報行列の行列式やトレース計算と、パラメータ推定をMCMCによって行う際に、本研究で利用した環境では試行数が多い場合で10秒以上を要する。フィッシャー情報行列については、報酬の候補は $x_{ij1}^{(B)}, x_{ij2}^{(A)}$ それぞれで19種類であり $p_{ij1}^{(A)}$ で16種類であり、約6000個もの行列が計算される。また、MCMCについては、第 j 試行目まで利用したパラメータ推定では試行数 j が増加するほど推定に時間がかかってしまう。候補点の多さに対する解決策としては、報酬および確率の候補を予め少数に絞っておくことがありうる。本モデルの特徴として項目プールは参加者の実際の回答を経ることなく構築可能であるから、例えば今回行ったシミュレーションの結果から一定回数以上選ばれた項目のみを残すという方法が考えられる。様々な特性を持つ参加者に対して安定して利用でき、かつ実験刺激が偏ったり非現実的な値になったりしない項目プールの構築方法の提案が望まれる。MCMCが試行数 j の増加に伴い計算時間が増える問題については、変分ベイズ推定(中島, 2016)が解決策として挙げられる。解析的に近似事後分布を表現することにより逐次的な更新が可能となり、試行数が増えても計算時間はそれほど多くはならないと考えられる。

二つ目は、主観確率を含んだCPTのパラメータの解釈についてである。本研究では $\gamma_i=1$ の時の θ_i を主観確率と解釈したが、 $\gamma_i \neq 1$ のときの γ_i および θ_i がどのような心理学的構成概念として解釈できるかは明確ではない。曖昧性忌避に関する研究では曖昧性忌避を実験操作により抑制できる可能性が示唆(Liu & Onculer, 2015)されている。曖昧性忌避を抑制することは加法的な主観確率を測定するために重要であるため、曖昧性忌避の研究に対する信頼性を評価および改善して行う必要がある。そのためにCPTが利用できることを示したが、さらにCPTの利点としてモデル上曖昧性忌避と主観確率を分離できている可能性が挙げられる。主観確率 θ_{ik} は客観確率 p_{ijk} と対応し

ており、確率加重関数 $w(\cdot)$ による重みづけを受けていないからである。この場合、 γ_i の値により加法的であるか決まるため、 γ_i が曖昧性忌避に関するパラメータと考えられるが、実証するためには理論的な根拠および曖昧性忌避に関する現象が CPT における γ_i を指標にしても再現されるか等を示す必要がある。パラメータの心理学的な解釈については、Gonzalez & Wu (1999) が参考になり、また Gonzalez & Wu (1999) のモデルは two-stage モデルに関する研究でもしばしば用いられる (e.g. Abdellaoui et al., 2005)。段階推定を行った先行研究では (e.g. Kilka & Weber, 2001; Abdellaoui et al., 2005)、主観確率 θ_i が非加法的であることが示されている。これは、曖昧性-確率トレードオフ課題 (Lauriola & Levin, 2001) のような曖昧性忌避が生じる先行研究と同様の状況で測定されるためであると考えられる。本研究で行った同時推定において、主観確率 θ_i が加法的かどうかは今後の検討課題であるが、少なくとも段階推定の場合とは異なる性質を持つことが考えられる。このような本モデルのパラメータの解釈や、より解釈が容易なモデルに関する研究は推定精度に関する議論と並行で行われるべきである。また、本研究で開発した適応型刺激選択がさらなる拡張モデルにおいても、適用できる可能性があることを強調しておきたい。

謝 辞

本研究は JSPS 科研費 17H04787, 18H03612 の助成を受けたものである。

参 考 文 献

- Abdellaoui, M., Vossman, F., & Weber, M. (2005). Choice-based elicitation and decomposition of decision weights for gains and losses under uncertainty. *Management Science*, **51**, 1384–1399.
- Barberis, N.C. (2013). Thirty years of prospect theory in economics: A review and assessment. *Journal of Economic Perspectives*, **27**, 173–196.
- Béguin, A.A. & Glas, C.A.W. (2001). MCMC estimation and some model-fit analysis of multidimensional IRT models. *Psychometrika*, **66**, 541–561.
- Birnbaum, A. (1968). Some latent trait models and their use in inferring an examinee's ability. In F.M. Lord & M.R. Novick. *Statistical Theories of Mental Test Scores.*, Reading, MA: Addison-Wesley.
- Cavagnaro, D.R., Gonzalez, R., Myung, J.I., & Pitt, M.A. (2013). Optimal decision stimuli for risky choice experiments: An adaptive approach. *Management Science*, **59**, 358–375.
- Chalmers, R.P. (2016). Generating adaptive and non-adaptive test interfaces for multidimensional item response theory applications. *Journal of Statistical Software*, **71**, 1–39. doi:10.18637/jss.v071.i05
- Ellsberg, D. (1961). Risk, ambiguity, and the savage axioms. *Quarterly Journal of Economics*, **75**, 643–669.
- Erev, I., Ert, E., Plonsky, O., Cohen, D., & Cohen, O. (2017). From anomalies to forecasts: Toward a descriptive model of decisions under risk, under ambiguity, and from experience. *Psychological Review*, **124**, 369–409.
- Gelman, A., Carlin, J.B., Stern, H.S., Dunson, D.B., Vehtari, A., and Rubin, D.B. (2014). *Bayesian data analysis (3 ed)*. Boca Raton: CRC Press.
- Gilboa, I (2009). *Theory of decision under uncertainty*. Cambridge: Cambridge University Press. (ギルボア, I. 川越 敏司 (訳) (2014). 不確実性下の意志決定理論 勁草書房)
- Glockner, A. Pachur, T. (2012). Cognitive models of risky choice: Parameter stability and predictive accuracy of prospect theory. *Cognition*, **123**, 21–32.
- Gonzalez, R. & Wu, G. (1999). On the shape of the probability weighting function. *Cognitive Psychology*, **38**, 129–166.
- 星野崇宏 (2001). 多次元項目反応理論での相関のある特性値の線型結合に関するテスト情報関数. 教育心理学研究, **49**, 491–499.
- 加藤健太郎・山田剛史・川端一光 (2014). R による項目反応理論. オーム社
- Kilka, M. & Weber, M. (2001). What determines the shape of the probability weighting function under uncertainty?. *Management Science*, **47**, 1712–1726.
- Lauriola, M. & Levin, I.P. (2001). Relating individual differences in attitude toward ambiguity to risky choices. *Journal of Behavioral Decision Making*, **14**, 107–122.
- Lauriola, M., Levin, I.P., & Hart, S.S. (2007). Common and distinct factors in decision making under ambiguity and risk: A psychometric study of individual differences. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, **104**, 130–149.
- Liu, Y. & Onculer, A. (2015). Ambiguity attitudes over time. *Journal of Behavioral Decision Making*, **30**, 80–88.
- Lord, F.M. & Wingersky, M.S. (1984). Comparison of IRT true-score and equipercentile observed-score “equatings”. *Applied Psychological Measurement*, **8**, 453–461.
- Mulder, J. & van der Linden, W.J. (2009). Multidimensional adaptive testing with optimal design

- criteria for item selection. *Psychometrika*, **74**, 273–296.
- Murphy, R.O. & Brincke, R.H.W. (2017). Hierarchical maximum likelihood parameter estimation for cumulative prospect theory: Improving the reliability of individual risk parameter estimates. *Management Science*, **64**, 308–326.
- 中村國則 (2013). 確率加重関数の理論的展開. 心理学評論, **56**, 42–64.
- 中島伸一 (2016). 変分ベイズ学習 (機械学習プロフェッショナルシリーズ). 講談社.
- Nilsson, H., Rieskamp, J., & Wagenmakers, E.J. (2011). Hierarchical Bayesian parameter estimation for cumulative prospect theory. *Journal of Mathematical Psychology*, **55**, 84–93.
- Prelec, D. (1998). The probability weighting function. *Econometrica*, **66**, 497–527.
- Ramsey, F.P. (1931). *Truth and probability*. In Ramsey, F.P. (Ed.), *The foundations of mathematics and other logical essays*. (pp.156–198). New York: Harcourt Brace.
- Rubin, D.B. (1984). Bayesianly justifiable and relevant frequency calculations for the applied statistician. *Annals of Statistics*, **12**, 1151–1172.
- R core Team (2018). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- Savage, L.J. (1972). *The foundations of statistics* (2nd ed). New York: Dover Publications.
- Segall, D.O. (1996). Multidimensional adaptive testing. *Psychometrika*, **61**, 331–354.
- Seo, K. (2009). Ambiguity and second-order belief. *Econometrica*, **77**, 1575–1605.
- Stan Development Team (2018). RStan: the R interface to Stan. R package version 2.17.0.
- 繁榊算男 (1988). あいまいさの認知における合理性. 行動計量学, **16**, 39–48.
- 繁榊算男 (1995). 意思決定の認知統計学 (行動計量学シリーズ). 朝倉書店.
- Sinharay, S. (2006). Bayesian item fit analysis for unidimensional item response theory models. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, **59**, 429–449.
- Sinharay, S., Johnson, M.S., & Stern, H.S. (2006). Posterior predictive assessment of item response theory models. *Applied Psychological Measurement*, **30**, 298–321.
- 竹村和久 (2015). 経済心理学—行動経済学の心理的基盤—. 培風館.
- Toubia, O., Johnson, E., Evgeniou, T., & Delquie, P. (2013). Dynamic experiments for estimating preferences: An adaptive method of eliciting time and risk parameters. *Management Science*, **59**, 613–640.
- Tversky, A. & Fox, C.R. (1995). Weighing risk and uncertainty. *Psychological Review*, **102**, 269–283.
- Tversky, A. & Kahneman, D. (1992). Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty. *Journal of Risk and Uncertainty*, **5**, 297–323.
- Tversky, A. & Wakker, P. (1995). Risk attitudes and decision weights. *Econometrica*, **63**, 1255–1280.
- van der Linden, W.J. & Hambleton, R.K. (Eds.) (1997). *Handbook of Modern Item Response Theory*. New York: Springer.
- van der Linden, W.J. (2018). Adaptive testing. In: W.J. van der Linden (Ed). *Handbook of item response theory, volume three: application*. (pp.197–228). Boca Raton, FL: CRC Press.
- von Neumann, J. & Morgenstern, O. (1944). *Theory and games and economic behavior*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Wakker, P.P. (2004). On the composition of risk preference and belief. *Psychological Review*, **111**, 236–241.
- Wakker, P.P. & Tversky, A. (1993). An axiomatization of cumulative prospect theory. *Journal of Risk and Uncertainty*, **7**, 147–176.

(2018年11月28日受理, 2019年6月16日採択)

(この間審査3回・審査期間合計76日)

付 録

以下では $x_{ij1} > x_{ij2} \geq 0$ と仮定する. $V(A_{ij}) = x_{ij1}^{(\text{A})\alpha_i} w(p_{ij1}^{(\text{A})}) + x_{ij2}^{(\text{A})\alpha_i} (1 - w(p_{ij1}^{(\text{A})}))$ である. α_i による diff_{ij} の偏微分は確率加重関数 $w(\cdot)$ を特定することなく展開できる. 価値関数 $v(\cdot)$ がべき関数であるため

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \text{diff}_{ij} &= x_{ij1}^{(\text{B})\alpha_i} \log(x_{ij1}^{(\text{B})}) w(\theta_i) \\ &\quad + x_{ij2}^{(\text{B})\alpha_i} \log(x_{ij2}^{(\text{B})}) (1 - w(\theta_i)) \\ &\quad - x_{ij1}^{(\text{A})\alpha_i} \log(x_{ij1}^{(\text{A})}) w(p_{ij1}^{(\text{A})}) \\ &\quad - x_{ij2}^{(\text{A})\alpha_i} \log(x_{ij2}^{(\text{A})}) (1 - w(p_{ij1}^{(\text{A})})) \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

となる.

θ_i による diff_{ij} の偏微分を求めるためには, 例えば Tversky & Kahneman (1992) のモデルを仮定すれば, $S = \theta_i^{\gamma_i} + (1 - \theta_i)^{\gamma_i}$ において,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_i} w(\theta_i) &= \frac{\gamma_i \theta_i^{\gamma_i-1} - S^{-1} (\theta_i^{\gamma_i-1} - (1-\theta_i)^{\gamma_i-1}) \theta_i^{\gamma_i}}{S^{\frac{1}{\gamma_i}}} \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

となる. 同様に $\frac{\partial}{\partial \theta_i} w(1 - \theta_i)$ も計算できる. この式

を, $\frac{\partial}{\partial \theta_i} \text{diff}_{ij}$ の式中の $\frac{\partial}{\partial \theta_i} w(\theta_i)$ に代入して計算すれば良い.

γ_i による diff_{ij} の偏微分は, Prelec (1998) のモデルを仮定すれば

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_i} w(\theta_i) = -\exp\{(-\log(\theta_i))^{\gamma_i}\}(-\log(\theta_i))^{\gamma_i} \log(-\log(\theta_i)) \quad (\text{A3})$$

と計算できる.

一方, Tversky & Kahneman (1992) のモデルでは $\{\theta_i^{\gamma_i} + (1 - \theta_i)^{\gamma_i}\}^{\frac{1}{\gamma_i}} = S^{\frac{1}{\gamma_i}}$ を γ_i により偏微分する必要がある. そこで, $y(\gamma) = f(\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}$ の γ による微分を考える. 両辺の $\log$ をとって, γ により微分すると

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} y(\gamma) = \left(-\frac{1}{\gamma^2} \log(f(\gamma))\right) + \frac{1}{\gamma} \frac{1}{f(\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} f(\gamma) f(\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (\text{A4})$$

となる. この公式を利用して

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \gamma_i} S^{\frac{1}{\gamma_i}} \\ &= -\frac{1}{\gamma_i^2} \log(S) S^{\frac{1}{\gamma_i}} + \frac{1}{\gamma_i S} (\theta_i^{\gamma_i} \log(\theta_i) \\ & \quad + (1 - \theta_i)^{\gamma_i} \log(1 - \theta_i)) S^{\frac{1}{\gamma_i}} \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

と求まるため, $\frac{\partial}{\partial \gamma_i} w(\theta_i)$ も

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \gamma_i} w(\theta_i) \\ &= \frac{\theta_i^{\gamma_i} \log(\theta_i)}{S^{\frac{1}{\gamma_i}}} \\ & \quad + \frac{\frac{1}{\gamma_i^2} \log(S) \theta_i^{\gamma_i}}{S^{\frac{1}{\gamma_i}}} \\ & \quad - \frac{\frac{1}{\gamma_i} S^{-1} (\theta_i^{\gamma_i} \log(\theta_i) + (1 - \theta_i)^{\gamma_i} \log(1 - \theta_i)) \theta_i^{\gamma_i}}{S^{\frac{1}{\gamma_i}}} \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

と求まり, γ_i による diff_{ij} の偏微分も計算できる.

$x_{ij1} > x_{ij2} \geq 0$ 以外の場合でも同様に計算できる (Tversky & Kahneman, 1992). $0 \leq x_{ij1}^{(A)} < x_{ij2}^{(A)}$ の場合は, $V(A_{ij}) = v(x_{ij2}^{(A)})w(1 - p_{ij1}^{(A)}) + v(x_{ij1}^{(A)})(1 - w(1 - p_{ij1}^{(A)}))$ である. $0 \geq x_{ij1}^{(A)} > x_{ij2}^{(A)}$ の場合は, $V(A_{ij}) = v(x_{ij2}^{(A)})w(1 - p_{ij1}^{(A)}) + v(x_{ij1}^{(A)})(1 - w(1 - p_{ij1}^{(A)}))$ であるが, 損失状況であることに注意する ((1), (2) 式を参照). $x_{ij1}^{(A)} > 0 > x_{ij2}^{(A)}$ の場合は, $V(A_{ij}) = v(x_{ij1}^{(A)})w(p_{ij1}^{(A)}) + v(x_{ij2}^{(A)})w(1 - p_{ij1}^{(A)})$ である. クジ B_{ij} の価値 $V(B_{ij})$ についても同様に定義し, これらの式から diff_{ij} およびその偏微分の値が計算できる.