多肢選択テストの部分的知識による得点増加 を評価するための数学モデル

有 田 清三郎*, 斎 藤 泰 一**, 那 須 郁 夫***

MATHEMATICAL MODELS TO ASSESS THE CONTRIBUTION OF THE
PARTIAL KNOWLEDGE OF EXAMINEES TO THE
SCORES OF MULTIPLE-CHOICE TEST

Seizaburo ARITA*, Taiichi SAITO** and Ikuo NASU***

To assess the contribution of the partial knowledge of examinees to the scores of multiple-choice tests, we have proposed two mathematical models, the Binary-model and the Terminal model. These models both were based on the probability with which an examinee recognizes a choice correctly, and on the arrangement of choices.

As an application of these models, the distributions of scores were given for the one-best-response type and the two-responses type of questions of the national board examinations for the medical and dental practices. The distributions of scores by these two models were compared.

1. は じ め に

医師・歯科医師国家試験をはじめ各種の国家試験や資格検定試験に多肢選択方式による客観テストが採用されつつある。記述式テストには千差万別の解答が準備されその評点が採点者の主観的判断に大きく影響されるのに対して、多肢選択テストでは、正解は問題がつくられたと同時に決定され、採点が客観的で、コンピューター採点などにより採点の労力が軽減されるという利点がある。しかしこの多肢選択方式は与えられた選択肢の中に正解が必ず存在することから、受験者は正解を知らなくてもあて推量で正解できる場合が生ずる。

多肢選択テストの得点に関する代表的な数学モデル

* 川崎医科大学数学教室 (Department of Mathematics, Kawasaki Medical School)

** 川崎医科大学薬理学教室 (Department of Pharmacology, Kawasaki Medical School)

*** 日本大学松戸歯学部衛生学教室 (Department of Dental Public Health, Nihon University, School of Dentistry at Matsudo)

この研究は財団法人操風会教育研究奨励金の援助を受けて行なわれた。

はランダム・ゲッシング・モデルである(印東他, 1977)。

このモデルは次の仮定に基づいている。

仮定 1) ある特定の受験者に対して、与えられた問題は次の二つのグループにわけられる。そのひとつは、受験者がその問題を正しく理解し、したがって正しく解答できる問題のグループ(わかった問題)で、もうひとつはその問題が理解できず、したがってどれが正解かを知らない問題のグループ(わからなかった問題)である。

仮定 2) わかった問題については受験者は必ず正答できるものとする。すなわちわかった問題は確率 1 で正答できるものとする。

仮定 3) わからない問題については受験者はあて推量で解答するものとする。すなわちいま M 個の解答が用意され、そのうち 1 個が正解であるとき、受験者があて推量で運よく正しい解答を選んで正答する確率を $1/M$ 、正しくない解答を選んで誤答する確率を $1-1/M$ とする。

仮定 4) 受験者は問題を理解しようといまいと、与えられた問題は必ず解答するものとする。すなわち無解答はないものとする。

仮定 5) わからなかった問題に対してあて推量で

解答を選ぶ方法は各問に対して独立であるとする。

ランダム・ゲッシング・モデルでは受験者は正解がわかった問題を確率1で、わからなかった問題を確率 $1/M$ のあて推量で正答することになるから、受験者の得点は正答率1の確実な知識による得点と、正答率 $1/M$ のあて推量による得点とが合計されたものとなる。このモデルによる正答数は2項分布に従い、実際に得られた正答数から、正解者グループの割合の推定問題などが研究されている(池田, 1973)。

しかしながら現実の多肢選択テストでは、正答率は上の仮定1)~3)のように1か $1/M$ ではなく、解答の一部分がわかった問題について受験者は二者択一、三者択一などを行うわけであるから、このランダム・ゲッシング・モデルの正答率に、さらに $1/2, 1/3, \dots, 1/(M-1)$ 及び0の正答率を加えたものが、受験者の現実的な正答率を表わしているように思われる。いま、正答率 $1, 1/2, \dots, 1/M$ 及び0で解答される問題数の割合の組 $(P_1, P_2, \dots, P_{M-1}, P_M, P_0) = P$ を多肢選択テストにおける受験者の正答率分布と名づける。

このような部分的な知識の割合を正答率 $(1/2, 1/3, \dots, 1/(M-1))$ のそれで表現し、その得点分布について考察した研究には、Chernoff (1962)などがあげられるが、ここでは逆に、不十分な知識をまず選択肢の正、不正、不明の判断とその配列によって表現し、これらの知識の状態の生起確率を導出するために、2項モデル、ターミナル・モデルという二つの数学モデルを提案する。

多肢選択テストは、その出題形式により、1正解形式(単純真偽形式)、組合せ形式などに分類されるが、本研究では1正解形式と多真偽形式のひとつのタイプをとりあげ、上記2つのモデルによる正答率分布とその得点分布を求め、比較検討した。この二つのモデルによって不十分な知識の度合いを正答率の割合で数量的に表現し、正答率 $1/i$ の存在を具体的に明示した。また2項モデルでは、通常行われている平均得点を、ターミナル・モデルでは識別した選択肢の数に応じて選択肢テストにおける思考過程の一例を示した。また数値例によって、これらのモデルにより出題形式による得点の変化を示した。

2. 多肢選択テスト

多肢選択テストの例をあげよう。

問) 次の地名で岡山県にない町村名はどれか?

- (1) 宇野
- (2) 内海
- (3) 瀬戸
- (4) 加茂
- (5) 阿波

- a (1), (2) b (1), (5) c (2), (3)
d (3), (4) e (4), (5)

最初に多肢選択テストで使用する語句を次のように定義する。多肢選択テストは「設問」、「選択肢」、「解答コード」の3部分から構成されているものとする。上の例での下線部の個所を設問、(1), (2), ..., (5)を選択肢、a, b, ..., eのそれぞれを解答コード、(a, b, ..., e)を解答コード群と名づける。解答コード群にはいろいろのタイプがあるが、最近の医師・歯科医師国家試験に採用されているのは次の5つのタイプである。

- Type 1 a (1) b (2) c (3) d (4) e (5)
Type 2 a (1), (2) b (1), (5) c (2), (3)
d (3), (4) e (4), (5)
Type 3 a (1), (2), (3) b (1), (2), (5)
c (1), (4), (5) d (2), (3), (4)
e (3), (4), (5)
Type 4 a (1), (3), (4) b (1), (2)
c (2), (3) d (4)のみ
e (1)~(4)のすべて
Type 5 a (1) b (2) c (3) d (4)
e (1)~(4)のいずれでもない

Type 1は1正解形式、Type 2~4は多真偽形式、Type 5はType 1の変形である。またType 1~3は5個の選択肢、Type 4, 5は4個の選択肢で構成されているが、どのタイプの解答コードも(a, b, ..., e)となっているので、最終的に選ぶ選択肢として考えれば、いずれのタイプも5肢選択となっている。

各選択肢は正答肢か不正肢のいずれかであるから、出題形式の観点からなげめると、1正解形式では与えられた選択肢のいずれか1つが正答肢で、他は不正肢である。多真偽形式では選択肢のなかに複数個の正答肢があり、Type 2~4のように解答が選択肢の組合せ(解答コード群)で与えられている。

つぎに受験者側の知識の状態という観点から検討する。正答肢を知っている状態を□、不正肢を知っている状態を⊗、選択肢が正答か誤りかわからない状態

を?で印すことにすると、受験者の知識は□, ☒, ?の配列で表現できる。我々はこの□, ☒, ?の配列を受験者の『知識の状態』と名づける。□, ☒, ?の配列は出題形式による解答コードの構成の仕方によって限定されてくるため、知識の状態は□, ☒, ?のあらゆる組合せをとるとは限らない。すなわち、知識の状態は出題形式によって制約される。

多肢選択テストの出題形式が設定され、受験者の知識の状態が与えられると、未知な部分をランダム・ゲッシングすることによって知識の状態に対する正答率が得られる。

従来の単純ランダム・ゲッシング・モデルでは確実な知識をもっている場合と、全く知らない場合の2つの状態だけで構成されている。すなわち、解答コードがM個ある場合、その知識の状態に対応する正答率は確実な知識で、すなわち確率1で正答するか、全く知らないためあて推量で、すなわち確率1/Mで正答するかのいずれかであったが、現実には確実な知識だけではなく解答の一部分は知っているという不十分な知識の状態が想定される。このような不十分な知識を用いた、ランダム・ゲッシングに基づく正答率は、1か1/Mではなく、1, 1/2, 1/3, ..., 1/Mまたは0となる。

3. 知識の状態と正答率

M個の解答コードで構成されている多肢選択テストを考える。選択肢は m 個あり、そのうち正答肢は r 個あるものとする。いま受験者がこのテストの t 個の選択肢について正答、誤り、不明の判断をしたとし、そのうち k 個の選択肢の正答または誤りの判断が正しくできたとする。また正しく理解することができた k 個の選択肢のうち、 j 個が正答肢、 $(k-j)$ 個が不正肢であったとする。このときこの受験者の知識の状態を、 $S_{kj}(t)$ で表わし、この知識の状態の生起確率を $p_{kj}(t)$ 、この知識の状態にもとづく正答率を q_{kj} とする。 t を固定させたとき、 $S_{kj}(t)$ 、 $p_{kj}(s)$ をそれぞれ S_{kj} 、 p_{kj} と略記する。 S_{kj} 、 p_{kj} 、 q_{kj} の関係を図1で示す。

不十分な知識の場合、未知な部分をランダム・ゲッシングすることとする。正答率 q_{kj} は1, 1/2, ..., 1/i, ..., 1/M及び0のいずれかの値をとるが、正答率 q_{kj} が1/iとなる知識の状態をとくに $S_{kji}(t)$ 、またその生起確率を $p_{kji}(t)$ とかくことにする。ここに $k=0, 1, \dots, m$; $j=0, 1, \dots, r$; $i=1, 2, \dots, M$ である。 $i=1, 2, \dots, M$ のとき正答率1/iの知識の状態の集

図1. m 個の選択肢 (そのうち r 個が正答肢) が与えられたときの知識の状態と正答率

合を事象 E_i , E_j の生起する確率を $P_i(t)$ で表わすと、 $P_i(t)$ は正答率 1/i の知識の状態の生起確率の和で表わされる。

$$P_i(t) = \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^r p_{kji}(t) \quad (3.1)$$

確率1で正答肢を誤りとみなす場合には、誤判断により必ず誤答するため、正答率が0となる。正答率0の知識の状態の集合を E_0 とし、 E_0 の生起する確率を $P_0(t)$ で表わす。

$P_i(t)$ または $P_0(t)$ は、受験者が t 個の選択肢について、正答、誤り及び不明とわかったときの正答率1/iまたは0で正解できる割合である。 $P_i(t)$ は出題された問題数に対して、正答率1/iで正解できる問題数の割合、あるいは1つの問題に対して正答率1/iで正解できる受験者の割合とも考えられる。

このような確率の組 $(P_1(t), P_2(t), \dots, P_M(t), P_0(t)) = \mathbf{P}(t)$ を考え、これを受験者の『正答率の分布』と名づける。この正答率分布は、受験者の知識の状態の割合を記述したもので、 $P_1(t)$ は確実な知識の割合、 $P_2(t), \dots, P_{M-1}(t)$ は不十分な知識の割合、 $P_M(t)$ は全く知識のなかった割合を示す。

従来の単純ランダム・ゲッシング・モデルをこの正答率分布で表現すれば、 $P_2(t) = \dots = P_{M-1}(t) = 0$, $P_0(t) = 0$ すなわち

$$\mathbf{P}^* = (P_1(t), 0, \dots, 0, 1 - P_1(t), 0)$$

となる。この意味からもこの正答率分布は単純ランダム・ゲッシング・モデルを拡張したものとなっている。

正答率の平均的な指標として

$$\bar{P}(t) = \sum_{i=1}^M \{P_i(t)/i\} \quad (3.2)$$

を与える。 $\bar{P}(t)$ は多肢選択テストにおける平均正答率を表わしている。単純ランダム・ゲッシング・モデルでは

$$\bar{P}^*(t) = P_1(t) + (1 - P_1(t))/M \quad (3.3)$$

となる。

この正答率分布 $\mathbf{P}$ をもった受験者に対して、 n 題出題されたときの正答数の平均値及び分散を求める。以下の議論では t を固定して考える。

与えられた n 問は互いに独立で、各問は同じ正答率分布 $\mathbf{P}$ をもつものとする。事象 E_i に対して、確率 $P_i(t)/i$ で値 1、確率 $1 - P_i(t)/i$ で値 0 をとる確率変数 $X_i(t)$ を導入する。 $X_i(t)$ は $P_i(t)$ による n 問中の正答数を表わす。また組 $(X_1(t), X_2(t), \dots, X_M(t))$ は項数 n 、確率 $P_i(t)/i$ の多項分布に従う。

$$X(t) = \sum_{i=1}^M X_i(t) \quad (3.4)$$

とおくと $X(t)$ は正答率分布 $\mathbf{P}$ による n 問中の正答数を表わす。正答数 $X(t)$ の平均値 $E(X(t))$ 及び分散 $V(X(t))$ は次のようになる。

$$E(X(t)) = n \sum_{i=1}^M (P_i(t)/i) = n \bar{P}(t) \quad (3.5)$$

$$V(X(t)) = n \left[\sum_{i=1}^M (P_i(t)/i) - \left\{ \sum_{i=1}^M (P_i(t)/i) \right\}^2 \right] \\ = n \bar{P}(t)(1 - \bar{P}(t)) \quad (3.6)$$

上の式より出題数 n が一定のとき、正答数 $X(t)$ の分布は、平均正答率 $\bar{P}(t)$ のみによって特性づけられる。

4. 医師・歯科医師国家試験における出題形式と知識の状態

まず最近の医師・歯科医師国家試験に採用されている出題形式 (Type 1~5) の性質について検討する。正答肢の数は Type 1, 2, 3 ではそれぞれ、1 個、2 個、3 個となっている。また Type 4 の正答肢の数は 1, 2, 3, 4 のいずれかとなっており、Type 5 は、Type 1 の変形ではあるが、1 正解形式にさらに正答肢がない場合が混合されている。Type 1, 2, 3 では正解コードが a, b, ..., e のいずれでも正答肢の数は変わらないが、Type 4, 5 では正解コードの位置によって正答肢の数が異なる。

一方、選択肢 (1), (2), ..., (5) を循環させて考えると、

Type 2 では 2 個の正答肢が連に、Type 3 については 3 個の正答肢が連になって解答コードを形成している。Type 4 では解答コード d では正答肢が 1 個、a, b では 2 個、c では 3 個、e では 4 個の連を形成している。この連に着目して、我々は Type 1, 2, 3, 4 をそれぞれ単一式、二連式、三連式、複合連式と名づける。また Type 5 を単一変形式と名づける。正答肢だけでなく不正答肢の連にも着目して考えると正答肢が 1 個の場合は不正肢の 4 連、正答肢がない場合は不正肢の 5 連と考えられるから、これらの出題形式はすべての解答コードが正答肢または不正肢の連を形成しているといえる。

次に、これら 5 つの出題形式のうち、ここでは単一式と二連式を取りあげ、とりうる知識の状態とその正答率を求める。出題形式によっては、選択肢の正答、不正の理解及び不明の個数が同じでも、その配列によって、正答率が異なる場合が生じるので、正答率が異なる場合には $\square$, $\boxtimes$, $?$ の配列までを考慮して知識の状態を細分化した。 $m=t=5$ すなわち 5 個の選択肢が与えられ、受験者が 5 個の選択肢のすべてについて、その正答、誤り、不明の判断を得た後の知識の状態と正答率を、単一式については表 1 で、二連式については表 2 で示した。(表 1, 2 では $t=5$ のため記号 $S_{kj}(5)$ をすべて S_{kj} で略記した。)

表 1, 2 より、二連式における知識の状態の正答率は、単一式のそれに比して次の点で著しく異なっていることがわかる。

表 1. 単一式による知識の状態と正答率

知識の状態		正答率	二項モデルによる 生起確率
S_{-1}	○	1	p
S_{40}	? × × × ×	1	${}_4C_0(1-p)q^4$
S_{30}	? ? × × ×	$\frac{1}{2}$	${}_4C_1(1-p)q^3(1-q)$
S_{20}	? ? ? × ×	$\frac{1}{3}$	${}_4C_2(1-p)q^2(1-q)^2$
S_{10}	? ? ? ? ×	$\frac{1}{4}$	${}_4C_3(1-p)q(1-q)^3$
S_{00}	? ? ? ? ?	$\frac{1}{5}$	${}_4C_4(1-p)(1-q)^4$

(注) $S_{51}, S_{41}, S_{31}, S_{21}, S_{11}$ はすべて 1 個の正答肢を知っているため、これらをまとめて S_{-1} とした

表2. 2連式による知識の状態と正答率

知識の状態		正答率	二項モデルによる 生起確率
S_{-2}	○○	1	p^2
S_{41}	?○×××	1	$2(1-p)pq^3$
$S_{31'}$	?○××?	1	$2(1-p)pq^2(1-q)$
$S_{31''}$	?○×?×	1	$2(1-p)pq^2(1-q)$
$S_{31'''}$	?○?××	$\frac{1}{2}$	$2(1-p)pq^2(1-q)$
S_{30}	??×××	1	$(1-p)^2q^3$
$S_{21'}$	?○×??	1	$2(1-p)pq(1-q)^2$
$S_{21''}$	?○?×?	$\frac{1}{2}$	$4(1-p)pq(1-q)^2$
$S_{20'}$	??××?	$\frac{1}{2}$	$2(1-p)^2q^2(1-q)$
$S_{20''}$	??×?×	1	$(1-p)^2q^2(1-q)$
S_{11}	?○????	$\frac{1}{2}$	$2(1-p)p(1-q)^3$
S_{10}	??×????	$\frac{1}{3}$	$3(1-p)^2q(1-q)^2$
S_{00}	?????	$\frac{1}{5}$	$(1-p)^2(1-q)^3$

(注) $S_{52}, S_{42}, S_{32}, S_{22}$ は, ひとまとめにして S_{-2} で示した

(1) 各選択肢の正答, 誤り, 不明の知識に出題形式の連の規則性の情報が加わると, 正答率は上昇する. 換言すれば一部分の知識でも解答コードの規則性を知ることにより確率1で正答できる場合が生ずる. たとえば, 単一式では一つの正答肢を見つけること以外に, 他の4つの不正肢を知ることにより確率1で正答することができる. 二連式では, 状態(?○××?)で正答率1となる.

(2) 単一式では理解した選択肢の数が多ければ多いほど正答率は高くなるのに較べて, 二連式では, 理解した選択肢の数が多くても, 理解した選択肢の数が少ない知識の状態よりも正答率が低くなることがある. たとえば表2の状態 $S_{31''}$ (1個の正答肢と2個の不正肢計3個の選択肢を知っている)は, 状態 $S_{20''}$ (2個の不正肢を知っている) よりも正答率は低い. つまり理解している選択肢の個数が多いにもかかわらず正答率は逆転している.

(3) 単一式では○, ×, ?の個数が同じであれば正答率は変わらないが, 二連式では○, ×, ?の個数が同じ

でも, その配列によって正答率が異なる場合が生ずる. たとえば表2の $S_{31'}$, $S_{31''}$, $S_{31'''}$ は○, ×, ?の個数は同じであるが, ○, ×, ?の配列によって正答率がそれぞれ1, 1, 1/3と異なっている. また $S_{31'''}$, $S_{21''}$, S_{11} ; $S_{20'}$ は○, ×, ?の個数が異なっているが正答率は同じである.

二連式における知識の状態とそれに伴う正答率が特異な性質を示すひとつの要因は, 二連式が与えられた5個の選択肢のなかで, 正答肢がランダムに2個配置されているのではなく, 正答肢が連になっているからである. 換言すれば, 二連式の選択肢は2連の正答肢(○群)と3連の不正肢(×群)から成りたっているため, 二連式での解答コードは, ただ単に5個の選択肢のうちから正答肢を2個指定しているのではなく, 選択肢を○群と×群の2群にわけていることである. この意味からも二連式の問題は○群と×群の境界を見きわめる問題ともいえる.

5. 知識の状態の生起確率

選択肢数を5, いわゆる5肢選択とし, 出題形式を単一式と二連式に限定し, 知識の状態の生起確率を, 正答肢, 不正肢をそれぞれ正答, 誤りと正しくわかる割合とそれらの配列によって構成する.

正答肢, 不正肢について, それを受験者が正答, 誤りあるいはわからない(不明)と判断するかによって次の6通りが考えられる.

正答肢について(正答, 誤り, 不明)

不正肢について(正答, 誤り, 不明)

上の6通りの場合について, 受験者のとりうる割合を次のように書くことにする. すなわち正答肢については左から順に $p_1(\circ)$, $p_2(\circ)$, $p_3(\circ)$, 不正肢については $q_1(\times)$, $q_2(\times)$, $q_3(\times)$ とする.

このとき $i=1, 2, 3$; $j=1, 2, 3$ に対して

$$0 \leq p_i(\circ) \leq 1, \quad 0 \leq q_j(\times) \leq 1$$

かつ

$$\sum_{i=1}^3 p_i(\circ) = 1, \quad \sum_{j=1}^3 q_j(\times) = 1$$

ここでは議論をかんたんにするため, 誤判断をしない場合すなわち $p_2(\circ)=0$, $q_1(\times)=0$ について考える. したがって受験者は選択肢を正しく理解し, 正答肢を正答あるいは不正肢を不正とするか, あるいは正しく理解できないため不明とみなすかのいずれである. すなわち正答肢は正答か不明, 不正肢は不正か不明のいずれかに判断されるものとする.

正答肢を正答と正しく理解できる確率 $p_1(\circ)$ をあ

らためて p , 不正肢を誤りと正しく理解できる確率 $q_2(\times)$ を q とする. 不明となる確率は正答肢では $1-p$, 不正肢では $1-q$ となる.

知識の状態の生起確率の構成方法として次の (i), (ii) の方法が考える.

(i) 与えられた選択肢のすべてについて, 各選択肢を正答, 誤りか不明かに判定する. 各選択肢は互いに独立に理解できるものとする. これらの仮定のもとに, 正答, 誤り, 不明のとりうる順列を考え, その生起確率を算出する方法.

(ii) 選択肢を1個ずつ選定し, その判定によって次に判定すべき選択肢を選ぶ. またそれ以上の情報を得ても正答率が上昇しない知識の状態に達したとき, 選択肢の選定と判定を停止する. このような解答方式に従って, $\square$, $\boxtimes$, $?$ の配列に重点を置いた生起確率を算出する方法.

我々は (i) を生起確率の「2項モデル」, (ii) を「ターミナル・モデル」と呼ぶことにする. 次に (i), (ii) の方法で単一式, 二連式について知識の状態の生起確率を求める.

i) 2項モデル

2項モデルは次の前提に基づいて構成されている.

(1) 各選択肢は, それが理解できるか, 理解できないかのいずれかの判定しかできない. すなわち正答肢は正答か不明に, 不正肢は誤りか不明かに判定される.

(2) 正答肢の理解できる確率は何の正答肢についても同一である. 選択肢の判定は互いに独立に, かつ与えられたすべての選択肢について行われる. 換言すれば2項モデルは, 5個の選択肢全部について, その正答, 誤り, 不明の判定を得た場合の生起確率を与える.

ここでは2項モデルによる生起確率の算出の一例として, 知識の状態 ($???\boxtimes\square$) の2項モデルによる生起確率を単一式と二連式について求めてみよう.

1. 単一式 単一式での知識の状態 ($???\boxtimes\square$) での $???$ に対応する選択肢は本来不正肢である. 3個の不正肢が理解できず1個の不正肢と正答肢を正しく理解できる確率は $(1-q)^3pq$ となるからこの確率にとりうる場合の数を乗じると, 求める生起確率は

$${}_4C_1(1-q)^3pq \text{ となる.}$$

状態 ($???\boxtimes\square$) は S_{21} と表示できるが, 同様にして, S_{51} , S_{41} , S_{31} , S_{11} などの状態 S_{i+11} ($i=0, 1, 2, 3, 4$) の生起確率は, それぞれ

$${}_4C_i(1-q)^i q^{4-i} q \quad (5.1)$$

となる. S_{51} , S_{41} , S_{31} , S_{21} , S_{11} はすべて1個の正答肢

を知っている状態であるから, これらをひとまとめにして $S_{\cdot 1}$ で表わすと, $S_{\cdot 1}$ の生起確率は

$$\sum_{i=0}^4 {}_4C_i(1-q)^i q^{4-i} p = p \quad (5.2)$$

となる.

同様にして, 他の知識の状態の生起確率も算出できる. 単一式における2項モデルによる生起確率は表1で示される.

2. 二連式 二連式の規則性により知識の状態 ($???\boxtimes\square$) の最初の $?$ は本来正答肢, 残りの $??$ は不正肢であるから, 3個の $?$ と1個の $\boxtimes$, 1個の $\square$ を得る確率は $(1-p)(1-q)^2pq$ となる. またこのような配列のとりうる場合の数は5通りあるから, 求める生起確率は $5(1-p)(1-q)^2pq$ となる. 他の知識の状態の生起確率も二連式の規則性を考慮することにより同様にして求められる. 二連式における2項モデルの生起確率は表2で示される.

また2項モデルによる, 単一式, 二連式における平均正答率をそれぞれ $\bar{P}_s$, $\bar{P}_w$ とすると, $\bar{P}_s$, $\bar{P}_w$ は次のようになる.

$$\bar{P}_s = p + \frac{1}{5}(1-p)(1+q+q^2+q^3+q^4) \quad (5.3)$$

$$\bar{P}_w = p + (1-p)q + \frac{1}{5}(1-p)^2(1-q)^3 \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_s - \bar{P}_w &= \frac{(1-p)(1-q)}{5} \{ (1-q)^2 p \\ &\quad - q(1-q)^2 - 5q^2 \} \\ &= \frac{(1-p)(1-q)^3}{5} \left[p - \left\{ q + 5 \left(\frac{q}{1-q} \right)^2 \right\} \right] \\ &\quad (q \neq 1) \end{aligned} \quad (5.5)$$

$0 < p < 1$, $0 < q < 1$ のとき $\bar{P}_s > \bar{P}_w$ となるのは

$$q + 5 \left(\frac{q}{1-q} \right)^2 < 1 \quad (5.6)$$

を満足する q に対して

$$p > q + 5 \left(\frac{q}{1-q} \right)^2 \quad (5.7)$$

を満足する p が存在するときである. 式 (5.6) を数値計算で解くと $q < 0.275$ を得る.

(ii) ターミナル・モデル

2項モデルは5肢全部について, その正答, 誤り, 不明を見いだしたときの知識の状態の生起確率であるが, 一方 $\square$, $\boxtimes$, $?$ の得られる順序とその配列が知識の状態を特徴づける場合には, $\square$, $\boxtimes$, $?$ の得られる順序と配列に注目した知識の状態の生起確率を構成しなければならない.

ここでは選択肢を1個ずつ選んでゆく次のような解答方式を考える。1つの選択肢の正答、誤り、不明の判定の後、得られた知識の状態から次の判定すべき選択肢をきめる。またそれ以上の選択肢の正答、誤りなどを知っても正答率が上昇しないことがわかったとき、次の選択肢の選定を停止し、その知識の状態で正解コードを判断する。またこのときの知識の状態を「ターミナル」と呼ぶことにする。このような解答ルールに従うと、知識の状態が、選択肢の判定(□, ⊗, ?)によっていろいろな知識の状態に推移し、これ以上の情報を得ても正答率が上昇しない知識の状態、すなわちターミナルに至って、その推移は停止する。このことから、我々はこのモデルを「ターミナル・モデル」と名づけた。

単一式では、1個の正答肢をさぐりあてることから、えらばれた選択肢の判定が□以外であれば次の選択肢以外の選択肢をランダムに選ぶことになる。これに対して二連式では、正答肢が連になって解答コードが規則性をもっているため、その思考パターンは複雑なものになっている。

選択肢の選ばれてゆく順に、それらを第1肢、第2肢、..., 第5肢と名づけ、単一式、二連式について次のような解答ルールを設定する。

(1) 単一式での解答ルール

① ランダムに第1肢をえらぶ。第1肢の判定が□ならば、それ以降の選択肢の判定を停止する。

② 第1肢が□以外であれば、第2肢は第1肢以外の選択肢をランダムにとって良いものとする。以下この思考パターンをくり返す。

単一式における第5肢以前のターミナルは第1肢、第2肢、..., 第4肢に□が位置する知識の状態と第1肢から第4肢まですべて⊗の状態である。

(2) 二連式での解答ルール

① 第1肢はランダムに選ぶ。

② 第2肢は□か⊗ならば、第2肢はその隣接の選択肢の一方を選ぶ。

③ 第3肢以降で□, ⊗の隣接する選択肢のえらび方の優先順位は、□の隣接, ⊗の隣接, ?の隣接の順とする。

④ 第1肢が?ならば、第2肢を第1肢以外の選択肢をランダムに選ぶ。

⑤ 5肢全部を判定する途中に□, ⊗, ?の配列の一部が次のパターンになったとき、次の選択肢をえらぶことをやめ、その知識の状態で正解コードを決める。

(知識が不十分な場合はランダム・ゲッシングを行う。)

ターミナル・モデルにおける知識の状態の推移を単一式については図2、二連式については図3で示す。

ターミナル・モデルによる t 肢までの状態は、1個、2個、..., $(t-1)$ 個の□, ⊗, ?のできるターミナルの状態と、 t 個の□, ⊗, ?のできる状態から成りたっている。1個、2個、..., t 個の□, ⊗, ?のできる状態の生起確率は正答肢、不正肢のとりだされる確率と正答、誤り、不明の確率によって構成されるものとする。選択肢のとり出されかたは、単一式では一つの正答肢を見い出すまでは任意に選んで良いものとし、二連式では第1肢を任意に選び、第2肢以降は隣接方式とする。また与えられた正答、不正肢はそれぞれ等確率でとりだされるものとし、正答肢、不正肢の理解できる確率は2項モデルと同様にそれぞれ p, q とする。

(a) 第1肢から第5肢までの経路

(b) 第4肢における⊗後の経路

(図の説明)

- ①, ②, ..., ⑤: 第1肢, 第2肢, ..., 第5肢
- () : 正答肢を正答と理解できたとき
- () : 不正肢を誤りと理解できたとき
- () : 選択肢を正答か誤りか判別できなかったとき
- など: ターミナルの状態
- GO TO STEP 1 : 第1肢に移行する
- GO TO STEP 4 : 第4肢における⊗以降の経路
- GO TO (b) : 第4肢⊗後ではSTEPありの経路とSTEPなしの経路は異なる
- : □か?かのいずれかで、3個の□のうち少なくとも1つは?である

図2. 単一式におけるターミナル・モデル

図3. 2連式におけるターミナル・モデル

第1肢が図で第2肢が○の状態(×○)を例にとって単一式と2連式についてターミナル・モデルによる生起確率を求めよう。

(1) 単一式

単一式で第1肢に不正肢が、第2肢に正答肢がとりだされる確率は1/5となるから、第1肢×, 第2肢○の状態の生起確率は $pq/5$ となる。

(2) 二連式

二連式で第1肢に不正肢がとりだされるのは3/5, 不正肢の隣りに正答肢がとりだされる確率は1/3である。第1肢×, 第2肢○となる確率は1/5となるから、この生起確率は $pq/5$ となる。

二連式においては、第1肢○, 第2肢×も状態(×○)を構成し、この場合の生起確率は同様な推論によって $pq/5$ となり前に求めた生起確率と一致する。二連式において状態(×○)の生起確率は $2pq/5$ となる。他の知識の状態についてもターミナル・モデルによる生起確率を求めることができる。

ターミナル・モデルにおける第 t 肢で得られたひとつの知識の状態を $S_j(t)$ とすると、第 $(t+1)$ 肢である知識の状態 $S_k(t+1)$ の生起確率 $P(S_k(t+1))$ は t

肢における生起確率 $P(S_j(t))$ と t 肢での状態 $S_j(t)$ から $(t+1)$ 肢での状態 $S_k(t+1)$ への遷移確率 $P(S_k(t+1)|S_j(t))$ によって表現することもできる。

$$P(S_k(t+1)) = \sum_j P(S_j(t)) \times P(S_k(t+1)|S_j(t)) \quad (5.8)$$

したがって、ターミナル・モデルの知識の状態の生起確率は、図2, 図3にもとづいて第1肢での知識の状態の生起確率より出発して、順次、第2肢, 第3肢, ..., 第5肢までの知識の状態の生起確率を求めることもできる。

単一式, 二連式における第1肢, 第2肢まで, ..., 第5肢までに得られる知識の状態の生起確率はそれぞれ表3, 4で示される。

また、単一式と二連式において、 $p=q=0.5$ の場合の正答率分布と平均正答率を求め、それらを2項モデル

表3. ターミナル・モデルによる生起確率(単一式)

(1) 1肢による知識の状態

知識の状態	正答率	生起確率
○	1	$\frac{1}{5}p$
×	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{5}q$
?	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}(1-p) + \frac{4}{5}(1-q)$
計		1

(2) 2肢までの知識の状態

知識の状態	正答率	生起確率
○	1	$\frac{1}{5}p$
×○	1	$\frac{1}{5}pq$
?○	1	$\frac{1}{5}p(1-q)$
××	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}q^2$
×?	$\frac{1}{4}$	$2\left\{\frac{1}{5}q(1-p) + \frac{3}{5}q(1-q)\right\}$
??	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}(1-p)(1-q) + \frac{3}{5}(1-q)^2$
計		1

(3) 3肢までの知識の状態

知識の状態	正答率	生起確率
○	1	$\frac{1}{5}p$
×○	1	$\frac{1}{5}pq$
?○	1	$\frac{1}{5}p(1-q)$
××○	1	$\frac{1}{5}pq^2$
×?○	1	$2\left\{\frac{1}{5}pq(1-q)\right\}$
? ? ○	1	$\frac{1}{5}p(1-q)^2$
×××	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}q^3$
××?	$\frac{1}{3}$	$3\left\{\frac{1}{5}(1-p)q^2 + \frac{2}{5}q^2(1-q)\right\}$
? ? ×	$\frac{1}{4}$	$3\left\{\frac{2}{5}(1-p)q(1-q) + \frac{2}{5}q(1-q)^2\right\}$
? ? ?	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}(1-p)(1-q)^2 + \frac{2}{5}(1-q)^3$
計	1	

については表5, ターミナル・モデルについては表6で示した。

6. 考 察

1) 提案した二項モデルとターミナル・モデルは, 多肢選択テストにおける受験者の不十分な知識の度合いを記述するための数学モデルである。それらのモデルに基づいて, 不十分な知識を含めた, 受験者のとりうる知識の状態の生起確率を算出し, その正答率分布を求めた。

従来の単純ランダム・ゲッシング・モデルでは正答率が1か $1/M$ に限定されていたが, これらのモデルによる正答率は表5, 6でも示されるように, 正答率1, $1/M$ のほかにあらたに正答率 $1/2, 1/3, \dots, 1/(M-1)$ が導入され, その正答率分布が求められており, 従来のランダム・ゲッシング・モデルを拡張したものになっている。

2) 2項モデルとターミナル・モデルを比較する。

2項モデルは与えられた選択肢のすべてについて判断を得た後の正答率分布や平均正答率を与える。ターミナル・モデルは判定された選択肢数に応じて, 正答率分布や平均正答率の推移を示す。

ターミナル・モデルは2項モデルに較べて, 次のような利点を持っている。

① 単一式で状態(?×○)での?の選択肢は不正肢, 二連式で状態(□?××?)での□は正答肢であることがわかる。このように5肢以前のある知識の状態で, 既に得た一部の知識を使って, 他の選択肢の正答, 誤りを推測することもできる。

② 二連式での状態(?○?)では, 他の選択肢の情報を加えても正答率は $1/2$ から上昇しない。このようなターミナルは, ある知識の状態を選択肢の判定を停止し, その状態で正解コードを決定させるある種の解答ルールが存在することを示唆する。この解答ルールを使用することによって, 解答時間を短縮することもできるであろう。

3) $p=q=0.5$ の場合の正答率分布と平均正答率について考察する。 $p \neq 0$ だから $P_0=0$ となるため正答率分布を $\mathbf{P}=(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$ とすると, 表5より単一式では, 2項モデル, ターミナル・モデルによる正答率分布はともに $P_1-0.5 < P_2 < P_3; P_3 > P_4 > P_5$ となり, 正答率分布 $\mathbf{P}$ は確実な知識に2項型の分布が加わったものになっている。

これに対して表6より, 二連式では2項モデル, ターミナル・モデルいずれにおいても $P_4=0$ となっている。また2項モデルと, ターミナル・モデルの3肢以後では, $P_1 > P_2 > P_3 > P_5$ の指数型に類似した様相を呈している。

2項モデルによる正答率分布とターミナル・モデルの5肢までの知識によるそれとは一致する。したがってターミナル・モデルでは5肢以前の情報がもたらす正答率分布や平均正答率に意味がある。

表6より二連式のターミナル・モデルでは, 2肢から3肢にかけて平均正答率の大巾な増加がみられる。また表5, 6から平均正答率が0.6以上となるのは, 単一式では4肢以上となる。あらい見方をすれば, $p=q=0.5$ の場合, 6割以上の平均正答率を得るには単一式では4肢の, 2連式では3肢以上の選択肢の判定が必要である。

4) 平均正答率と難易度について考察する

表5, 6より $p=q=0.5$ の場合, 2項モデル, ターミナル・モデルのいずれの場合にも, 二連式の方が単一

(4) 4 肢までの知識の状態

知識の状態	正答率	生 起 確 率
○	1	$\frac{1}{5}p$
×○	1	$\frac{1}{5}pq$
?○	1	$\frac{1}{5}p(1-q)$
××○	1	$\frac{1}{5}pq^2$
×?○	1	$\frac{2}{5}pq(1-q)$
? ? ○	1	$\frac{1}{5}p(1-q)^2$
×××○	1	$\frac{1}{5}pq^3$
××?○	1	$3\left\{\frac{1}{5}pq^2(1-q)\right\}$
×??○	1	$3\left\{\frac{1}{5}pq(1-q)^2\right\}$
? ??○	1	$\frac{1}{5}p(1-q)^3$
××××	1	$\frac{1}{5}q^4$
×××?	$\frac{1}{2}$	$4\left\{\frac{1}{5}q^3(1-p)+\frac{1}{5}q^3(1-q)\right\}$
××??	$\frac{1}{3}$	$6\left\{\frac{1}{5}q^2(1-p)(1-q)+\frac{1}{5}q^2(1-q)(1-p)\right.$ $\left.+\frac{1}{5}q^2(1-q)^2\right\}$
×????	$\frac{1}{4}$	$4\left\{\frac{3}{5}q(1-p)(1-q)^2+\frac{1}{5}q(1-q)^3\right\}$
? ? ? ?	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}(1-p)(1-q)^3+\frac{1}{5}(1-q)^4$
計		1

(5) 5 肢までの知識の状態の生起確率は, 2 項モデルのそれと類似のものとなる。

式より高い平均正答率を示している。

2 項モデルの平均正答率についても, $0 < p < 1$, $p = q$ の場合, 式 (5.5) より $\bar{P}_s < \bar{P}_w$ となり, 二連式の平均正答率は単一式のそれより高いことが示される。 $p = q$ の場合, 正答肢と不正肢の理解できる確率は等しいから, 結局与えられた 5 個の選択肢の理解できる確

率はすべて等しい場合に相当する。5 肢のうち正選択肢の含まれる割合は単一式では $1/5$, 二連式では $2/5$ であるが, 二連式の平均正答率が高いことはひとつにはこの正答肢数に起因しているものと思われる。

表 5, 6 より単一式の平均正答率は二連式よりも低い値を示している。このことからすぐに単一式の方が二

表4. ターミナル・モデルによる生起確率(2連式)

(1) 1肢による知識の状態

知識の状態	正答率	生起確率
○	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}p$
×	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}q$
?	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}(1-q) + \frac{3}{5}(1-q)$
計		1

(2) 2肢までの知識の状態

知識の状態	正答率	生起確率
○○	1	$\frac{1}{5}p^2$
○×	1	$2\left(\frac{1}{5}pq\right)$
○?	$\frac{1}{2}$	$2\left\{\frac{1}{5}p(1-p) + \frac{1}{5}p(1-q)\right\}$
×	$\frac{1}{2}$	$2\left(\frac{2}{5}q^2\right)$
×	$\frac{1}{3}$	$2\left\{\frac{1}{5}q(1-p) + \frac{2}{5}q(1-q)\right\}$
??	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}(1-p)^2 + \frac{2}{5}(1-p)(1-q) + \frac{2}{5}(1-q)^2$
計		1

(3) 3肢までの知識の状態

知識の状態	正答率	生起確率
○○○	1	$\frac{1}{5}p^3$
○○×	1	$\frac{1}{5}pq$
×○○	1	$\frac{1}{5}pq$
××○	1	$\frac{1}{5}pq^2$
?○○	1	$2\left\{\frac{1}{5}p^2(1-q)\right\}$
?○×	1	$4\left\{\frac{1}{5}pq(1-p)\right\}$
×××	1	$\frac{1}{5}q^3$
?○?	$\frac{1}{2}$	$2\left\{\frac{2}{5}p(1-p)(1-q)\right\}$
××?	$\frac{1}{2}$	$3\left\{\frac{1}{5}q^2(1-p) + \frac{1}{5}q^2(1-q)\right\}$
??○	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}p(1-p)(1-q) + \frac{1}{5}p(1-q)^2$
?×?	$\frac{1}{3}$	$2\left\{\frac{2}{5}q(1-p)(1-q) + \frac{1}{5}q(1-q)^2\right\}$
??×	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}q(1-p)^2 + \frac{1}{5}q(1-p)(1-q) + \frac{1}{5}q(1-q)^2$
???	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}(1-p)^2(1-q) + \frac{2}{5}(1-p)(1-q)^2 + \frac{1}{5}(1-q)^3$
計		1

(4) 4 肢までの知識の状態

知識の状態	正答率	生 起 確 率
○○	1	$\frac{1}{5}p^2$
○×	1	$\frac{1}{5}pq$
×○	1	$\frac{1}{5}pq$
?○○	1	$2\left\{\frac{1}{5}p^2(1-q)\right\}$
?○×	1	$2\left\{\frac{1}{5}pq(1-p)\right\}$
?×○	1	$2\left\{\frac{1}{5}pq(1-q)\right\}$
××○	1	$\frac{1}{5}pq^2$
×××	1	$\frac{1}{5}q^3$
?○?	$\frac{1}{2}$	$2\left\{\frac{2}{5}p(1-p)(1-q)\right\}$
○××?	1	$3\left\{\frac{1}{5}pq^2(1-q)\right\}$
×××?	1	$3\left\{\frac{1}{5}(1-p)q^3\right\}$
?×?×	1	$2\left\{\frac{1}{5}q^2(1-p)(1-q)\right\}$
? ?○○	1	$\frac{1}{5}p^2(1-q)^2$
? ?○×	1	$\frac{1}{5}pq(1-p)(1-q)$
? ?×○	1	$\frac{1}{5}pq(1-q)^2$
?×?○	$\frac{1}{2}$	$2\left\{\frac{1}{5}pq(1-p)(1-q)+\frac{1}{5}pq(1-q)^2\right\}$
?××?	$\frac{1}{2}$	$3\left\{\frac{2}{5}q^2(1-p)(1-q)\right\}$
? ?○?	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}p(1-p)(1-q)^2$
? ?××	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}q^2(1-p)^2+\frac{1}{5}q^2(1-p)(1-q)$
? ? ?○	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}p(1-p)(1-q)^2+\frac{1}{5}p(1-q)^3$
? ?×?	$\frac{1}{3}$	$3\left\{\frac{1}{5}q(1-p)^2(1-q)+\frac{2}{5}q(1-p)(1-q)^2\right\}$
? ? ?×	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}q(1-p)^2(1-q)+\frac{1}{5}q(1-p)(1-q)^2$
? ? ? ?	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}(1-p)^2(1-q)^2+\frac{2}{5}(1-p)(1-q)^3$
計		1

表5. 二項モデルとターミナル・モデルによる正答率分布と平均正答率(単一式)

事象	正答率	二項モデル	ターミナル・モデル				
			1肢	2肢	3肢	4肢	5肢
E_1	1	0.531	0.100	0.200	0.300	0.412	0.531
E_2	$\frac{1}{2}$	0.125	0.000	0.000	0.050	0.100	0.125
E_3	$\frac{1}{3}$	0.188	0.000	0.150	0.225	0.225	0.188
E_4	$\frac{1}{4}$	0.125	0.400	0.400	0.300	0.200	0.125
E_5	$\frac{1}{5}$	0.031	0.500	0.250	0.125	0.063	0.031
平均正答率		0.094	0.300	0.400	0.500	0.600	0.694

 $p=q=0.5$ の場合

表6. 二項モデルとターミナル・モデルによる正答率分布と平均正答率(2連式)

事象	正答率	二項モデル	ターミナル・モデル				
			1肢	2肢	3肢	4肢	5肢
E_1	1	0.563	0.000	0.150	0.350	0.488	0.563
E_2	$\frac{1}{2}$	0.312	0.200	0.300	0.300	0.300	0.312
E_3	$\frac{1}{3}$	0.094	0.300	0.300	0.225	0.150	0.094
E_4	$\frac{1}{4}$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
E_5	$\frac{1}{5}$	0.031	0.500	0.250	0.125	0.062	0.031
平均正答率		0.781	0.400	0.450	0.600	0.700	0.781

 $p=q=0.5$ の場合

連式よりも難かしいと結論づけるのは早計であろう。 $p=q=0.5$ の場合の平均正答率の大小比較のみによって、出題形式による難易度を論ずることは適切でないと思われる。選択肢の質的な難易性やそれらの配列が難易度の重要な要因になると思われるが、選択肢の理解できる確率と選択肢の配列に限定して、単一式の平均正答率と二連式のそれを比較するにしても、各選択肢を理解できる確率が等しくないときには、二連式の平均正答率が単一式より小さくなる場合が生ずる。たとえば二連式での○群、×群の境界周辺にむずかしい選択肢すなわち p, q の値が小さい選択肢を配置する

等の工夫をすれば、二連式の平均正答率を単一式より小さくすることもできるであろう。

また正答肢はすべて同じ確率 p 、不正肢はすべて同じ確率 q で理解できる場合でも式(5.6), (5.7)を満足する p, q の組(たとえば $p=0.8, q=0.2$)に対して、2項モデルでは二連式の平均正答率(0.844)は単一式のそれ(0.850)より小さくなる。

5) ターミナル・モデルの二連式では図後の選択肢のとりだし方として隣接方式を採用したが、図後には隣接方式のほか1つとびに選択肢を選ぶ方式や、隣接方式と1つとびの方式との混合方式などが考えら

れ、これらの方式についても隣接方式と同様にして知識の状態の生起確率を算出することができる。

6) 選択肢の理解については、受験者は正答肢を正答か不明、不正肢を誤りか不明かのいずれかしか理解できないと考えたが、実際にはこのような慎重な判断をせず誤判断すなわち正答肢を誤り、不正肢を正答とみなすことにもとづいて、解答コードを決定する。この誤判断による得点の増減 (Horst, 1966) をも考慮した得点分布について、今後の課題として研究を行ないたい。

またここでは不十分な知識の状態を、5個の選択肢のうち何個の選択肢を正、不正、不明のどんな組合せで知っているかという形で構成したが、実際には何個の選択肢の知識が欠落しているかというよりは、1つ

の選択肢の判断そのものにあいまいさがあること、すなわち選択肢を正答、誤りと峻別できないことに起因している場合が多い。このような不完全な知識の状態については別の角度からの研究が必要であろう。

参 考 文 献

Chernoff, H. (1962): The scoring of multiple choice questionnaires. *Ann. Math. Stat.*, **33**, 375-393.

Horst, P. (1966): *Psychological measurement and prediction*, Wadsworth, 214-215.

池田 央 (1973): テストII, 255-259, 東京大学出版会, 東京.

印東太郎, 小野 茂, 池田 央 (1977): 心理測定・学習理論 (テスト・スコアの理論) 56-68, 森北出版, 東京.

—1982年4月受付, 1982年9月再受付—