順序カテゴリー・データ解析 (第 3 報)

辻 谷 将 明

A REVIEW OF THE ANALYSIS OF ORDERED CATEGORICAL DATA (Part III)

Masaaki TSUJITANI

In Part I and II, comparative studies for the analysis of association in cross-classifications having ordered categories were developed. In this manuscript, GSK approach is described to fit linear models for ordinal data arising from a variety of situations. Aspects of applications are illustrated through several examples for which results of other methods are also provided.

1. 序

1.1 はじめに

先の報告 (辻谷 (1984, 1985)) では, カテゴリーに順序を有する分割表の解析について概観した。特に, 近年脚光を浴びつつある連関モデルの位置づけとその特徴を明瞭に把握するため, 周辺のモデルについても展開・整理した。

しかし, 種々のタイプの分割表に基づく順序カテゴリー・データを解析するには, それぞれ特有のモデル化が肝要である。本稿では, Grizzle, Starmer & Koch (1969) が考案した線形モデルによる GSK 法を取り上げる。この方法の特徴として

- 1) 線形モデルという共通の原理で, きわめて柔軟に種々のタイプのモデルを構成できる
- 2) 重みつき最小二乗法を用いるため計算が容易で, 汎用のコンピュータ・プログラムが作りやすい (Landis ら (1976))
- 3) 重みつき最小二乗法は, 推定量が最良漸近正規性を有するという意味で, 最尤推定法と漸近的に同等である (Koch ら (1975), Imre ら (1981, 1982)) などが考えられる。

例えば, 次のような問題を考えよう。

例 1 人々が, 自分の余暇生活に満足しているか否かを調べるため, 職業別に満足度を分類したのが表 1

である (経済企画庁国民生活局 (1984))。

例 2 東京, 大阪, 名古屋の小・中・高生を対象に, 1 週間に学習塾へ何回通っているかを調べたところ, 表 2 のようになった (東海銀行 (1985))。

例 3 表 3 のデータは, 人々の仕事に対する満足度を, 階層帰属意識別にクロス分類したものである (国民生活審議会国民生活選好度調査小委員会 (1979))。

例 4 110 個の製品を 2 人の検査工「甲」, 「乙」に 1, 2, 3 級品, および等外品と目視検査させたところ, 表 4 のようになった (真壁 (1974))。

例 5 表 5 は, 現在の暮らしについての満足度を, 性および年齢別にクロス分類したものである (内閣官房内閣審義室分室・内閣総理大臣補佐官室 (1980))。

例 1~5 の問題を統計的に解析するには, 2 変数が独立 (無連関) であるか否かを, カイ二乗検定により調べるのが常道であった。しかし, 統一的に構造化された方法により, 変数間の連関を精妙に分析しようとする, 5 つの問題のタイプはかなり異なっていることに気付くであろう。すなわち, 例 1 において, 「職業」は名義的であるが, 「余暇満足度」は順序をもっている。例 2 も例 1 と類似しているが, 「週当り回数」に 1, 2, 3, 4, 5, 6 (回) というスコアが割付けられている。例 3 では, 「階層帰属意識」と「仕事満足度」が共に順序をもっている。例 4 のようなデータでは, 対角要素が大きくなることが多く, 独立性より対称性の検定に興味がある。例 1~4 と異なり例 5 は, 順序をもった変数 (「満足度」) が, 「性」と「年齢」の 2 つの変数の組合

* 神戸女子大学 (Kobe Women's University)

表 1. 職業別にみた余暇満足度のクロス分類表

職 業	余 暇 満 足 度				
	満足している	まあ満足している	どちらともいえない	どちらかといえ ば不満である	不満である
販 売	35	60	39	39	17
熟 練	21	38	27	19	7
生 産 工 程	39	74	59	38	18
サ ー ビ ス	27	51	25	23	15
事 務	35	57	44	33	16
管 理	12	23	16	5	5
専 門 技 術	36	53	29	22	10
農 林 漁 業	34	56	51	35	19
無 職	38	91	48	22	15
主 婦	129	227	147	85	36
学 生 ・ 生 徒	31	61	32	14	9

表 2. 小・中・高生別にみた学習塾へ通っている回数
(週当り)

小・中・高生	週当り回数					
	1	2	3	4	5	6
小 学 生	107	212	132	72	28	14
中 学 生	32	74	141	52	5	3
高 校 生	56	176	42	28	0	0

せによってクロス分類されている。

このようにタイプの異なった問題を解く際、GSK 法を用いれば、問題を統一的に記述でき、系統的な推測が可能になる (Koch ら (1984))。

1.2 分割表

GSK 法で用いられる分割表 (表 6) の一般的な表記

法を定義する。 s 個の部分母集団から、それぞれ n_i 個の標本をサンプリングしたとき、 r 個のカテゴリーから成る応答変数 (従属変数) の j 番目に入る観測セル度数を n_{ij} とする (ただし、 $n_{i\cdot} = \sum_j n_{ij}$, $n = \sum_i \sum_j n_{ij}$ である)。部分母集団は因子 (factor) または独立変数とも呼ばれ、例 5 のように複数個の因子のカテゴリーの組合せから成ることもある。 (i, j) セルの観測セル確率 (出現率) $p_{ij} = n_{ij}/n_{j\cdot}$ に対応する期待セル確率 (出現率) を P_{ij} と書く。よって、自然な制約

$$\sum_j P_{ij} = 1; i = 1, 2, \dots, s \quad (1.1)$$

が付加される。換言すれば、 r 個のカテゴリーをもつ s 個の多項分布から、 n_i 個の標本をサンプリングしたことになる (積一多項サンプリング方式)。例 1, 2 の「職業」と「小・中・高生」が部分母集団、「余暇満足度」と「週当り回数」が応答変数である。例 5 は、「性」

表 3. 階層帰属意識別にみた仕事満足度のクロス分類表

階層帰属意識	仕事満足度				
	満足している	まあ満足している	どちらともいえない	どちらかといえ ば不満である	不満である
上	72	106	26	10	8
中の上	448	1001	430	178	72
中の下	198	599	386	196	71
下	32	153	104	60	39

表4. 2人の検査工“甲”，“乙”による某製品の目視検査の結果

甲	乙			
	1	2	3	等 外
1	15	7	5	5
2	6	8	10	4
3	5	5	8	5
等 外	5	6	7	9

と「年齢」の組合せによる $s=8$ 個の部分母集団をもつ。一方、例3や4の場合、変数が共に応答変数で、 $s=1$ の多項サンプリング方式になる。(1.1)式の自然な制約に対応して

$$\sum_i^s \sum_j^r P_{ij} = 1.0 \quad (1.2)$$

をもつ。

2. GSK 法

2.1 モデル構成法

期待セル確率 P_{ij} ($i=1, 2, \dots, s$; $j=1, 2, \dots, r$) について

$$\mathbf{P}' = (P'_1, P'_2, \dots, P'_s), \quad \mathbf{p}'_i = (p'_{i1}, p'_{i2}, \dots, p'_{is})$$

とする。ただし

$$\mathbf{P}'_i = (P_{i1}, P_{i2}, \dots, P_{ir}), \quad \mathbf{p}'_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{ir});$$

$$i=1, 2, \dots, s$$

である。この $\mathbf{P}$ に関し、 u 個の応答関数 $f_m(\mathbf{P})$ ($m=$

表6. 線形モデルにおける分割表の一般型

部分母集団 (因子)	順序 (応答) カテゴリー						計
	1	2	...	j	...	r	
1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1j}	...	n_{1r}	$n_{1\cdot}$
2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2j}	...	n_{2r}	$n_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
i	n_{i1}	n_{i2}	...	n_{ij}	...	n_{ir}	$n_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
s	n_{s1}	n_{s2}	...	n_{sj}	...	n_{sr}	$n_{s\cdot}$

$1, 2, \dots, u \leq s(r-1)$) を導入し、線形モデルを当てはめる。その上で、モデルの適合度を検定し、データが当てはまっておれば、線形モデルのパラメータに関する仮説検定を行う。 $\mathbf{P}$ の $sr \times sr$ 分散・共分散行列 $\mathbf{V}(\mathbf{P})$ は、

$$\mathbf{V}(\mathbf{P})_{sr \times sr} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}(\mathbf{P}_1) & \mathbf{O}_r & \dots & \mathbf{O}_r \\ \mathbf{O}_r & \mathbf{V}(\mathbf{P}_2) & \dots & \mathbf{O}_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{O}_r & \mathbf{O}_r & \dots & \mathbf{V}(\mathbf{P}_s) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

となる。ただし

$$\mathbf{V}(\mathbf{P}_i)_{r \times r} = \frac{1}{n_{i\cdot}} \begin{bmatrix} P_{i1}(1-P_{i1}) & -P_{i1}P_{i2} & \dots & -P_{i1}P_{ir} \\ -P_{i2}P_{i1} & P_{i2}(1-P_{i2}) & \dots & -P_{i2}P_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -P_{ir}P_{i1} & -P_{ir}P_{i2} & \dots & P_{ir}(1-P_{ir}) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

で、 $\mathbf{O}_r$ はゼロ値のみから成る $r \times r$ 行列とする。 $\mathbf{V}(\mathbf{P}_i)$ の標準推定値は、(2.2)式の $\mathbf{P}_i$ に $\mathbf{p}_i$ を代入し

表5. 性および年齢別にみた暮らしについての満足度

性	年 齢	暮らしについての満足度			
		十分満足している	十分とはいえないが満足している	まだまだ不満	極めて不満だ
男	20～29 歳	15	81	34	10
	30～39 歳	13	132	79	8
	40～59 歳	38	254	122	13
	60 歳以上	32	136	37	6
女	20～29 歳	34	158	44	4
	30～39 歳	46	257	78	10
	40～59 歳	68	306	126	22
	60 歳以上	38	98	24	7

て得られ $V(p_i)$ と書く. $V(P)$ の標本推定値を $V(p)$ で示す.

応答関数 $f_m(p)$ は, 2 次の偏導関数をもつ p の関数で,

$$F(p)' = [f_1(p), f_2(p), \dots, f_u(p)]$$

とし, $E[F(p)] = F(P)$ である. モデルの解釈は, 応答関数の定義に依存するので, 応答関数の選択は極めて重要になる. 本稿では, 応答関数として, P の線形関数および対数関数のみを考えるが, 他の複雑な関数についても, 線形近似により解析できる (Forthofer & Koch (1973)). $F(P)$ に関する $u \times sr$ 行列 H を

$$H = \left[\frac{\partial f_m(P)}{\partial P_{ij}} \mid P_{ij} = p_{ij} \right] \quad (2.3)$$

と定義する. $F(P)$ の分散・共分散行列の推定値は

$$S = H \cdot V(p) \cdot H' \quad (2.4)$$

で与えられる. H と S の階数は共に u である. セル度数の中に 0 値があれば, S の階数が u より小さくなる. よって, ゼロ値を $1/r$ で置き換える (Berkson (1955)).

さて, 応答関数 $F(p)$ について, 線形モデル

$$F(P) = X \beta \quad (2.5)$$

を想定する. ここに, X は階数 $v \leq u$ の既知の定数から成る $u \times v$ デザイン行列, β は未知パラメータ・ベクトル $\beta' = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_v)$ とする. この $F(P)$ の形式として

$$F(P) = A \cdot P \quad (2.6)$$

を採用すると, (2.3), (2.4) 式から

$$H = A, S = A \cdot V(p) \cdot A' \quad (2.7)$$

となる. また, 対数関数

$$F(P) = K \ln A \cdot P \quad (2.8)$$

を用いると

$$H = KD^{-1}A \quad (2.9)$$

$$S = KD^{-1}AV(p)A'D^{-1}K'$$

が得られる. ただし, $\ln AP$ は $t \times 1$ 行列で, その要素はベクトル AP の要素の自然対数である. 行列 K と A は, H の階数が $u \leq s(r-1)$ になるように選ばれる.

$$D = \begin{bmatrix} a'_1 p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a'_2 p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a'_t p \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

とし, a'_i は A の第 i 行である.

例えば, 表 2 の小・中・高生ごとの平均スコア (すなわち, 平均的に週に何回塾へ通っているか)

$$\eta_i = \sum_{j=1}^6 a_j P_{ij}; i=1, 2, 3$$

に注目する. スコアとして, $a_j = j (j=1, 2, \dots, 6)$ を採用し, 応答関数を

$$F(P)' = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$$

とおく. (2.6) 式のもとで,

$$A = \begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & a' & 0 \\ 0 & 0 & a' \end{bmatrix}$$

$$a' = (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6) \quad 0 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$$

$$P = (P_{11} \ P_{12} \ P_{13} \ P_{14} \ P_{15} \ P_{16} \ P_{21} \ P_{22} \ P_{23} \\ P_{24} \ P_{25} \ P_{26} \ P_{31} \ P_{32} \ P_{33} \ P_{34} \ P_{35} \ P_{36})$$

と定義する. この平均スコア η_i が, 分散分析の一元配置と類似した行効果 α_i をもつ加法形

$$\eta_i = \mu + \alpha_i; i=1, 2, 3$$

で表されると仮定する. ここに, μ は一般平均, α_i は第 i 部分母集団の効果で, $\sum_i \alpha_i = 0$ とする. X と β を

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\beta' = (\mu, \alpha_1, \alpha_2)$$

としたとき, 想定されたモデルの適合性が問題になる. 適合しておれば, 未知パラメータに関する 1 つの仮説として $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ (すなわち, 小・中・高生の間に有意差がない) を検定する.

2.2 統計的推測

想定した線形モデルがデータに適合しているなら, β の重みつき最小二乗 (Weighted Least Square) 推定量 $\hat{\beta} (= b)$ は

$$(F(p) - X\beta)'(F(p) - X\beta) \\ = F(p)'S^{-1}F(p) - (\beta'X'S^{-1}F(p))$$

$$-F(p)'S^{-1}X\beta + (\beta'X'S^{-1}X\beta)$$

を β に関して偏微分した

$$-X'S^{-1}F(p) - F(p)'S^{-1}X + 2X'S^{-1}X\beta = 0$$

を解いて

$$b = \hat{\beta} = (X'S^{-1}X)^{-1}X'S^{-1}F(p) \quad (2.11)$$

で与えられ、 β の最良漸近正規(BNA)推定量になる。これは、最尤推定量と漸近同等である。なお、最尤法、重みつき最小二乗法、一般化 Wald (1943)法、Neyman 最小修正カイ二乗法、線形制約付き Neyman 最小修正カイ二乗法および最小ロジットカイ二乗法らの相互関係については、Bhappkar (1961, 1966), Bishop ら (1975: 10.3 節), Berkson (1955, 1968), Grizzle (1961), 広津(1982: 7-3 節, 8-2 節)を参照せよ。 b の漸近的分散・共分散行列は

$$\widehat{Cov}(b) = (X'S^{-1}X)^{-1} \quad (2.12)$$

から推定される。ゆえに、重みつき最小二乗適合度統計量

$$QW = (F(p) - Xb)'(F(p) - Xb) \\ = F(p)'S^{-1}F(p) - b'(X'S^{-1}X)b$$

は、モデルが適合しているなら、漸近的に自由度 $u-v$ のカイ二乗分布に従うので、

$$QW < \chi^2_{u-v}(\alpha)$$

なら、有意水準 $100\alpha\%$ で線形モデル (2.5) 式がデータに適合していると判断する。ただし

u = 応答関数の個数

v = モデル内の独立なパラメータの個数

とする。特に、 $X=0$ なら

$$QW = F(p)' \cdot S^{-1} \cdot F(p) \quad (2.13)$$

となり、 $v=0$ である。

次いで、未知パラメータに関する仮説

$$H_0: C \beta = 0$$

$d \times v$ $v \times 1$ $d \times 1$

を検定しよう。ここに、 C は検定仮説を規定する既知の行列で、階数は $d \leq v$ である。この仮説の検定統計量は

$$Q_C = b'C'[C(X'S^{-1}X)^{-1}C']Cb \quad (2.14)$$

となる。帰無仮説のもとで、 Q_C は漸近的に自由度 d のカイ二乗分布に従う。 $C\beta$ の $100\alpha\%$ 信頼区間は

$$Cb \pm \sqrt{\chi^2_v(\alpha)C(X'S^{-1}X)^{-1}C'} \quad (2.15)$$

から得られる。

$F(P)$ の予測値 $\hat{F}$ は

$$\hat{F} = Xb = X(X'S^{-1}X)^{-1}X'S^{-1}F \quad (2.16)$$

となる。 $\hat{F}$ の漸近的分散・共分散行列の一致推定量は

$$\widehat{Cov}(\hat{F}) = X(X'S^{-1}X)^{-1}X' \quad (2.17)$$

で与えられる。期待セル確率の Neyman 最小修正カイ二乗推定量 $\bar{P}$ は

$$\bar{P} = p - V(p) \cdot H' \cdot S^{-1}(F(p) - \hat{F}) \quad (2.18)$$

である。

3. 適用例

3.1 累積ロジット・モデル

(因子×順序応答) 表

表1のデータのように、従属変数に順序がある場合、累積ロジット (これが、応答関数になる)

$$L_{j(i)} = \ln \left(\frac{P_{i1} + \dots + P_{ij}}{P_{i,j+1} + \dots + P_{i,r}} \right) \quad (3.1)$$

について、モデル

$$L_{j(i)} = \alpha_j + \tau_i; \quad i=1, 2, \dots, s; \quad j=1, 2, \dots, r-1 \quad (3.2)$$

を採用する (Williams & Grizzle (1972))。ここに、

$\sum_i \tau_i = 0$ である。ゆえに

$$F(P)' = (L_{1(1)}, L_{2(1)}, \dots, L_{r-1(s)})$$

$$\beta' = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{s-1})$$

$$X_{s(r-1) \times (s+r-2)} = \begin{bmatrix} I_{r-1} \otimes \mathbf{1}_s, & \mathbf{1}_{r-1} \otimes \begin{bmatrix} I_{s-1} \\ -\mathbf{1}'_{s-1} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

とする。ただし、 I_{r-1} は $(r-1) \times (r-1)$ 単位行列、 $\mathbf{1}_{r-1}$ は要素が1の $(r-1) \times 1$ 列ベクトル、 $\otimes$ は左側クロネッカー積 ($A \otimes B = [A b_{ij}]$) である。応答関数(3.1)式は、(2.8) 式の数型で表される。

$$L'_i = (L_{1(i)}, L_{2(i)}, \dots, L_{r-1(i)})$$

について

$$L_i = K^* \ln(A^* P_i)$$

表7. 表1のパラメータに対するモデル
(3.2)式のもとでのパラメータ推定
値とそれらの標準偏差

パラメータ	推定値	標準偏差
α_1	-1.430	0.058
α_2	0.176	0.048
α_3	1.231	0.055
α_4	2.492	0.083
τ_1	-1.197	0.125
τ_2	-0.040	0.159
τ_3	-0.153	0.116
τ_4	-0.067	0.143
τ_5	-0.150	0.126
τ_6	0.127	0.214
τ_7	0.202	0.140
τ_8	-0.266	0.124
τ_9	0.149	0.121
τ_{10}	0.124	0.079

$$A^*_{z(r-1) \times r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$K^*_{(r-1) \times 2(r-1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$A = A^* \otimes I_s \quad \text{および} \quad K = K^* \otimes I_s$$

とすれば

$$K \ln(AP) = X\beta$$

となる。QWに関する自由度は

$$d.f. = u - v$$

である。ただし、

$$u = s(r-1), v = s + r - 2$$

とする。表1のデータについて

$$QW = 23.763 \quad (d.f. = 30)$$

より、累積ロジット・モデルはこのデータに良く当て

はまっている。ちなみに、Snellのモデル(辻谷(1984))
のもとでの適合度カイ二乗統計量は、 $X^2 = 22.964$
($d.f. = 30$)と算出される。Simon (1974) は、この累
積ロジットモデルを最尤法で解析している。

次に、 $(r-1)$ 個の累積ロジットが、すべての行につ
いて等しい(すなわち、独立)という帰無仮説

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_{s-1} = 0 \quad (3.5)$$

を検定するには

$$C_{(s-1) \times (s+r-2)} = (O_{(s-1) \times (r-1)}, I_{s-1})$$

$$d.f. = s-1$$

とすればよい。ただし、 $O_{(s-1) \times (r-1)}$ は要素が0の $(s-1) \times (r-1)$ 行列である。表1のデータについて

$$Qc = 19.631 \quad (d.f. = 10)$$

を得、職業間に有意差がある。(2.11), (2.12)式から
パラメータ推定値、およびそれらの標準偏差を算出し
た結果が表7である。期待セル度数は、(2.18)式を援
用すると、表8のようになる。

(因子1×因子2×順序応答)表

因子が2つある表を取り上げる(Semenya & Koch
(1980: 4.2節))。期待セル確率 P_{ijk} ($i=1, 2, \dots, s_1; j=1, 2, \dots, s_2; k=1, 2, \dots, r$)は、表9のように表される。
ただし、因子1と因子2との $s=s_1 s_2$ 個の組合せを部
分母集団と見なす。制約条件は

$$\sum_k P_{ijk} = 1$$

である。累積確率を

$$\begin{aligned} \phi_{ij1} &= P_{ij1} \\ \phi_{ij2} &= P_{ij1} + P_{ij2} \\ &\vdots \\ \phi_{ij, r-1} &= P_{ij1} + P_{ij2} + \cdots + P_{ij, r-1} \\ \phi_{ijr} &= 1 \end{aligned}$$

とすれば、応答関数の累積ロジットは

$$\begin{aligned} L_{(1)ij} &= \ln[\phi_{ij1} / (1 - \phi_{ij1})] \\ L_{(2)ij} &= \ln[\phi_{ij2} / (1 - \phi_{ij2})] \\ &\vdots \\ L_{(r-1)ij} &= \ln[\phi_{ij, r-1} / (1 - \phi_{ij, r-1})] \end{aligned}$$

となる。ゆえに

$$L'_{ij} = [L_{(1)ij}, L_{(2)ij}, \dots, L_{(r-1)ij}]$$

について

表8. 表1のデータに対するモデル(3.2)式のもとの期待度数の推定値

職 業	余 暇 満 足 度				
	満足している	まあ満足している	どちらともいえない	どちらかといえば不満である	不満である
販 売	31.02	62.99	46.37	32.23	17.39
熟 練	20.93	38.88	26.09	17.42	8.68
生 産 工 程	38.83	76.50	54.82	37.91	19.95
サ ー ビ ス	25.75	48.61	33.27	22.35	11.02
事 務	31.44	62.26	44.46	30.61	16.22
管 理	13.00	22.09	13.65	8.20	4.07
専 門 技 術	33.94	55.09	32.21	19.28	9.48
農 林 漁 業	30.04	63.10	48.09	34.78	18.99
無 職	45.88	78.45	47.03	28.44	14.21
主 婦	132.90	225.57	137.73	85.80	42.01
学生・生徒	34.96	54.79	30.74	17.81	8.71

表9. 因子1×因子2×順序応答表における期待セル確率の一般型

因子1	因子2	順序（応答）カテゴリー				計
		1	2	...	r	
1	1	P_{111}	P_{112}	...	P_{11r}	1.0
	2	P_{121}	P_{122}	...	P_{12r}	1.0
	...	...	...	...	...	...
	s_2	P_{1s_21}	P_{1s_22}	...	P_{1s_2r}	1.0
2	1	P_{211}	P_{212}	...	P_{21r}	1.0
	2	P_{221}	P_{222}	...	P_{22r}	1.0
	...	...	...	...	...	...
	s_2	P_{2s_21}	P_{2s_22}	...	P_{2s_2r}	1.0
...	...	...	...	...	...	...
s_1	1	P_{s_111}	P_{s_112}	...	P_{s_11r}	1.0
	2	P_{s_121}	P_{s_122}	...	P_{s_12r}	1.0
	...	...	...	...	...	...
	s_2	$P_{s_1s_21}$	$P_{s_1s_22}$	...	$P_{s_1s_2r}$	1.0

$$P'_{ij} = [P_{ij1}, P_{ij2}, \dots, P_{ijr}]$$

$$P' = [P'_{11}, P'_{12}, \dots, P'_{s_1s_2}]$$

とおけば

$$L'_{ij} = K^* \ln[A^* P'_{ij}]$$

と書ける。ただし、 A^* と K^* はそれぞれ(3.3)および(3.4)式に与えられている。

因子1×因子2の交互作用を考える場合、累積ロジットは

$$L_{h(ij)} = \mu_h + \alpha_i + \beta_j + (a\beta)_{ij}; \quad i=1, 2, \dots, s_1; \quad j=1, 2, \dots, s_2; \quad h=1, 2, \dots, r \quad (3.6)$$

となる。ただし、 $\sum_i \alpha_i = \sum_j \beta_j = \sum_i (a\beta)_{ij} = \sum_j (a\beta)_{ij} = 0$ である。各項は

μ_h = 第 h ロジットに対する定数
 α_i = 因子1の第 i カテゴリーの主効果
 β_j = 因子2の第 j カテゴリーの主効果
 $(a\beta)_{ij}$ = 因子1の第 i カテゴリーと因子2の第 j カテゴリーの交互作用効果

と解釈される。よって、応答関数

$$F(P)' = L' = [L'_{11}, \dots, L'_{s_1 s_2}]$$

に関し

$$\beta' = (\mu_1, \dots, \mu_{r-1}, \alpha_1, \dots, \alpha_{s_1-1}, \beta_1, \dots, \beta_{s_2-1}, (a\beta)_{11}, \dots, (a\beta)_{s_1-1, s_2-1})$$

とする。ただし

$$L'_{ij} = [L_{ij1}, L_{ij2}, \dots, L_{ij, r-1}]$$

である。

$$K = K^* \otimes I$$

$$A = A^* \otimes I$$

とおけば、応答関数は

$$L = K \ln AP$$

と書ける。QWに関する自由度は

$$d.f. = u - v$$

になる。ただし、

$$\begin{aligned} u &= s_1 s_2 (r-1) = s(r-1) \\ v &= r-1 + s_1-1 + s_2-1 + (s_1-1)(s_2-1) = s+r-2 \end{aligned}$$

である。表5のデータについて

$$X = \begin{bmatrix} I_3 & 1_3 & 1_3 & 0_3 & 0_3 & 1_3 & 0_3 & 0_3 \\ I_3 & 1_3 & 0_3 & 1_3 & 0_3 & 0_3 & 1_3 & 0_3 \\ I_3 & 1_3 & 0_3 & 0_3 & 1_3 & 0_3 & 0_3 & 1_3 \\ I_3 & 1_3 & -1_3 & -1_3 & -1_3 & -1_3 & -1_3 & -1_3 \\ I_3 & -1_3 & 1_3 & 0_3 & 0_3 & -1_3 & 0_3 & 0_3 \\ I_3 & -1_3 & 0_3 & 1_3 & 0_3 & 0_3 & -1_3 & 0_3 \\ I_3 & -1_3 & 0_3 & 0_3 & 1_3 & 0_3 & 0_3 & -1_3 \\ I_3 & -1_3 & -1_3 & -1_3 & -1_3 & 1_3 & 1_3 & 1_3 \end{bmatrix}$$

とすれば

$$QW = 19.971 (d.f. = 14)$$

より、このモデルはデータに当てはまっていると見なす。

次に、帰無仮説

$$H_0: \text{交互作用 (因子1} \times \text{因子2) は存在しない}$$

すなわち

$$H_0: (\alpha\beta)_{ij} = 0; i=1, 2, \dots, s_1-1; j=1, 2, \dots, s_2-1 \quad (3.7)$$

を検定するには

$$C = (O_{(s_1-1)(s_2-1) \times (s_1+s_2+r-3)}, I_{(s_1-1)(s_2-1)})$$

について

$$C\beta = 0$$

とすればよい。表5のデータについて、(3.7)式の帰無仮説を検定するため

$$C = (O_{3 \times 7}, I_3)$$

とおけば、

$$Qc = 5.339 (d.f. = 3)$$

となる。よって、帰無仮説は棄却されないので、交互

作用の存在しないモデル

$$L_{h(ij)} = \mu_h + \alpha_i + \beta_j \quad (3.8)$$

を当てはめる。Xを

$$X = \begin{bmatrix} I_3 & 1_3 & 1_3 & 0_3 & 0_3 \\ I_3 & 1_3 & 0_3 & 1_3 & 0_3 \\ I_3 & 1_3 & 0_3 & 0_3 & 1_3 \\ I_3 & 1_3 & -1_3 & -1_3 & -1_3 \\ I_3 & -1_3 & 1_3 & 0_3 & 0_3 \\ I_3 & -1_3 & 0_3 & 1_3 & 0_3 \\ I_3 & -1_3 & 0_3 & 0_3 & 1_3 \\ I_3 & -1_3 & -1_3 & -1_3 & -1_3 \end{bmatrix}$$

とおけば、

$$QW = 25.310 (d.f. = 17)$$

となり、このモデルも妥当である。

(3.8)式の因子1の主効果の有意性に関する帰無仮説

$$H_0: \alpha_1 = 0 \quad (3.9)$$

を検定するため

$$C = (0001000)$$

とおく。因子2の主効果の有意性

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$$

に対しては

$$C = (0_{3 \times 4}, I_3)$$

とおく。表5のデータにモデル(3.8)式を当てはめた場合の検定結果を表10に与えておく。また、表11は各パラメータの推定値およびそれらの標準偏差である。

3.2 平均応答モデル

表2のデータのように、順序カテゴリー B_j にスコ

表10. 表5のデータに対するモデル(3.8)式のもとでの連関分析

帰無仮説	自由度	Qc
「性」による主効果なし ($\alpha_1=0$)	1	22.018**
「年齢」による主効果なし ($\beta_1=\beta_2=\beta_3=0$)	3	29.448**

** : $\alpha = 0.01$ で高度に有意

表 11. 表 5 のデータに対するモデル (3.8) 式のもとでのパラメータ推定値とそれらの標準偏差

パラメータ	推定値	標準偏差
μ_1	-1.950	0.066
μ_2	1.069	0.051
μ_3	3.335	0.115
α_1	-0.198	0.042
β_1	-0.005	0.086
β_2	-0.212	0.073
β_3	-0.202	0.064

ア a_j ($j=1, 2, \dots, r$) を事前に割付けた場合, 第 i 行の平均スコア

$$\eta_i = \sum_j a_j P_{ij}; i=1, 2, \dots, s$$

について, 平均応答モデル

$$\eta_i = \mu + \alpha_i; i=1, 2, \dots, s \quad (3.10)$$

を想定する (Koch ら (1984: 2.5 節)). ここに, $\sum_i \alpha_i = 0$ である. 2.1 節で与えた A, β, X の定義から, 表 2 のデータに線形モデルを当てはめると, $QW=0$ ($d.f.=0$) となる. これは, 応答関数の個数と未知パラメータの個数が等しく, 飽和モデル (saturated model) と呼ばれる. 期待確率は, 観測確率に等しく, 飽和モデルはデータに当てはまっている. (2.11), (2.12) 式から, パラメータ推定値 b , およびそれらの標準偏差を求めると表 12 のようになる.

一方, 小・中・高生による主効果の有意性

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

を検定する.

$$C = (0 \quad 1 \quad -1)$$

とおけば

$$Qc = 9.822 \quad (d.f.=1)$$

より, 小・中・高生に有意差がある.

予測値, およびそれらの標準偏差は, それぞれ (2.16), (2.17) 式から表 13 のように算出される.

3.3 連関モデル

対数線形モデルを拡張したモデルとして, 対数見込

表 12. 表 2 のデータに対するモデル (3.10) 式のもとでのパラメータ推定値とそれらの標準偏差

パラメータ	推定値	標準偏差
μ	2.498	0.030
α_1	0.054	0.042
α_2	0.291	0.044

表 13. 平均スコア (平均的に遇当り塾へ通う回数) の予測値とそれらの標準偏差

小・中・高生	予測値	標準偏差
小学生	2.552	0.051
中学生	2.789	0.056
高校生	2.152	0.048

み比

$$\ln \Theta_{ij} = \ln P_{ij} + \ln P_{i+1, j+1} - \ln P_{i+1, j} - \ln P_{i, j+1} \quad (3.11)$$

を種々の形で表した Goodman (1979) の連関モデルがある. これは, 表 3 のデータのように, 行および列変数のカテゴリーが共に順序を有する場合, その情報 (順序性) を (3.11) 式を媒介にして包摂したモデルである. サンプリング方式の観点からいえば, $s=1$ で, 2 方向に分類された応答変数が順序をもつと考えられる.

なお, Semenya & Koch (1980: 5.3 節) は, (3.11) 式の代りに

$$\ln \Theta_{uv} = \ln \left(\frac{\alpha_{uv} S_{uv}}{\beta_{uv} \gamma_{uv}} \right)$$

を採用している. ただし

$$\alpha_{uv} = \sum_i^u \sum_j^v P_{ij}, \beta_{uv} = \sum_i^u P_{i.} - \alpha_{uv}$$

$$r_{uv} = \sum_j^v P_{.j} - \alpha_{uv}, S_{uv} = 1 - \alpha_{uv} - \beta_{uv} - \gamma_{uv}$$

とする.

無連関モデル

対数見込み比 $\ln \Theta_{ij}$ が

$$\ln \Theta_{ij} = 0; i=1, 2, \dots, s-1; j=1, 2, \dots, r-1 \quad (3.12)$$

なら, 2 変数は独立である. これを, GSK 法で解析し

よう.

$$F(P)' = (\ln\theta_{11}, \ln\theta_{12}, \dots, \ln\theta_{s-1, r-1}) \quad (3.13)$$

$$A = sr \times sr \text{ 単位行列} \quad (3.14)$$

$$K_{(s-1)(r-1) \times sr} = K_1^* \otimes K_2^* \quad (3.15)$$

$$X = X_1 = O$$

と定義する. ただし

$$K_1^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & -1 \end{bmatrix}_{(r-1) \times r}$$

$$K_2^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix}_{(s-1) \times s}$$

である. QW に対する自由度は, $(s-1)(r-1)$ になる.

一様関連モデル

無関連モデルを一般化した

$$\ln\theta_{ij} = \Delta; \quad i=1, 2, \dots, s-1; \quad j=1, 2, \dots, r-1 \quad (3.16)$$

を考える.

$$X = X_2' = \mathbf{1}_{(r-1)}' \otimes \mathbf{1}_{(s-1)}$$

β = スカラー

$$F(P) = (3.13) \text{ 式}$$

$$A = (3.14) \text{ 式}$$

$$K = (3.15) \text{ 式}$$

と定義すると, QW に関する自由度は $sr - s - r$ である.

行効果関連モデル

行効果 α_i をもつモデルで

$$\ln\theta_{ij} = \mu + \alpha_i; \quad i=1, 2, \dots, s-1; \quad j=1, 2, \dots, r-1 \quad (3.17)$$

と表せる. ただし, $\sum_{i=1}^{s-1} \alpha_i = 0$ とする.

$$\beta' = (\mu, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-2})$$

$$X = \begin{matrix} X_3 \\ (s-1)(r-1) \times (s-1) \end{matrix} = \mathbf{1}_{r-1} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{s-2} & \mathbf{I}_{s-2} \\ 1 & -\mathbf{1}_{s-2}' \end{bmatrix}$$

$$F(P) = (3.13) \text{ 式}$$

$$A = (3.14) \text{ 式}$$

$$K = (3.15) \text{ 式}$$

とおけば, QW に関する自由度は $(s-1)(r-2)$ になる.

列効果関連モデル

行効果関連モデルとは対照的に, 列効果 β_j をもつモデル

$$\ln\theta_{ij} = \mu + \beta_j; \quad i=1, 2, \dots, s-1; \quad j=1, 2, \dots, r-1 \quad (3.18)$$

である. ただし, $\sum_{j=1}^{r-1} \beta_j = 0$ とする

$$\beta' = (\mu, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r-2})$$

$$X = \begin{matrix} X_4 \\ (s-1)(r-1) \times (r-1) \end{matrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{r-2} & \mathbf{I}_{r-2} \\ 1 & -\mathbf{1}_{r-2}' \end{bmatrix} \otimes \mathbf{1}_{s-1}$$

$$F(P) = (3.13) \text{ 式}$$

$$A = (3.14) \text{ 式}$$

$$K = (3.15) \text{ 式}$$

と定義する. QW に関する自由度は, $(s-2)(r-1)$ になる.

行一列効果関連モデル (モデル I)

行および列効果をもつモデルで

$$\ln\theta_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j; \quad i=1, 2, \dots, s-1; \quad j=1, 2, \dots, r-1 \quad (3.19)$$

と表せる. ただし, $\sum_{i=1}^{s-1} \alpha_i = \sum_{j=1}^{r-1} \beta_j = 0$ である.

$$\beta' = (\mu; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-2}; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r-2})$$

$$X = \begin{matrix} X_5 \\ (s-1)(r-1) \times (s+r-1) \end{matrix} = \begin{bmatrix} X_3, \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{r-2} \\ -\mathbf{1}_{r-2}' \end{bmatrix} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{1}_{s-1}$$

$$F(P) = (3.13) \text{ 式}$$

$$A = (3.14) \text{ 式}$$

$$K = (3.15) \text{ 式}$$

とおく. QW に関する自由度は, $(s-2)(r-2)$ である.

表3のデータに, これらのモデルを当てはめると, 表14のようになる. 有意水準5%で, 列効果関連モデルと行一列効果関連モデルが, データに当てはまっている. 参考のため, 最尤法に基づく尤度比カイ二乗値とAIC値も与えておく. 各モデルに対するパラメータ推定値 $\hat{b}$, およびそれらの標準偏差を計算すると表15のようになる.

3.4 周辺同等モデル

表4のデータのように, 各個体が同種の2つの属性に基づいて, 同一の方法で二重分類されている正方表

表 14. 種々の連関モデルを表 3 のデータへ適用したときの QW と自由度

連関モデル	自由度	QW	最尤法に基づく尤度比 カイ二乗値(AIC 値)
無 連 関 モ デ ル	12	172.550	181.149(317.008)
一 様 連 関 モ デ ル	11	23.876	22.879(160.742)
行 効 果 連 関 モ デ ル	9	22.658	21.152(163.012)
列 効 果 間 達 モ デ ル	8	12.861	12.528(156.387)
行一列効果連関モデル	6	12.642	12.240(160.102)

表 15. 表 3 のデータに対する種々の連関モデルのもとでのパラメータ推定値（およびそれらの標準偏差）

パラメータ	連関モデル			
	一 様	行 効 果	列 効 果	行一列効果
Δ	0.251(0.021)	0.245(0.028)	0.231(0.026)	0.226(0.031)
		α_i	β_j	α_i β_j
		0.019(0.053)	0.135(0.056)	-0.003(0.055) 0.131(0.058)
		0.029(0.043)	0.087(0.061)	0.018(0.044) 0.085(0.062)
		-0.048(0.046)	-0.072(0.084)	-0.015(0.047) -0.072(0.084)
			-0.150(0.094)	-0.145(0.094)

を取り上げる。この場合，対角要素が大きくなり，独立性より対称性の検定に興味がある。サンプリング方式の観点からいえば，2方向にクロス分類された1つの多項分布からデータが得られている。モデルとしては

$$P_{i.} = P_{.j}; i=1, 2, \dots, s(r)$$

を採用する。

$$F(P)' = AP = 0 \text{ (i.e., } X=0\text{)}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & & -1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \cdots \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & \end{bmatrix}$$

とおく。ただし， A は特異になるので，任意の1行を除く。この QW に関する自由度は， $s-1$ である。

表 4 のデータについて， A は

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

と記述される。(第1行+第2行) = -(第3行+第4行)より， A の階数は $u=3$ となる。ゆえに， A の任意の1行を除く。

$$QW = 1.450 \text{ (d.f. = 3)}$$

と算出され，検査工“甲”の検査水準の周辺分布は，“乙”のそれと同等である。

4. 若干の考察

本報告では，順序カテゴリー・データ解析における GSK 法の応用について論じた。種々の接近法の中でも，特に理論的かつ実践的適用性の観点から関心の高

い累積ロジット・モデル, 平均応答モデル, 連関モデル, 周辺同等モデルの GSK 法による解析を展開した。GSK 法は, 重みつき最小二乗法を援用するため, 数値計算が簡単で(例えば, 連関モデル I では, 収束時間が非常に短縮される), 解析結果も漸近的に最尤法によるそれと同等になる。ゆえに, 現実の場での GSK 法の有効性は今後, 増大するであろう。

ここで取り上げなかった方法について簡単に触れておく, Nelder ら (1972) は, 分布型を指数族まで拡張した一般化線形モデルを考察している。GSK 法とそれとの関連性については, McCullagh (1980) の方式に関する Koch ら (1985) に詳しい。Semenya ら (1983) は, Bradley & Terry (1952) モデルを GSK 法で解析している。

最後に, 順序カテゴリー・データ解析での GSK 法の今後の展開で, 未解決な問題を挙げておく。

1) 線形モデルによる厳密な定式化が不可能な場合, 近似式を採用しなければならない。特に, Goodman の連関モデルの一つであるモデル II (RC モデル) は, 定式化ができない。したがって, 種々の連関モデルの当てはめにおいて, 最尤法の代りに重みつき最小二乗法で解析する際, 本稿で述べた連関モデルのみに限定するか, 近似式による RC モデルの定式化に頼らざるを得ない。

2) 近似式による線形モデル化を行った場合, その精度が危惧される。

3) 多元表の場合の連関分析について, Landis ら (1978) は GSK 法で解析している。しかし, カテゴリーに順序を有する分割表については, Clogg (1982) のモデルをもとにした方式が必要になる。

4) 残差分析における重みつき最小二乗法と最尤法との比較・検討が要請される。

なお, 重みつき最小二乗法と最尤法による未知パラメータの推定精度の比較については, 稿を改めて議論する。

謝 辞

本稿のまとめるに当り, ノースカロライナ大学の G.G. Koch 教授, ならびにレフェリーから有益なご教示をいただきました。ここに記して謝意を表します。

参 考 文 献

Berkson, J. (1955) Maximum likelihood and minimum χ^2 estimates of the logistic function. *J.*

Amer. Statist. Assoc., **50**, 130-162.

Berkson, J. (1968) Application of minimum logit χ^2 estimate to a problem of Grizzle with a notation on the problem of "no interaction". *Biometrics*, **24**, 75-95.

Bhapkar, V.P. (1961) Some tests for categorical data. *Ann. Math. Statist.*, **32**, 72-83.

Bhapkar, V.P. (1966) A note on the equivalence of two test criteria for hypotheses in categorical data. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **61**, 228-235.

Bishop, Y.M.M., Fienberg, S.E. and Holland, P.W. (1975) *Discrete Multivariate Analysis*. Cambridge, Mass.: MIT Press.

Bradley, R.A. and Terry, M.B. (1952) Rank analysis of incomplete block designs: I. The method of paired comparisons. *Biometrics*, **39**, 324-345.

Clogg, C.C. (1982) Some models for the analysis of association in multiway cross-classifications having ordered categories. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **77**, 803-815.

Forthofer, R.N. and Koch, G.G. (1973) An analysis for compounded functions of categorical data. *Biometrics*, **29**, 143-157.

Goodman, L.A. (1979) Simple models for the analysis of cross-classifications having ordered categories. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **74**, 537-552.

Grizzle, J.E. (1961) A new method of testing hypotheses and estimating parameters for the logistic model. *Biometrics*, **17**, 372-385.

Grizzle, J.E., Starmer, C.F. and Koch, G.G. (1969) Analysis of categorical data by linear models. *Biometrics*, **25**, 489-504.

広津千尋 (1982) 離散データ解析, 教育出版。

Imrey, P.B., Koch, G.G. and Stokes, M.E. (1981) Categorical data analysis: Some reflections on the log linear model and logistic regression. Part I: Historical and methodological overview. *Inter. Statist. Rev.*, **49**, 265-283.

Imrey, P.B., Koch, G.G. and Stokes, M.E. (1982) Categorical data analysis: Some reflections on the log linear model and logistic regression. Part II: Data analysis. *Inter. Statist. Rev.*, **50**, 35-63.

経済企画国民生活局 (1984) 第4回国民生活選好度調査, 大蔵省印刷局。

Koch, G.G., Freeman, D.H., Jr. and Tolley, H.D. (1975) *The Asymptotic Covariance Structure of Estimated Parameters from Contingency Table Log-Linear Models*. Inst. Statist. Mimeo Ser. No. 1046, Chapel Hill, Univ. of North Carolina.

Koch, G.G., Imrey, P.B., Singer, J.M., Atkinson, S. S., and Stokes, M.E. (1984) *Lecture Notes for Analysis of Categorical Data*. Chapel Hill,

- Univ. of North Carolina.
- Koch, G.G., Amara I.A. and Singer J.M. (1985) A two-stage procedure for the analysis of ordinal categorical data. In P.K. Sen (ed.), *Biostatistics: Statistics in Biomedical, Public Health and Environmental Sciences*. Amsterdam: North-Holland.
- 国民生活審議会 国民生活選好度調査小委員会(1979) 第3回国民生活選好度調査. 大蔵省印刷局.
- Landis, J.R., Stanish, W.M., Freeman, J.L. and Koch, G.G. (1976) A computer program for the generalized chi-square analysis of categorical data using weighted least squares (GEN-CAT). *Comput. Prog. in Biomedic.*, **6**, 196-231.
- Landis, J.R., Heyman, E. R. and Koch, G.G. (1978) Average partial association in three-way contingency tables: a review and discussion of alternative tests. *Inter. Statist. Rev.*, **46**, 237-254.
- 真壁 肇 (1974) 品質管理. 朝倉書店.
- McCullagh, P. (1980) Regression models for ordinal data. *J.Roy. Statist. Soc. B* **42**, 109-142.
- 内閣官房内閣審議室分室(1980) 多元化社会の生活関心. 大蔵省印刷局.
- Nelder, J.A. and Wedderbusm, R.W.M. (1972) Generalized linear models. *J. Roy. Statist. Soc.*, **A 135**, 370-384.
- Semenya, K.A., and Koch, G.G. (1980) *Compound Function and Linear Model Methods for the Multivariate Analysis of Ordinal Categorical Data*. Inst. Statist. Mimeo Ser. No. 1323, Chapel Hill, Univ. of North Carolina.
- Semenya, K.A., Koch, G.G., Stokes, M.E. and Forthofer, R.N. (1983) Linear models methods for some rank function analyses of ordinal categorical data. *Commun. Statist. Theor. Meth.*, **12**, 1277-1298.
- Simon, G. (1974) Alternative analyses for the singly-ordered contingency table. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **69**, 537-552.
- 東海銀行 すまいとくらしの相談室(1985) 子どもの教育費・東海銀行広報室.
- 辻谷将明 (1984) 順序カテゴリー・データ解析. 行動計量学, **11**, 22-38.
- 辻谷将明 (1985) 順序カテゴリー・データ解析 (第2報). 行動計量学, **13**, 33-43.
- Wald, A. (1943) Tests of statistical hypotheses concerning several parameters when the number of observations is large. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **54**, 426-482.
- Williams, O.D., and Grizzle, J.E. (1972) Analysis of contingency tables having ordered response categories. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **67**, 55-63.