時間の経過とともに観測値のいくつかが母集団を 移動する場合の判別分析について

中 西 寛 子*

DISCRIMINANT ANALYSIS WHEN SOME DATA MOVE FROM ONE
POPULATION TO ANOTHER IN THE PROCESS OF TIME

Hiroko NAKANISHI

In this paper Fisher's linear discriminant function is investigated in which some data move from one to the other of two populations in the process of time. Utilizing the model for such kind of data, the mean vectors, common covariance matrix, discriminant coefficient vector, and cutting point are derived for each time. Two theorems for the coefficient vector and cutting point are obtained and certain numerical results for them are presented.

From these theorems and numerical results, it is shown that if the data which change populations are close to the boundary of the end population, they do not greatly affect the coefficient vector and cutting point.

Lastly, we show the example of prevention of geriatric diseases and discuss the coefficient vector and cutting point.

1. 研究の動機

判別分析では各母集団より得られた観測値を用いて判別関数を決定し分析するが、観測値のうちのいくつかが時間の経過とともに属している母集団を移動するため、各変量に対する判別係数や判別点が分析時に依存することがある。医学の分野では老人病(心筋梗塞, 脳卒中など)の追跡調査の研究にこの例がみられる。具体的に説明すると、健康者 n 名の集団検診後 x 年経過したときの調査において n_1 名が発症、ついで $y(y=x+z, 0<z)$ 年後の調査においてはさらに n_2 名が発症した場合、 n_2 名が非発症群から発症群へ z 年間に移動したことになる。初めの集団検診で得られた値のみを用いるので、判別係数ベクトルや判別点は、 x 年後における分析と y 年後における分析とでは移動した n_2 名の観測値のため異なる。たとえば、脳血管障害の発症について廣田安夫(1978)が研究を行っている。彼は、集団検診後 5 年半後に発症した者 70 名と非発症者

1,405 名(対照群として 70 名を選ぶ)をもとに判別分析を行っている。この分析時点を 5 年半から 3 年(または 8 年)に変えた場合、発症者数が減り(または増し)、得られる解は変化すると考えられる。そこで、「検診後、何年以内に発症したものを発症群としてとらえれば良いか」という問題が生じる。

本研究の目的は時間の経過によって母集団を変える観測値が判別係数ベクトルや判別点にどのような影響をもたらすかをモデルをたてて数値的に検証し、実例を示すことによって上記のような問題を考察することである。ここで用いる判別関数は Fisher の線形判別関数(Fisher (1936))である。

2. Fisher の線形判別関数

母集団 Π_i^* から得られた n_i^* 個の p 変量ベクトルの観測値 $\mathbf{x}_{ij}(i=1, 2, j=1, \dots, n_i^*)$ に対する Fisher の線形判別関数について説明する。 p 変量ベクトル $\mathbf{x}'=(x_1, \dots, x_p)$ に関する線形モデル $f(\mathbf{x})=a_1x_1+\dots+a_px_p$ のうち両母集団の差を最も明確に説明する判別係数ベクトル $\mathbf{a}'=(a_1, \dots, a_p)$ は、両母集団に対する標本平均ベクトル $\bar{\mathbf{x}}_i^*$ 、標本共分散行列 $S_i^*(i=1, 2)$ と

* 北海道大学工学部情報工学 (Division of Information Engineering, Graduate School of Engineering, Hokkaido University)

それから得られる標本群内共分散行列 S_w^* を用いて、

$$a' = (\bar{x}_1^* - \bar{x}_2^*)' S_w^{*-1}$$

と表される。ここで、

$$\begin{aligned}\bar{x}_i^* &= \frac{\sum_{j=1}^{n_i^*} x_{ij}}{n_i^*}, \\ S_i^* &= \frac{\sum_{j=1}^{n_i^*} (x_{ij} - \bar{x}_i^*)(x_{ij} - \bar{x}_i^*)'}{n_i^*}, \\ S_w^* &= \frac{n_1^* S_1^* + n_2^* S_2^*}{n_1^* + n_2^*}\end{aligned}$$

である¹⁾。Fisher の線形判別関数 $f(x)$ は求められた判別係数ベクトル a によってつぎのように作られる。

$$f(x) = a'x.$$

新しく得られた観測値 x に対して $f(x)$ がある定数 h (これを判別点と呼ぶ) より大きいときその観測値 x を母集団 Π_1^* に割り当て、そうでないときには母集団

Π_2^* に割り当てる。ここでは、判別点 $h = \frac{a'(\bar{x}_1^* + \bar{x}_2^*)}{2}$

を用いる。この判別点の極限は二つの母集団の事前確率と誤判別に対する損失が等しく、さらに、同一の共分散行列を持つ正規分布に従うとき、両母集団の誤判別における損失を等しくかつ最小にする (Anderson (1984))。また、母集団の離れ具合を示す尺度として

$$\lambda = \frac{n_1^* n_2^* a' (\bar{x}_1^* - \bar{x}_2^*)}{(n_1^* + n_2^*)^2}$$

を用いる。これは、 $\frac{a' S_B^* a}{a' S_w^* a}$ であり、値が大きいほど両母集団が離れていることを示す。ただし、 S_B^* は標本群間共分散行列である。最後に、上で示した判別点 h を用いた Fisher の線形判別法はデータの平行移動、回転、スケールの拡大縮小に対して不変であることを注意しておく。

3. モデル

時間が経つにつれ母集を変える観測値のモデルを考えるにあたり Lachenbruch (1966, 1974, 1979) の初期誤分類に対する研究に用いられたモデルを応用する。彼は、母集団 Π_1^* から得られたとされている観測値のうち α_1 の割合のものが実際は母集団 Π_2^* から得られており、また、母集団 Π_2^* から得られたとされている観

測値のうち α_2 の割合のものが実際は母集団 Π_1^* から得られている場合についての誤判別率を初期類分類のない場合と比較している。本研究は、観測値のうち α の割合のものが母集団 Π_1^* から母集団 Π_2^* に移動したと考え、移動前と移動後と比較することが目的であるので彼の研究に用いたモデルを書き直すことによって次のようなモデルが得られる。

三つの群 Π_1, Π_2, Π_3 よりそれぞれ標本平均ベクトル $\bar{x}_j$ と標本共分散行列 $S_j (j=1, 2, 3)$ が得られたとする。ある時点 t_1 では群 Π_1 と群 Π_2 が母集団 Π_1^* をなし、群 Π_3 が母集団 Π_2^* をなす。また、ある時点 $t_2 (t_1 < t_2)$ では群 Π_1 が母集団 Π_1^* を、群 Π_2 と群 Π_3 が母集団 Π_2^* を作る。つまり、二番目の群 Π_2 が母集団 Π_1^* から母集団 Π_2^* へ移動したことになる。また、各群 Π_j の標本数を $n_j (j=1, 2, 3, n_1 + n_2 + n_3 = n)$ とする。

時点 $t_k (k=1, 2)$ における母集団 Π_i^* の標本平均ベクトル $\bar{x}_i^{*(k)}$ と標本共分散行列 $S_i^{*(k)} (i=1, 2)$ は次のようになる。

$$\bar{x}_1^{*(1)} = \frac{n_1}{n_1 + n_2} \bar{x}_1 + \frac{n_2}{(n_1 + n_2)} \bar{x}_2, \quad \bar{x}_2^{*(1)} = \bar{x}_3,$$

$$\begin{aligned}S_1^{*(1)} &= \frac{n_1}{n_1 + n_2} S_1 + \frac{n_2}{n_1 + n_2} S_2 \\ &\quad + \frac{n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)', \\ S_2^{*(1)} &= S_3, \\ \bar{x}_1^{*(2)} &= \bar{x}_1, \\ \bar{x}_2^{*(2)} &= \frac{n_2}{n_2 + n_3} \bar{x}_2 + \frac{n_3}{n_2 + n_3} \bar{x}_3, \\ S_1^{*(2)} &= S_1, \\ S_2^{*(2)} &= \frac{n_2}{n_2 + n_3} S_2 + \frac{n_3}{n_2 + n_3} S_3 \\ &\quad + \frac{n_2 n_3}{(n_2 + n_3)^2} (\bar{x}_2 - \bar{x}_3)(\bar{x}_2 - \bar{x}_3)'. \end{aligned}$$

従って、時点 $t_k (k=1, 2)$ における標本群内共分散行列は次の様に求められる。

$$S_w^{*(1)} = S + \frac{n_1 n_2}{n(n_1 + n_2)} (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)',$$

$$S_w^{*(2)} = S + \frac{n_2 n_3}{n(n_2 + n_3)} (\bar{x}_2 - \bar{x}_3)(\bar{x}_2 - \bar{x}_3)',$$

ここで

$$S = \frac{n_1 S_1 + n_2 S_2 + n_3 S_3}{n}.$$

また、判別係数ベクトルおよび判別点の式が次の様に求められる。

1) 一般に標本共分散行列には不偏推定量を用いるがここでは後の計算を容易にするため上記のように置いた。なお、本研究における結果は不偏推定量を用いても大きく異ならない。

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{(k)'} &= (\bar{\mathbf{x}}_1^{*(k)} - \bar{\mathbf{x}}_2^{*(k)})' S_W^{*(k)-1} \quad (k=1, 2), \\ h^{(k)} &= \frac{\mathbf{a}^{(k)'} (\bar{\mathbf{x}}_1^{*(k)} + \bar{\mathbf{x}}_2^{*(k)})}{2} \quad (k=1, 2). \end{aligned}$$

4. 判別係数ベクトルと判別点への影響

本章では、母集団を変える観測値が判別係数ベクトルと判別点へおよぼす影響を定理と数値例によって考察する。Fisher の線形判別法がデータの平行移動、回転、スケールの拡大縮小に対して不変であることより、一般性を失うことなく次の仮定を置くことができる。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_1' &= \mathbf{0}', \\ \bar{\mathbf{x}}_2' &= (x_{21}, x_{22}, 0, \dots, 0), \\ \bar{\mathbf{x}}_3' &= (x_3, 0, \dots, 0), \\ 0 &< x_3. \end{aligned} \quad (4.1)$$

また、次の条件を加える。

$$0 \leq x_{21} \leq x_3. \quad (4.2)$$

これは変化する群 Π_2 が群 Π_1 と群 Π_3 の間にあるという条件である。ここでの考察において二つの状況を考える。 $x_{22}=0$ の場合とそうでない場合である。 $x_{22}=0$ の場合とは群 Π_2 の標本平均ベクトル $\bar{\mathbf{x}}_2$ が群 Π_1 の標本平均ベクトル $\bar{\mathbf{x}}_1$ と群 Π_3 の標本平均ベクトル $\bar{\mathbf{x}}_3$ の線分上にあるということである。

4.1 $x_{22}=0$ の場合

$x_{22}=0$ の場合は $\|\frac{\mathbf{a}^{(1)}}{\mathbf{a}^{(1)}}\| = \|\frac{\mathbf{a}^{(2)}}{\mathbf{a}^{(2)}}\|$ が成り立つので判別係数ベクトルの方向が二つの時点において同じであることがわかる。しかしながら、この判別係数ベクトルが不変である状況においても判別点の不変性は得られないことが次の定理によって示される。

定理 1. $x_{22}=0$ の条件のもとで、 $n_2=0$ ならば $\frac{h^{(1)}}{\|\mathbf{a}^{(1)}\|} = \frac{h^{(2)}}{\|\mathbf{a}^{(2)}\|}$ となる。またそのときに限る (この証明は付録 1 に示す)。

$x_{22}=0$ の場合でも判別点に影響を受けることがわかったのでその影響の程度を $p_1 = \frac{n_1}{n}$, $p_2 = \frac{n_2}{n}$, $p_3 = \frac{n_3}{n}$ と x_{21} にいくつかの値を与えることによって調べる。ただし、 $x_3=1$, $\frac{\sigma^{11}}{2\sqrt{\sum_{j=1}^p (\sigma^{i1})^2}} = 1 (S^{-1} = (\sigma^{ij}))$ とする。変化量を次のように置く。

表 1 変化量 Δh の値

x_{21}	p_1	p_2	p_3	$h^{(1)}$	Δh
0.00	0.3	0.2	0.5	-1.000	0.286
		0.1	0.6	-1.000	0.143
	0.5	0.2	0.3	-1.000	0.400
		0.1	0.4	-1.000	0.200
	0.7	0.2	0.1	-1.000	0.667
		0.1	0.2	-1.000	0.333
0.25	0.3	0.2	0.5	-1.100	0.314
		0.1	0.6	-1.062	0.170
	0.5	0.2	0.3	-1.071	0.371
		0.1	0.4	-1.042	0.192
	0.7	0.2	0.1	-1.056	0.556
		0.1	0.2	-1.031	0.281
0.50	0.3	0.2	0.5	-1.200	0.343
		0.1	0.6	-1.125	0.196
	0.5	0.2	0.3	-1.143	0.343
		0.1	0.4	-1.083	0.183
	0.7	0.2	0.1	-1.111	0.444
		0.1	0.2	-1.063	0.229
0.75	0.3	0.2	0.5	-1.300	0.371
		0.1	0.6	-1.187	0.223
	0.5	0.2	0.3	-1.214	0.314
		0.1	0.4	-1.125	0.175
	0.7	0.2	0.1	-1.167	0.333
		0.1	0.2	-1.094	0.177
1.00	0.3	0.2	0.5	-1.400	0.400
		0.1	0.6	-1.250	0.250
	0.5	0.2	0.3	-1.286	0.286
		0.1	0.4	-1.167	0.167
	0.7	0.2	0.1	-1.222	0.222
		0.1	0.2	-1.125	0.125

$$\begin{aligned} \Delta h &= \left| \frac{h^{(2)}}{\|\mathbf{a}^{(2)}\|} - \frac{h^{(1)}}{\|\mathbf{a}^{(1)}\|} \right| \\ &= \left| \frac{p_2 x_{21} + p_3}{p_2 + p_3} - \frac{p_2 x_{21} + p_1 + p_2}{p_1 + p_2} \right| \end{aligned}$$

変化量 Δh が 0 のとき二つの時点での分析は同じであり、その値が大きいとき判別点が大きく異なる。表 1 で示された結果から次のようなことが言える。

- i) $p_2=0.2$ のときのほうが $p_2=0.1$ のときよりも両変化量の値は大きく、約 2 倍である。
- ii) 群 Π_1 の標本数が他の群に比べて大きく群 Π_2 が群 Π_3 に近いと変化量 Δh は小さい。

4.2 $x_{22} \neq 0$ の場合

(4.1) の仮定と (4.2) の条件のもとで $x_{22} \neq 0$ 場合を

図1(a) $x_{21}=0.0$

図1(b) $x_{21}=0.5$

1. $p_1=0.3, p_2=0.2, p_3=0.5$
 2. $p_1=0.3, p_2=0.1, p_3=0.6$
 3. $p_1=0.5, p_2=0.2, p_3=0.3$
 4. $p_1=0.5, p_2=0.1, p_3=0.4$
 5. $p_1=0.7, p_2=0.2, p_3=0.1$
 6. $p_1=0.7, p_2=0.1, p_3=0.2$
- 図1 x_{22} に対する値 D の変化

考える. $x_{22} \neq 0$ ならば $\frac{\mathbf{a}^{(1)}}{\|\mathbf{a}^{(1)}\|} \neq \frac{\mathbf{a}^{(2)}}{\|\mathbf{a}^{(2)}\|}$ と思われる. 特に, S が単位行列 I のときについてこのことを示す.

定理2. $S=I$ で $x_{22} > (<) 0$ のとき, $a_1^{(1)} a_2^{(1)} < (>) 0$, $a_1^{(2)} a_2^{(2)} > (<) 0$, $a_3^{(k)} = \dots = a_p^{(k)} = 0$, ここで, $\mathbf{a}^{(k)} = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_p^{(k)}) (k=1, 2)$ (この証明は付録2に示す).

このように $x_{22} \neq 0$ のとき母集団を変える観測値が判別係数ベクトルに影響をおよぼすことがわかったので, 値 D を次のように x_{22} に対する判別係数ベクトル

のベクトルの方向としての変化を調べる.

$$D = \cos \theta = \frac{(\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)})}{\|\mathbf{a}^{(1)}\| \|\mathbf{a}^{(2)}\|} \quad (4.3)$$

値 D が1のときは判別係数ベクトルが変化しなかったことを示し, 値が小さくなるほど変化が大きいことを示す.

図1は p_1, p_2, p_3 と x_{21} にいくつかの値を与え x_{22} を動かしたものである. ただし, $x_3=1, S=I$ とする. 図1から見られるいくつかの結果を以下に示す.

iii) x_{22} の値が大きいかつ3よりも小さいとき値 D も小さい. ただし, $x_{22} \rightarrow \infty$ のとき $D \rightarrow 1$ (付録3の(1), (2), (3), (4) 式を (4.3) 式に代入すると得られる).

iv) $p_2=0.2$ のときのと比べると $p_2=0.1$ のときの方が値 D は1に近い.

v) 群 Π_3 の標本数が他の群に比べて小さいとき値 D は小さい.

以上に述べた数値例による結果のうち i) と iv) はごく自然であるが, 残りの三つは興味深い結果である. 結果の ii) と iii) は定理1とともに考え合わせると「群 Π_1 の標本数が他の群に比べて大きな場合, 群 Π_3 の近傍にあり群 Π_1 の方向にある観測値が群 Π_1 より群 Π_3 に移動しても判別係数ベクトルや判別点に (定数倍を除いて) 影響を与えない」という結論が導かれる.

5. 具体例と考察

老人病の研究では, ある年に多くの健康者に集団検診を実施し, 後の追跡調査において発症者のデータから疾病の要因を調べることがよく行われる. 十分な発症群を得るためには長い年月が必要となるが, 一方, 初めの検診で得られたデータの効力は年月とともに減少する. この様な問題を一挙に解決することは容易ではないが, 第4章で考察したことから判別係数ベクトルの動きを調べることによって糸口を見いだしたい.

脳卒中の例を取り上げる. ただし, 説明を容易にするため変量や標本数を少なくしている. ある年, 四項目: 肥満度, 収縮期血圧, 拡張期血圧, 血清総コレステロールの検査が48名の健康者に実施され次の年に4名が発症, また次の年に4名が発症…した(表2). 各変量を全体の標本平均と標本分散で標準化し, 判別係数ベクトルと判別点を求め, 判別係数ベクトルのノルムで割ることによって正規化したものを表3に示した. さらに, 各調査年に対して母集団の離れ具合を

表2 脳卒中のデータ

発症年	番号	項目			
		1	2	3	4
検診日 ～1年後	1	71	126	90	241
	2	245	172	112	211
	3	16	136	94	184
	4	-117	136	88	251
1年後 ～2年後	5	-64	140	90	138
	6	96	104	66	141
	7	108	132	88	248
	8	17	112	68	234
2年後 ～3年後	9	88	166	100	154
	10	47	128	82	236
	11	216	142	74	203
	12	48	120	74	203
3年後 ～4年後	13	-27	114	72	141
	14	58	180	80	203
	15	-184	114	70	260
	16	-76	148	78	248
4年後 ～5年後	17	88	142	66	172
	18	-89	110	62	201
	19	-9	182	100	219
5年後 ～6年後	20	-94	144	84	180
	21	-75	174	82	153
	22	-263	150	88	215
6年後まで 非発症	23	-8	136	88	183
	24	-103	120	78	131
	25	-154	150	82	175
	26	-220	98	66	125
	27	-26	146	78	126
	28	17	96	68	185
	29	165	124	72	295
	30	-101	138	78	227
	31	66	102	58	169
	32	13	99	54	186
	33	158	120	80	222
	34	-85	110	60	143
	35	-32	122	66	195
	36	-125	114	64	181
	37	-85	110	50	174
	38	-29	118	70	211
	39	-111	140	82	184
	40	-76	130	70	116
	41	-217	114	72	225
	42	-153	132	70	116
	43	-107	120	64	147
	44	32	146	82	177
	45	25	118	82	299
	46	-68	140	70	198
	47	-9	120	70	191
	48	-47	138	78	224

項目 1: 肥満度 2: 収縮期血圧 3: 拡張
期血圧 4: 血清総コレステロール

測る尺度 λ と誤判別数も示した。また、2つの調査時点の判別係数ベクトルの変化を表4に示した。

以下に表3と表4から得られた結果について考察する。

1) 年が経つにつれ、尺度 λ が小さくなる。つまりこのことは、本例においては年々、母集団間の離れ具合が小さくなり発症群と非発症群の差異を説明することが困難になって行くことを示している。

2) 1年後から4年後の調査における判別係数ベクトルの変化は小さいが判別点の値は徐々に減少している。これは前年の調査で発症群に近い非発症者が順に発症したと考えられる。

3) 5年後と6年後に関して、判別係数ベクトルの変化が他に比べて大きいことが見られる。このことは今までと異なる何かが生じたと思われる。

尺度 λ のみを考察すると1年後の調査を用いれば良いことになるが、実際問題として不合理である。また、判別係数ベクトルの変化という概念を導入すると、5年後以後の調査を用いて疾病の要因を調べることは誤判別数が増していることからあまり良いとはいえない。尺度 λ 、誤判別数、判別係数ベクトルの変化を総合すると、本例では、3年後の調査を用いるのが良いという結論を導くことができる。

6. ま と め

本研究は、時間の経過とともに母集団を移動する観測値がFisherの線形判別関数を用いた判別分析の判別係数ベクトルや判別点に与える影響をモデルを用いて考察したものである。

まず、判別係数ベクトルに何の影響もおよぼさない条件のもとで判別点が変わるのでその変化量を定義し、数値例を用いて判別点の変化を様相を具体的に調べた。次に、判別係数ベクトルに影響を与える観測値の状態を調べるため、判別係数ベクトルの変化を表現する値を定義し、考察した。これらの結果より得られたことは第4章にまとめられている。

最後に、脳卒中の追跡調査を実例として上げ、判別分析を行なう時点の決定という実際に直面する問題を示した。また、この実例において、判別係数ベクトルの動きを調べ、第4章の定理や数値例の結果と照らし合わせて上記の問題を考察した。

謝 辞

本研究を進めるにあたり多くの助言を下された北海

表3 各調査時における判別係数と判別点

年後	発症者数	非発症者数	判別係数				ノルム $\ a\ $	尺度 λ	判別点 h	誤判別点
			1	2	3	4				
1	4	44	.100	-.540	.826	.125	4.457	1.758	.657	7
2	8	40	.206	-.627	.750	.045	3.831	1.005	.350	8
3	13	35	.373	-.594	.711	-.056	3.839	1.071	.256	6
4	16	32	.393	-.513	.748	.149	2.014	0.481	.159	10
5	19	29	.544	-.350	.737	.195	1.395	0.360	.108	12
6	22	26	.313	-.070	.930	.179	1.052	0.295	.047	15

項目 1: 肥満度 2: 縮小期血圧 3: 拡張期血圧 4: 血清総コレステロール

表4 判別係数ベクトルの変化(値 D)

年度	1	2	3	4	5	6
1	1.000					
2	.984	1.000				
3	.938	.980	1.000			
4	.953	.971	.975	1.000		
5	.877	.893	.924	.974	1.000	
6	.860	.814	.809	.882	.915	1.000

道大学の河口至商教授ならびに佐藤義治助教授に感謝の意を表します。また、審査員の方々から有益なご教示をいただきました、ここに記して感謝の意を表します。

付 録 1

定理1の証明

$n_2=0$ のときは明らか。

$S_W^{*(1)} = S + \frac{n_1 n_2}{n(n_1 + n_2)} (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)'$ の逆行列

は Bartlett (1951) の結果より

$$\begin{aligned} S_W^{*(1)-1} &= S^{-1} - k S^{-1} (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)' S^{-1} \\ &= S^{-1} - k x_{21}^2 S^{-1} A S^{-1} \end{aligned}$$

と表される。ここで

$$\begin{aligned} k &= \frac{n_1 n_2}{n(n_1 + n_2) + n_1 n_2 x_{21}^2 \sigma^{11}} \\ S^{-1} &= (\sigma^{ij}), \\ A &= (a_{ij}), \begin{cases} a_{11} = 1, \\ a_{ij} = 0 (i \neq 1, j \neq 1). \end{cases} \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} \frac{h^{(1)}}{\|a^{(1)}\|} &= \frac{-\{n_2 x_{21} + (n_1 + n_2) x_3\} \sigma^{11}}{2(n_1 + n_2) \sqrt{\sum_{i=1}^p (\theta^{i1})^2}}, \\ \frac{h^{(2)}}{\|a^{(2)}\|} &= \frac{-(n_2 x_{21} + n_3 x_3) \sigma^{11}}{2(n_2 + n_3) \sqrt{\sum_{i=1}^p (\sigma^{i1})^2}} \end{aligned}$$

であるから、もし $\frac{h^{(1)}}{\|a^{(1)}\|} = \frac{h^{(2)}}{\|a^{(2)}\|}$ ならば

$$\begin{aligned} &\{n_2 x_{21} + (n_1 + n_2) x_3\} (n_2 + n_3) \\ &= (n_2 x_{21} + n_3 x_3) (n_1 + n_2) \end{aligned}$$

これを変形すると

$$n_2 \{(n_1 + n_2)(x_3 - x_{21}) + (n_2 + n_3)x_{21}\} = 0.$$

{ } の値は常に正だから $n_2 = 0$.

付 録 2

定理2の証明

$S = I$ のとき $x_{22} > (<) 0$ に対して

$$\begin{aligned} a_1^{(1)} &= \frac{n(n_2 x_{21} - n_1 x_3 - n_2 x_3) - n_1 n_2 x_{22}^2 x_3}{C_1} \quad (1) \\ &< (<) 0, \end{aligned}$$

$$a_2^{(1)} = \frac{n_2 x_{22}(n + n_1 x_{21} x_3)}{C_1} > (<) 0, \quad (2)$$

$$a_1^{(2)} = \frac{-\{n(n_2x_{21} + n_3x_3) + n_2n_3x_{22}^2x_3\}}{C_2} < (<) 0, \quad (3)$$

$$a_2^{(2)} = \frac{-n_2x_{22}\{n + n_3x_3(x_3 - x_{21})\}}{C_2} < (>) 0, \quad (4)$$

ここで

$$C_1 = n(n_1 + n_2) + n_1n_2(x_{21}^2 + x_{22}^2) > 0,$$

$$C_2 = n(n_2 + n_3) + n_2n_3\{(x_{21} - x_3)^2 + x_{22}^2\} > 0.$$

$a_q^{(k)} = 0 (k=1, 2, q=3, \dots, p)$ は明らか。

参考文献

- Anderson, T.W. (1984). *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis 2nd Edition*, New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Bartlett, M.S. (1951). An inverse matrix adjustment arising in discriminant analysis. *Annals*

of Mathematical Statistics **22**, 107-111.

Fisher, R.A. (1936). The use of multiple measurements in taxonomic problems. *Annals of Eugenics* **7**, 179-188.

廣田安夫 (1978). 脳血管障害発症の予測, 最新医学, **33**, No. 1, 56-57.

Lachenbruch, P.A. (1966). Discriminant analysis when the initial samples are misclassified. *Technometrics* **8**, No. 4, 657-662.

Lachenbruch, P.A. (1974). Discriminant analysis when the initial samples are misclassified II: nonrandom misclassification models. *Technometrics* **16**: No. 3, 419-424.

Lachenbruch, P.A. (1979). Note on initial misclassification effects on the quadratic discriminant functions. *Technometrics* **21**, No. 1, 129-132.

—1987年4月受付, 1987年8月再受付—