大学入試における予備選抜倍率についての検討

矢 野 一 幸*, 大 内 俊 二**, 田 栗 正 章***

INVESTIGATION ON THE MULTIPLIER OF PRELIMINARY SELECTION IN ENTRANCE EXAMINATION TO UNIVERSITIES

Kazuyuki YANO, Shunji OUCHI and Masaaki TAGURI

Suppose we have only 40 places to be filled in a department, and there are N candidates writing a two stage selection entrance examination to an university. We wish to determine a reasonable number m such that $40 \times m = n$, where $N - n$ is the number of candidates failing the first stage.

In this paper, this number m is termed the multiplier. Then, we evaluate the group-size of candidates who could not pass the examination in practice, but would pass it provided that the preliminary selection would not be done. Under the normality assumption on the marks, we give a method which estimates the probability corresponding to the group-size from censored data, and propose a method to decide the reasonable multiplier in the preliminary examination.

Simulation is carried out for the combination of some parameters using random numbers and discussion is made on the results. Robustness on the normality and the influence of estimating parameters are also discussed briefly.

1. は じ め に

近年の大学入試制度の変更は極めて複雑であるが、その一つの目的として受験機会の複数化と多面性のあるきめ細かな入学試験の実施を目指していると考えられる。受験機会が複数化すれば、当然受験生の総数は増加するが、一方膨大な数の受験生に対してはきめ細かな入学試験を行うことは実際には不可能であろう。したがって何らかの形で予備選抜を行うことは、望ましいことではないかもしれないが、現実には重要な課題であると考ええる。

本研究では、従来の共通一次試験や大学入試センター試験（以下一次試験と呼ぶ）と各大学が独自に行う二次試験の合計得点で合否判定を行う場合の、一次

の得点に基づく予備選抜の妥当性を、統計学的観点から検討することを目的としている。具体的には、予備選抜で問題となる部分、すなわち予備選抜で不合格となったが、予備選抜を行わなかったとしたら合格したであろうグループの大きさを評価するため、想定した母集団（2次元正規分布）から抽出したデータについてのシミュレーション実験を行う。

解析の方法は、まず完全な2次元正規分布のモーメントと切れた（センサードされた）2次元正規分布のモーメントの間の関係を利用して、センサードされたデータに基づいて完全な2次元分布を推定する。そして推定された分布の下で、予備選抜で問題となる部分の大きさを評価する。

センサードデータに基づく2次元正規分布の推定 (Johnson & Kotz (1972) 参照) や、テスト得点のデータに対する各種分布のあてはめ (池田 (1984) およびその参考文献参照) についての研究は数多いが、本論文のような観点からの公表された研究は見当たらない (矢野 (1982), 大内・田栗 (1987), 浅井・大内 (1988) 参照)。

* 筑波大学附属高等学校 (University of Tsukuba, Senior High School at Otsuka)

** 木更津工業高等専門学校 (Kisarazu National College of Technology)

*** 千葉大学理学部 (Faculty of Science, Chiba University)

ここで、解析に使用するデータとして、実際の入試データをそのまま用いることには問題がある。そこで本研究では、母集団分布として想定する2次元正規分布のパラメータの値が現実にとりうる範囲を実際のデータから求め、それらの範囲内の代表的な値をパラメータにもつ分布に対して予備選抜倍率をいろいろに変化させてシミュレーション実験を行う。また実際に適用する場合には、まず志願者倍率を予想し、問題となる部分が十分小さくなるように予備選抜倍率を決定する。

ところで、以下で述べる解析結果を、状況が複雑で種々の要素を考慮に入れなければならない現実の場にそのまま適用することは極めて危険であろう。しかし、現実からの要請により予備選抜を行わなければならない場合、予備選抜倍率に関して何らかの判断を下さねばならない場合には、本研究は1つの参考にはなると考える。

2. 解析の方法

2.1 仮定するモデルと入手可能なデータ

次のように記号を定める。

X : 一次試験の得点を表す確率変数

μ_X : X のしたがう分布の平均

σ_X : X のしたがう分布の標準偏差 ($\sigma_X > 0$)

Y : 二次試験の得点を表す確率変数

μ_Y : Y のしたがう分布の平均

σ_Y : Y のしたがう分布の標準偏差 ($\sigma_Y > 0$)

ρ : X と Y との相関係数

さて、過去の経験から、2次元確率変数 (X, Y) の同時分布は、一般には2次元正規分布に比較的近いと考えられるので、ここでは次の仮定を置いて解析を進める。

[仮定 1] 確率変数 (X, Y) は、2次元正規分布にしたがう。すなわち

$$(X, Y) \sim N_2(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho)$$

現実の状況では、この仮定は厳密には満足されていないであろうが、この点に対する検討は、第5節で行う。

ここで次のような記号を導入する。

p^* : 予備選抜で不合格となったが、予備選抜を行わなかったとしたら合格したであろう受験者に対応する部分の確率

α : 一次試験 (予備選抜試験) における合格最低点

γ : 予備選抜を行わなかった場合の合格最低点

γ' : 予備選抜を行った場合の合格最低点

このとき問題となる部分の確率 p^* は、次のように表現できる (図1参照)。

$$p^* = \Pr[X < \alpha \cap X + Y \geq \gamma]$$

図1から判るように、実際には γ と γ' は等しくないが ($\gamma > \gamma'$)、我々は p^* が十分小さくなるように α に対応する予備選抜倍率を選ぶのであるから、一般には γ と γ' は極めて近い値となることが予想される。そこで次のような仮定をおく。

[仮定 2] $\gamma = \gamma'$ を仮定する (図1参照)。

図1. 問題となる部分と対応する確率

この仮定の妥当性については、第5節で検討する。

次に現実の入学試験結果から入手可能なデータについて考える。簡単のために受験者の欠席や失格はないものと仮定し、総志願者数（＝一次試験受験者数）を N 、一次試験（予備選抜）合格者数（＝二次試験受験者数）を N_a 、合格定員を N_A とする。このとき得られるデータは2次元確率変数 (X, Y) の N 個の実現値 $\{(x_i, y_i); i=1, \dots, N\}$ であるが、予備選抜を行ったために y_i については N_a 個の値しかわからない。合格定員、総志願者数および予備選抜倍率 m を指定すれば、 N, N_a, N_A の値は既知であるが、モデルとして仮定した2次元正規分布のパラメータは未知である。また α, γ （〔仮定2〕の下では γ も）は、実際のデータが得られれば定まる値である。

2.2 切れた分布と完全な分布のモーメントの間の関係

2次元正規分布 $N_2(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho)$ に従う確率変数 (X, Y) の確率密度関数を $f_{XY}(x, y)$ としたとき、

$$f_{XY}^*(x, y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{1 - \Phi(u_0)} I_{[\alpha, \infty)}(x);$$

$$u_0 = (\alpha - \mu_X) / \sigma_X$$

で定義される切れた分布を考える。ここで $I_{[\alpha, \infty)}(x)$ は半開区間 $[\alpha, \infty)$ に対する定義関数で、次式で与えられる。

$$I_{[\alpha, \infty)}(x) = \begin{cases} 0 & x \in [\alpha, \infty), \\ 1 & x \in [\alpha, \infty). \end{cases}$$

また、1次元の標準正規分布 $N(0, 1)$ の分布関数を $\Phi(u)$ 、確率密度関数を $\phi(u)$ とし

$$h(u) = \frac{\phi(u)}{1 - \Phi(u)}$$

とおくと、次の関係が成立する。

$$h'(u) = -h(u) \cdot [u - h(u)].$$

このとき、一般に X, Y の多項式 $P(X, Y)$ の f_{XY}^* (x, y) にわたる期待値を $E_a(P(X, Y))$ と表すと、

$$E_a(P(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(x, y) f_{XY}^*(x, y) dx dy$$

であるから、切れた分布の下での (X, Y) の平均、分

散、共分散及び相関係数 ρ_a が、部分積分を繰り返すことによって、次のように求められる。

$$E_a(X) = \mu_X + \sigma_X h(u_0) \quad [\equiv \mu_{X|a}],$$

$$E_a(Y) = \mu_Y + \rho \sigma_Y h(u_0) \quad [\equiv \mu_{Y|a}], \quad (1)$$

$$V_a(X) = \sigma_X^2 [1 - h'(u_0)] \quad [\equiv \sigma_{X|a}^2],$$

$$V_a(Y) = \sigma_Y^2 [1 - \rho^2 h'(u_0)] \quad [\equiv \sigma_{Y|a}^2], \quad (2)$$

$$Cov_a(X, Y) = \rho \sigma_X \sigma_Y [1 - h'(u_0)] \quad [\equiv \sigma_{XY|a}],$$

$$\rho_a = \left[\frac{1 - h'(u_0)}{1 - \rho^2 h'(u_0)} \right]^{1/2} \rho. \quad (3)$$

2.3 完全な分布のパラメータの推定

前節で得たモーメントの関係を利用して、与えられたデータからは直接推定できない完全な分布のパラメータ μ_Y, σ_Y^2, ρ の推定を考える。現実の問題では、これは二次試験の得点 Y に関するパラメータである。

まず、完全な分布のパラメータ μ_X, σ_X^2 に対するモーメント推定量は、データから直接求めることができ、それぞれ次式で与えられる。

$$\hat{\mu}_X = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i,$$

$$\hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{N-1} \left[\sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2 \right].$$

次に、モーメント法により切れた分布のパラメータ $\mu_{Y|a}, \sigma_{X|a}^2, \sigma_{Y|a}^2, \sigma_{XY|a}, \rho_a$ を推定すると、これらはそれぞれ次式で与えられる。

$$\tilde{\mu}_{Y|a} = \frac{1}{N_a} \sum_{x \geq \alpha} y_i,$$

$$\tilde{\sigma}_{X|a}^2 = \frac{1}{N_a - 1} \left[\sum_{x \geq \alpha} x_i^2 - \frac{1}{N_a} \left(\sum_{x \geq \alpha} x_i \right)^2 \right]$$

$$\tilde{\sigma}_{Y|a}^2 = \frac{1}{N_a - 1} \left[\sum_{x \geq \alpha} y_i^2 - \frac{1}{N_a} \left(\sum_{x \geq \alpha} y_i \right)^2 \right]$$

$$\tilde{\sigma}_{XY|a} = \frac{1}{N_a - 1} \left[\sum_{x \geq \alpha} x_i y_i - \frac{1}{N_a} \left(\sum_{x \geq \alpha} x_i \right) \left(\sum_{x \geq \alpha} y_i \right) \right],$$

$$\tilde{\rho}_a = \tilde{\sigma}_{XY|a} / (\tilde{\sigma}_{X|a} \tilde{\sigma}_{Y|a}).$$

ここで $\sum_{x \geq \alpha}$ は、 $x_i \geq \alpha$ を満足するデータにわたる和を表している。

いま、

$$\hat{u}_0 = (\alpha - \hat{\mu}_X) / \hat{\sigma}_X$$

とおけば、(1)~(3)により、 ρ, σ_Y^2, μ_Y に対するモーメント推定量は次で与えられる。

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_a / [1 - h'(\hat{u}_0)(1 - \hat{\sigma}_a^2)]^{1/2}, \quad (4)$$

$$\hat{\sigma}_Y^2 = \left[1 + \frac{\hat{\rho}_a^2 h'(\hat{u}_0)}{1 - h'(\hat{u}_0)} \right] \hat{\sigma}_{Y|a}^2, \quad (5)$$

$$\hat{\mu}_Y = \hat{\mu}_{Y|a} - \frac{\hat{\rho}_a \hat{\sigma}_{Y|a} h(\hat{u}_0)}{1 - h'(\hat{u}_0)}.$$

2.4 問題となる部分の大きさの推定

まず一次試験と二次試験の合計得点 $x+y$ で合否を決定する場合の合格最低点 γ を求める. [仮定 1] より $(X, Y) \sim N_2(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho)$ であるから,

$$X+Y \sim N(\mu_X+\mu_Y, \sigma_X^2+2\rho\sigma_X\sigma_Y+\sigma_Y^2)$$

となる. したがって γ の推定値は, 次式を満足する $\hat{\gamma}$ とすればよい.

$$Pr[X+Y \geq \hat{\gamma}] = \frac{N_A}{N}.$$

ここで, N_A は合格定員, N は総志願者数である. $\hat{\gamma}$ を求めるためには $X+Y$ の分布の上側確率を計算しなければならないが, この場合には 2.3 節で求めた各パラメータの推定値を用いる. すなわち $N_A/N = q$, 標準正規分布の上側 100 q パーセント点を z_q とすれば, $\hat{\gamma}$ は次で与えられる.

$$\hat{\gamma} = \hat{\mu}_X + \hat{\mu}_Y + z_q (\hat{\sigma}_X^2 + 2\hat{\rho}\hat{\sigma}_X\hat{\sigma}_Y + \hat{\sigma}_Y^2)^{1/2},$$

$$[\Phi(z_q) = q].$$

次に問題となる部分の確率

$$p^* = Pr[X < a \cap X+Y \geq \gamma] \quad (6)$$

を求める. いま次のような確率変数の変換

$$\begin{cases} U = -\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}, \\ V = \frac{(X+Y) - (\mu_X + \mu_Y)}{(\sigma_X^2 + 2\rho\sigma_X\sigma_Y + \sigma_Y^2)^{1/2}} \end{cases} \quad (7)$$

を行えば, 問題の領域 $\{X < a \cap X+Y \geq \gamma\}$ は

$$\begin{cases} U > \frac{\mu_X - a}{\sigma_X} = -u_0, \\ V \geq \frac{\gamma - (\mu_X + \mu_Y)}{(\sigma_X^2 + 2\rho\sigma_X\sigma_Y + \sigma_Y^2)^{1/2}} \equiv v_0 \end{cases} \quad (8)$$

なる連立不等式を満たす領域に変換される (図 2 参照).

[仮定 1] および (7) により確率変数 (U, V) の確率密度関数は存在するので, それを $f_{UV}(u, v)$ とおくと,

図 2. 変換後の問題となる部分と対応する確率

p^* は (6) より

$$p^* = \iint_{\substack{X < a \\ X+Y \geq \gamma}} f_{XY}(x, y) dx dy$$

$$= \int_{-u_0}^{\infty} \int_{v_0}^{\infty} f_{UV}(u, v) du dv \quad (9)$$

となる. [仮定 1] により $f_{XY}(x, y)$ は 2 次元正規分布であり, (7) は線形な変数変換だから, $f_{UV}(u, v)$ も 2 次元正規分布となる. また (7) より $E[U] = E[V] = 0$, $V[U] = V[V] = 1$ である.

さらに,

$$\rho_0 = \rho_{UV}$$

$$= \frac{-\{(\sigma_X/\sigma_Y) + \rho\}}{\{(\sigma_X/\sigma_Y)^2 + 2\rho(\sigma_X/\sigma_Y) + 1\}^{1/2}} \quad (10)$$

とおけば, $(U, V) \sim N_2(0, 0, 1, 1, \rho_0)$ となる. したがって問題の確率 p^* は, 相関 ρ_0 の 2 次元標準正規分布の上側確率 $L(-u_0, v_0; \rho_0)$ を計算することによって求められる ((9) 参照). つまり, $\phi_0(u, v)$ を $N_2(0, 0, 1, 1, \rho)$ の確率密度関数とすれば, $L(h, k; \rho)$ は次式で与えられる.

$$L(h, k; \rho) = \int_h^{\infty} \int_k^{\infty} \phi_0(u, v) du dv. \quad (11)$$

ここで ρ_0 は, $\sigma_X/\sigma_Y, \rho$ に関して単調減少であることに注意しておく (第 4 節参照).

具体的に p^* の値を計算するためには ρ_0 の値を求めなければならないが, これは (10) に 2.3 節で得た各パラメータの推定値を代入した値 $\hat{\rho}_0$ を用いればよい. すなわち p^* の近似値 $\hat{p}^*$ は, 次式により求められる.

$$\hat{p}^* = L(-u_0, v_0; \hat{\rho}_0).$$

なお、2次元正規分布の上側確率および正規分布の上側確率の計算には、戸田・小野(1978)を用い、上側パーセント点の計算には、統計数値表(1972)を用いた。また次節で述べるシミュレーション実験では、正規乱数発生には竹内(1975)、p.100-102にある方法を用い、一様乱数は日立提供ライブラリー(MSL)を使用した。

3. シミュレーション実験

3.1 シミュレーション実験の目的とやり方

現実の問題となる部分に対応する確率 p^* の推定値 $\hat{p}^*$ を求める手順は前節で述べたが、次に $\hat{p}^*$ の精度を評価しておく必要がある。しかし、これを解析的に行うことは、モーメント法による推定ゆえに、難しい。そこで、本節では、 $\hat{p}^*$ の精度について、シミュレーション実験により検討する。

ところで第1節でも述べたように、実験を行う際に用いるデータとして、ある大学の過去の入試データをそのまま用いることは、秘密保持の点で問題があり、また結果の汎用性にも欠けると考える。そこで本実験では、以下に述べる種々のパラメータの現実起こりそうないくつかの値を、過去の経験から設定し、これらの組合せに対してシミュレーション実験を、次の手順で行う。

1° 仮定した2次元正規分布のパラメータと、志願者倍率 $M = N/N_A$ 、予備選抜倍率 $m = N_a/N_A$ 、合格定員 N_A を指定する。

2° 与えられた母集団分布にしたがう2次元正規乱数 (X, Y) を N 組発生させて、その実現値 $\{(x_i, y_i); i = 1, \dots, N\}$ を得る。

3° x_i の値の小さなもの $N - N_a = (M - m) \times N_A$ 個に対応する y_i の値を未知としてデータを作成する。

4° このデータに基づき、2.3節、2.4節で与えた方法により $\hat{p}^*$ を計算する。

5° 以上の2°~4°の手順を S 回繰り返す。これら S 回のシミュレーションにわたる $\hat{p}_1^*, \dots, \hat{p}_S^*$ の平均 $AV(\hat{p}^*)$ および標準偏差 $SD(\hat{p}^*)$ を計算する。

6° 種々のパラメータの値を変えて、1°~5°の手順を繰り返す。

ところで、シミュレーション実験では母集団分布のパラメータの値を指定するので、真の p^* の値が計算可能である。したがって1°の手順のところで p^* を求

めておけば、これと $AV(\hat{p}^*)$ を、バラツキ $SD(\hat{p}^*)$ を考慮に入れて比較することにより、第2節で与えた推定方法の精度を数値的に検討することができる。

さて、本実験で考えた各種のパラメータの値と、それらの値を考えた理由は次の通りである。

2次元正規分布の平均 (μ_X, μ_Y) : (0, 0)

2次元正規分布の標準偏差 (σ_X, σ_Y) :

(2, 1), (1.5, 1), (1, 1), (1, 1.5), (1, 2)

2次元正規分布の相関係数 ρ : 0.2, 0.4, 0.6, 0.8

志願者倍率 M	予備選抜倍率 m
4	2, 3
6	3, 4, 5
8	4, 5, 6, 7

まず志願者倍率については、予備選抜が必要となるのはほぼ $M \geq 4$ 程度と考えられ、また通常の競争単位では $M \leq 8$ 程度を考えておけば十分であろうと判断した。

予備選抜倍率については、一次試験受験者数の半数以上を予備選抜で不合格とすることは通常まずないものと考え、 m としては $M/2 \leq m < M$ を満たす整数値を考えた。

次に平均については、母数 (μ_X, μ_Y) の値が既知の場合には、線形変換により一般性を失うことなく (0, 0) とおける。現実には μ_X, μ_Y は2.3節で与えた式により推定しなければならないが、その値は $(\hat{\mu}_X, \hat{\mu}_Y)$ であり、一般には (μ_X, μ_Y) とは異なるので、 $\hat{p}^*$ の値は (0, 0) の場合とは異なる。しかし推定値の精度がかなりよく、母数の値に近い場合には、2つの $\hat{p}^*$ の値の差は小さいであろうと考え、ここでは母数 (μ_X, μ_Y) の値を (0, 0) に固定した。この点についての考察は、分布のパラメータを推定したための p^* の値への影響評価という形で第5節で行う。なお、シミュレーション実験に際して用いた平均は $(\bar{\mu}_X, \bar{\mu}_Y)$ である。

標準偏差に関しては、 $1/2 \leq \sigma_X/\sigma_Y \leq 2/1$ の範囲内で、上記の5つの組合せを考えたが、これは次の理由による。一般に、 σ_X, σ_Y は一次試験と二次試験の配点に関係している。いま一次の素点 X' と二次の素点 Y' の満点が等しくなるように X', Y' の尺度を決めたとき、それらの確率変数の標準偏差 $\sigma_{X'}, \sigma_{Y'}$ が等しくなったとする。この場合には一次と二次の重み付き点

数 X, Y の標準偏差 σ_X と σ_Y の比は、一次と二次の配点の比に等しくなる。現実には、 $\sigma_X' = \sigma_Y'$ は成立しないであろうが、通常用いられている一次と二次の配点比と、 σ_X' と σ_Y' の比を考慮して、 σ_X/σ_Y について、上記の5種類を考えた。

X と Y の相関係数の値については、予備選抜を行った上で、一次と二次の合計得点で入学者選抜を行うという立場からは、 $\rho > 0$ の範囲で考えておけば十分である。しかし、一次試験と二次試験では受験者の異なった方面での能力を判定しようという場合には、 ρ は0にかなり近い値になることも考えられる。一方 ρ がかなり1に近ければ、問題となる部分の確率 p^* は極めて0に近くなると考えられる(次節の実験結果参照)。そこで ρ の値としては $0.2 \leq \rho \leq 0.8$ とした。

以上で述べた理由により、本解析では、上に与えたパラメータの全ての組合せ180通りの場合について、シミュレーション実験を行った。ここで、合格定員の値 N_A およびシミュレーションの回数 S は p^* の値には影響せず、その推定精度に影響を及ぼすだけであるが、ここでは多少の試行錯誤の結果、 $N_A = 40$, $S = 100$ とした。 $N_A = 40$ は標準的な競争単位の合格定員に近いと思われる。この点に対する検討は、3.2節で行う。

3.2 実験結果とその検討

3.1節で与えた各種パラメータの値の各組合せに対して計算された、真の p^* の値およびシミュレーションにわたる $\hat{p}^*$ の値の平均 $AV(\hat{p}^*)$ が、それぞれ表1の各ますの上段および下段に与えられている。

まず、シミュレーションの推定精度について検討する。表中には示されていないが、 $\hat{p}^*$ のシミュレーションにわたる変動係数 $SD(\hat{p}^*)/AV(\hat{p}^*)$ は、ほとんどの場合極めて小さく、0.1を越えたのは、 $M=4$, $m=3$, $\rho=0.2$ の4つの場合だけであり、最大でも0.23であった。したがってシミュレーションにわたる $\hat{p}^*$ のバラツキは小さく、3.1節で設定した $S=100$, $N_A=40$ という値は妥当であったと考えてよさそう。

次に第2節で述べた推定方法の精度について考える。表1の各ますの上段と下段の数値を比較すると、実際上問題となる p^* と $AV(\hat{p}^*)$ の値の差はあまり大きくない。しかしこの表の結果を第4節で述べるような方法で利用する場合には、 p^* の値より $AV(\hat{p}^*)$ の値の方が大きくなっている方が予備選抜において不合格となる人数を過小評価しないという意味で安全であ

る。しかし表1では逆に $AV(\hat{p}^*) < p^*$ となっている所が、 $76/180 \times 100 = 42.2\%$ ある。この傾向は M , σ_X/σ_Y が小さく、 ρ が大きい場合に多く見られるが、この点について詳しく検討してみる。

p^* の値が十分小さい場合には、 $AV(\hat{p}^*)$ と p^* の大きさの大小は実際上は問題とならないが、 p^* がどの程度大きい場合に注意しなければならないかを考える。大学入試における競争単位の定員 N_A が150人を越えることはあまりないと考え、志願者数は $150 \times M$ 人以下と考えられる。したがって問題となる部分に入る受験生の人数が0.5人以上になってしまう p^* の値の範囲は、 $150 \times M \times p^* \geq 0.5$ で与えられる。 $M=4, 6, 8$ の場合には、それぞれ $p^* \geq 0.00042, 0.00056, 0.00083$ となる。そこで各倍率に応じて、 p^* が上の値を越える場合だけを問題にし、 p^* の値が $AV(\hat{p}^*)$ の値よりどの程度大きいかを調べると、 $r = p^*/AV(\hat{p}^*)$ の値によって次のように分類できる。

$M=4$	$1.0 < r \leq 2.0$	2通り
	$2.0 < r \leq 3.0$	7通り
	$3.0 < r \leq 4.0$	3通り
$M=6$	$1.0 < r \leq 2.0$	14通り
	$2.0 < r \leq 3.0$	3通り
$M=8$	$1.0 < r \leq 2.0$	11通り

したがって第2節の方法によって推定される確率 $\hat{p}^*$ を用いて問題となる部分の確率を真の値 p^* より大きく推定するためには、 $M=4, 6, 8$ の場合 $k=4, 3, 2$ とし、 $k\hat{p}^*$ によって推定を行えば安全であると考えられる。

次に志願者倍率 M と予備選抜倍率 m の変化に対する $AV(\hat{p}^*)$ の変化について調べる。 p^* の値は M に関しては単調増加、 m に関しては単調減少であるが、この傾向は $AV(\hat{p}^*)$ についても同様に成立していることが、表1より判る。 M や m の変化に対する $AV(\hat{p}^*)$ の変化は比較的大きい。したがって、未来の m の値を決定する際には、 M の値を大きく目に評価しておくべきである(第4節参照)。

さらに (σ_X, σ_Y) および ρ の変化に対する $AV(\hat{p}^*)$ の変化について考える。2.4節で注意したように(10)で定義される ρ_0 の値は、 σ_X/σ_Y , ρ に関して単調減少である。一方 $\rho_0 < 0$ であるから、 p^* の値は ρ_0 に関して単調増加であり、したがって σ_X/σ_Y , ρ に関して単調減少となる。この傾向は $AV(\hat{p}^*)$ についても同様に成立していることが、表1より判る。 σ_X/σ_Y や ρ の変化に対する $AV(\hat{p}^*)$ の変化は、 $AV(\hat{p}^*)$ の値が小さな

表 1. いろいろなパラメータの値に対する p^* [上段] および $AV(p^*)$ [下段] の値

$\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$	ρ	$M=4$		$M=6$			$M=8$			
		$m=2$	$m=3$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$
$\frac{2.0}{1.0}$	0.2	.00351 .00694	.00003 .00001	.00051 .00093	.00002 .00001	.00000 .00000	.00012 .00056	.00001 .00001	.00000 .00000	.00000 .00000
	0.4	.00170 .00172	.00000 .00000	.00015 .00013	.00000 .00000	.00000 .00000	.00003 .00004	.00000 .00000	.00000 .00000	.00000 .00000
	0.6	.00045 .00010	.00000 .00000	.00002 .00000	.00000 .00000	.00000 .00000	.00000 .00000	.00000 .00000	.00000 .00000	.00000 .00000
	0.8	.00001 .00000	.00000 .00000	.00000 .00000	.00000 .00000	.00000 .00000	.00000 .00000	.00000 .00000	.00000 .00000	.00000 .00000
$\frac{1.5}{1.0}$	0.2	.00896 .01522	.00030 .00010	.00223 .00327	.00021 .00016	.00000 .00000	.00081 .00223	.00013 .00017	.00001 .00001	.00000 .00000
	0.4	.00485 .00494	.00006 .00001	.00085 .00069	.00004 .00003	.00000 .00000	.00024 .00029	.00002 .00002	.00000 .00000	.00000 .00000
	0.6	.00168 .00052	.00000 .00000	.00015 .00006	.00000 .00000	.00000 .00000	.00002 .00002	.00000 .00000	.00000 .00000	.00000 .00000
	0.8	.00012 .00001	.00000 .00000	.00000 .00000	.00000 .00000	.00000 .00000	.00000 .00000	.00000 .00000	.00000 .00000	.00000 .00000
$\frac{1.0}{1.0}$	0.2	.02160 .03222	.00233 .00090	.00824 .01008	.00183 .00144	.00016 .00012	.00414 .00764	.00129 .00138	.00027 .00025	.00002 .00002
	0.4	.01291 .01320	.00072 .00019	.00387 .00294	.00054 .00040	.00002 .00001	.00162 .00174	.00035 .00035	.00004 .00006	.00000 .00000
	0.6	.00555 .00238	.00009 .00001	.00106 .00052	.00006 .00002	.00000 .00000	.00031 .00023	.00003 .00002	.00000 .00000	.00000 .00000
	0.8	.00078 .00016	.00000 .00000	.00004 .00001	.00000 .00000	.00000 .00000	.00000 .00000	.00000 .00000	.00000 .00000	.00000 .00000
$\frac{1.0}{1.5}$	0.2	.03759 .05189	.00737 .00324	.01792 .01987	.00613 .00490	.00110 .00083	.01061 .01582	.00468 .00456	.00157 .00135	.00027 .00028
	0.4	.02390 .02454	.00289 .00099	.00952 .00706	.00231 .00169	.00024 .00011	.00494 .00500	.00165 .00114	.00038 .00043	.00004 .00004
	0.6	.01171 .00600	.00058 .00013	.00334 .00191	.00042 .00016	.00001 .00001	.00135 .00108	.00027 .00015	.00003 .00004	.00000 .00000
	0.8	.00239 .00073	.00001 .00000	.00027 .00008	.00001 .00000	.00000 .00000	.00005 .00002	.00000 .00000	.00000 .00000	.00000 .00000
$\frac{1.0}{2.0}$	0.2	.04898 .06515	.01232 .00575	.02560 .02723	.01045 .00844	.00249 .00189	.01621 .02207	.00823 .00774	.00333 .00278	.00077 .00076
	0.4	.03217 .03311	.00539 .00209	.01446 .01064	.00442 .00325	.00066 .00033	.00820 .00811	.00330 .00224	.00098 .00104	.00014 .00014
	0.6	.01677 .00930	.00132 .00037	.00570 .00350	.00101 .00040	.00006 .00004	.00263 .00216	.00069 .00039	.00011 .00013	.00001 .00001
	0.8	.00407 .00147	.00004 .00001	.00065 .00022	.00003 .00002	.00000 .00000	.00017 .00008	.00001 .00001	.00000 .00000	.00000 .00000

ところでは比較的大きいが、 $AV(\hat{p}^*)$ の値が大きくなるところではあまり大きくない。しかし $\sigma_x/\sigma_y, \rho$ の値が小さいところでは、すなわち一次に比べて二次の配点比が大きい場合や一次と二次の相関が低い場合には、 $p^*, AV(\hat{p}^*)$ の値そのものはかなり大きくなるので注意が必要である。したがって σ_x/σ_y や ρ の値は小さ目に評価しておかねばならない(第4節参照)。 ρ に関しては $\rho=0.6, 0.8$ の場合は、 m があまり小さくない限り $p^*, AV(\hat{p}^*)$ の値はかなり小さく、予備選抜を行うことは実際上は問題がないと思われる。

4. 予備選抜倍率の決定方法

3.2節で求めた数表を用いて、実際に予備選抜倍率 m を求める方法について考える。まず m を決定したい競争単位に対する志願者倍率 M の範囲を、過去の経験から想定する。ここで予備選抜倍率 m は、事前に(例えば募集要項発表時に)公表しなければならないので、その時点では志願者倍率 M は未知と考えるべきである。また、受験場や試験要員、二次試験(論述式筆記試験、面接、小論文等)の手間等、種々の現実的制約を考慮して、 m の候補の範囲を決める。

次に一次試験と二次試験の配点比および関連性を考慮に入れ、また可能ならば、過去のデータからの計算結果を参考にして、その競争単位がとると考えられる σ_x/σ_y および ρ の値の範囲を決定する。

以上の準備の下に、 m を次のようにして決定する。まず上で想定した志願者倍率の範囲の上限 M^* を求める。ここで上限をとるのは、3.2節で述べたように p^* の値は M の単調増加関数であり、我々は考え得る p^* の値の上限を求めるべきだからである。次にその選抜単位に対する $\sigma_x/\sigma_y, \rho$ の範囲の下限 $(\sigma_x/\sigma_y)^*, \rho^*$ を求める。これは2.4節で述べたように、 p^* がこれらの値の単調減少関数となるからである。そしてこれらの値の組合せに対して、予備選抜倍率 m を適当な範囲で変化させ、 p^* の値を表1より求める。この結果に基づいて、現実的に妥当と考えられる p^* の値を与える m の値を決定すればよい。

ここで問題となるのは、 p^* の値はどの位小さければよいかということである。一つの考え方としては、 p^* に対応する人数、すなわち二次試験までを考慮すると合格ラインに達するが、一次試験の成績が悪いために予備選抜で不合格になってしまう人数の推定値 $\hat{n}^*$ を、0.5人より小とする方法が考えられる。この方法によれば、最大志願者数の予想値を $\hat{N}^*$ とすれば、

$$\hat{n}^* = \hat{N}^* \times \hat{p}^* < 0.5 \text{ すなわち } \hat{p}^* < 0.5 / \hat{N}^*$$

を満足する最小の予備選抜倍率を用いればよいことになる。3.2節で述べたように $\hat{p}^*$ の偏りまで考慮する場合には、 $\hat{p}^* < 0.5 / (k\hat{N}^*)$ としておけばよい。

以下に人工的な例を用いて、上記の手順を説明する。
[例] いま、ある競争単位の定員が $N_A = 40$ 名であり、過去の経験より、この競争単位の志願者倍率は、 $M = 6 \sim 8$ 倍程度と考えられるとする。また受験場の広さや試験監督者の人数、二次試験に要する労力等の現実的制約より、予備選抜倍率 m は7倍程度までが望ましいとする。さて、この競争単位の一次試験と二次試験の配点比および過去のデータの解析結果から、 $\sigma_x/\sigma_y \approx 1/1.5$ 、 $\rho = 0.4 \sim 0.6$ 程度と考えられる場合、表1より、 $M^* = 8$ 、 $m = 4 \sim 7$ 、 $(\sigma_x/\sigma_y)^* = 1/1.5$ 、 $\rho^* = 0.4$ に対して $\hat{p}^*$ の値を計算すると、次のようになる。

m	$\hat{p}^*$	m	$\hat{p}^*$
4	0.00500	6	0.00043
5	0.00114	7	0.00004

したがって、上で述べた規準により予備選抜倍率 m を決定すると、この例では定員を40名、最大志願者倍率を8倍としているので、 $\hat{N}^* = 40 \times 8 = 320$ となり、 $\hat{n}^* < 0.5$ とするためには $\hat{p}^* < 0.5 / (k\hat{N}^*) = 0.00078$ とすべきである。したがって予備選抜倍率は6倍程度とするのが良さそうである。

5. いくつかの問題点についての検討

ここでは、2.1節、3.1節で述べたいくつかの問題点について検討を行う。

まず[仮定1]において、得点の分布に2次元正規性を仮定したが、現実には得られる分布は厳密にはこの仮定を満たしていない。このような場合、正規性からのズレが目的とする量に及ぼす影響を評価するために、混合正規分布を仮定して検討を行う方法がしばしば用いられる。そこで、ここでは、次式で表される混合正規分布を考えてみる。

$$f_0(x, y) = q \cdot g_1(x, y) + (1 - q) \cdot g_2(x, y); \\ 0 < q < 1. \quad (12)$$

ここで g_1, g_2 は、それぞれ $N_2(\mu_{x1}, \mu_{y1}, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho_1)$ 、 $N_2(\mu_{x2}, \mu_{y2}, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho_2)$ の確率密度関数とする。いま

(12)における9個のパラメータ($\mu_{x1}, \mu_{y1}, \mu_{x2}, \mu_{y2}, \sigma_x, \sigma_y, \rho_1, \rho_2, q$)の推定値が得られれば、前と同様にして、 p^* の値が計算できる。Day (1969)には混合正規分布のパラメータの最尤推定値を求める方法が紹介されているが、実際にはこの方法でうまく収束する解を求めることは難しいと考えられる。

そこで、分布のパラメータの変化が p^* の変化に及ぼす影響という観点から[仮定1]について検討する。

現実の分布が正規分布と多少異なるために、正規性の仮定の下で得られた p^* の値が過小評価になる危険性が高いのは、真の分布が問題となる部分の方向に裾をひいている場合であると考えられる。実際上問題となるのは p^* の値が大きい場合なので、標準偏差の比 σ_x/σ_y や相関係数 ρ の値が小さい場合について考える。3.2節で検討したように、この場合には p^* の値自体は大きい、 σ_x/σ_y や ρ の変化による p^* の値の変化は比較的小さい。この意味では、分布の正規性からのズレに関して p^* の値は比較的頑健であると思われる。しかし、実際上は σ_x/σ_y や ρ の値を小さく評価しておくことが重要であると考えられる。

以上の考察は、分布のパラメータを推定したための p^* の値への影響を評価する場合にも同様に適用できる。すなわち、推定された分布の平均、標準偏差、相関係数の値が真の値と異なるための p^* に及ぼす影響を考えれば、 p^* の値が大きな場合(σ_x/σ_y や ρ の値が小さい場合)には、それらの値の変化に関して、 p^* の値は比較的頑健であると考えられる。

次に[仮定2]について検討する。(8)において、 γ, γ' に対応する値をそれぞれ v_0, v_0' とすれば、 $\gamma > \gamma'$ であるから $v_0 > v_0'$ が成立する。ところで、予備選抜を行ったデータから得られるのは γ' の値であるから、実際問題では v_0' の動く範囲が計算できることになる。

一方、(9)より、問題となる確率 p^* は v_0 の単調減少関数であるから、[仮定2]をおくことにより p^* の値は真の値より大き目に評価されていることになる。したがって本解析結果を第4節で述べたような形式で利用する限りにおいては、この仮定に問題はないと考える。

謝 辞

本研究に際し、東洋大学浅井 晃教授には大変有益な助言をいただきました。ここに厚く御礼申し上げます。特に問題の所在に関する示唆は、浅井教授によるものであります。

また、審査者の方々にも数多くの助言を賜りましたことを感謝致します。

参 考 文 献

- 浅井 晃・大内俊二(1988) 2段階選抜の適正倍率について、第16回日本行動計量学会大会発表論文抄録集、37-40.
- Day, N.E. (1969) Estimating the components of a mixture of normal distributions. *Biometrika*, 56, 463-474.
- 池田 央(1984) 共通1次学力試験における得点変換とその分布、昭和58年度科学研究費研究成果報告書、125-143.
- Johnson, N.L. and Kotz, S. (1972) *Distribution in Statistics: Continuous Multivariate Distributions*. Wiley.
- 大内俊二・田栗正章(1987) 大学入試における予備選抜倍率についての1つの検討。千葉大学数理科学テクニカルレポート、No.6.
- 竹内 啓(1975) 確率分布の近似。教育出版。
- 戸田英雄・小野令美(1978) 2次元正規分布関数の計算機用アルゴリズム。応用統計学、7, 43-58.
- 統計数値表 JSA-1972 (1972) 日本規格協会。
- 矢野一幸(1982) センサードサンプルに基づく正規母集団の母数の推定について、昭和56年度千葉大学理学研究科修士論文。