3-way 離散データを分類する二つの技法 —相関比と 3 次相関係数による数量化—

岩 坪 秀 一*

TWO CLASSIFICATION TECHNIQUES OF 3-WAY DISCRETE DATA
—QUANTIFICATION BY MEANS OF CORRELATION RATIO AND
THREE-DIMENSIONAL CORRELATION COEFFICIENT—

Shuichi IWATSUBO*

Two new classification methods are proposed to find out clusters from 3-way discrete data. They are quantification methods using the criteria maximizing correlation ratio and three-dimensional correlation coefficient, which lead to solving eigenequations. Three-dimensional correlation coefficient is defined by
$$\frac{E[(X-E(X))(Y-E(Y))(Z-E(Z))]}{\sqrt{E(X-E(X))^2 E(Y-E(Y))^2 E(Z-E(Z))^2}},$$
 which is convenient to estimate the degree of joint relation among three variables of 3-way data. Some properties of three-dimensional correlation coefficient are given. Results of applying the methods to small data are also presented.

1. は じ め に

多変量解析の担っている役割の一つに、データにもとづく分類整理ということがある。例えば m 人の生徒が n 種類のテストを受けたとしよう。そのとき生徒 i がテスト j でとった点数を x_{ij} とすれば、生徒とテストという二つの観点から同時に測定された、いわゆる 2-way データが得られる。生徒群およびテスト群についてわれわれの知識が皆無のとき、得られた 2-way データから何らかの情報を汲み出すにはどうすればよいか。まず生徒群あるいはテスト群の一方に注目して、群を構成している個々のもの同士の親縁性（例えば相関係数）を調べて、似ているもの同士を集め、似ていないもの同士を離しておおざっぱな分類を行うであろう。こうしてまず手がかりをつかんだ上で、分類結果が顕著なら、これらの分類を生ぜしめた要因は何かなど、さらに詳しい分析を行うことができる。こうした目的を満たすための手法として連続量データの場合には主成分分析、離散量データ

の場合には、カテゴリカル主成分分析や数量化 III 類などが考えられている¹⁾。

ところで二つの観点にもう一つの観点を加えて同時測定をした 3-way データというものが考えられる。上記の生徒とテストの例でいえば、例えばテストを行った時点を、つけ加えるべき一つの観点とすることができよう。観点の選び方によっては、2-way データでは明らかにされなかった構造を浮かび上がらせることもできるであろう。将来、パターン認識や行動科学方面の研究で 3-way データを扱うことが多くなると考えられるが、3-way データの多変量解析法は少数例（例えば、Tucker (1964), 京極 (1967), Kettenring (1971), 岩坪 (1971), 竹内・柳井 (1972)), 後藤・松原・児玉 (1972) など）を除き、あまり考えられていない。

本稿では 3-way データを扱う新しい手法を二つ提案する。ただし、ここでいう手法とは、前記のように 3-way データが与えられたとき、何らかの規準で分類整

* 電子技術総合研究所 パターン情報部 (Information Sciences Division, Electrotechnical Laboratory)

1) Okamoto & Endo (1973) には、カテゴリカル主成分分析および数量化 III 類を一般化したカテゴリカル正準相関分析の基本性質が述べられている。

理を行い、さらに詳しく分析するための手がかりを与えるものとする。また、データは離散データ（1-0 データあるいは名義尺度データ）に限定する。手法の一つは三つの観点のうちの一点に注目して分類する手法であり、他の一つは三つの観点を同時に考慮して分類を行うものとするものである。

2. 相関比を規準とした数量化

表1のような 3-way 離散データが与えられている。今、 $k(k=1\sim 4)$ の分類を考え（これが一つの観点を選んだことに相当する）、 i, j に関する 2次元平面の 1-0 パターンをもとに似たもの同士を近づけ、似ていないもの同士を離すように並べかえをする。このとき $k(k=1\sim 4)$ を構成する任意の二つの親縁性を測らなければならないが、通常 2×2 分割表にもとづく一致係数とか類似比が用いられている（表2参照）。ところが表1の例では、 $k(k=1\sim 4)$ の任意の二つを取り出して 2×2 分割

表3 表1の例の 2×2 分割表

		1	0
1		2	4
0		4	6

表を作ると皆、表3と同じものになる。したがって、すべて一致係数は $1/2$ 、類似比は $1/5$ となってしまう。 2×2 分割表にもとづく親縁性の測度を用いる限り、 $k(k=1\sim 4)$ の個体間の区別はなくなる。ここで k に差が出るような手法が考えられないであろうか。

3-way 離散データは図1のように表現することができる。点 (i, j, k) は、例えば生徒 i が項目 j に k 時点で反応していれば1、していなければ0という値をとる。一般に点 (i, j, k) の値を同時確率密度 p_{ijk} と考えて、以下の議論を進める²⁾。

表1 3-way 離散データ ($i, j, k=1\sim 4$)

	j	1	2	3	4
i	1	1	0	0	0
	2	1	1	0	0
	3	1	0	0	0
	4	1	1	0	0

K=1

	j	1	2	3	4
i	1	1	1	1	1
	2	0	1	0	1
	3	0	0	0	0
	4	0	0	0	0

K=2

	j	1	2	3	4
i	1	1	0	0	0
	2	0	1	1	0
	3	0	1	1	0
	4	0	0	0	1

K=3

	j	1	2	3	4
i	1	1	0	0	0
	2	0	1	0	0
	3	0	0	1	1
	4	0	1	1	0

K=4

表2 2×2 分割表と親縁性の測度

		個体 A	個体 B
		1...j...m	1...j...m
	1	1 0 1 0...	1 0 1 1 0...
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	i	1...1 0	1...0 1
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	l	...0...	...1...

		個体 B
		1 0
個体 A	1	a b
	0	c d

a : AとBとがともに1である場合の数
 b : Aが1, Bが0である場合の数
 c : Aが0, Bが1である場合の数
 d : AとBとがともに0である場合の数
 $a+b+c+d=lm$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{一致係数} = \frac{a+d}{a+b+c+d} = \frac{a+d}{lm} \\ \text{類似比} = \frac{a}{a+b+c} \end{array} \right.$$

2) 1-0 データの場合には、1 の総数で各1 を割った値を確率密度とするような3次元等確率分布を考えればよい。

図1 3-way 離散データの構造

$$p_{ij.} = \sum_{k=1}^n p_{ijk} \quad (i=1 \sim l, j=1 \sim m)$$

$$p_{i..} = \sum_{j=1}^m p_{ij.} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n p_{ijk} \quad (i=1 \sim l)$$

今、 $k(k=1 \sim n)$ の各個体を特徴づけているものが、その個体（例えば r ）での (i, j) 平面のパターン（確率密度 p_{ijr} ($i=1 \sim l, j=1 \sim m$)）であると考え、ここで平面パターンの情報をできる限り利用する意味で、図1のLのような層を取り上げる。これらの層の層間分散が、全体の分散に比し最大となるように、すなわち相関比が最大となるように、各 k に重み z_k を与えることにする。

重み z_k ($k=1 \sim n$) の期待値を0としても一般性を失わないので

$$\sum_{k=1}^n p_{..k} z_k = 0$$

と置くことができる。このとき相関比 η_Z^2 を計算すると、

$$\eta_Z^2 = \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m p_{ij.} \left(\sum_{k=1}^n \frac{p_{ijk}}{p_{ij.}} z_k \right)^2}{\sum_{k=1}^n p_{..k} z_k^2} \quad (2-1)$$

となる。 η_Z^2 を最大にするように z_k ($k=1 \sim n$) を決めればよい。

$$\frac{\partial \eta_Z^2}{\partial z_k} = 0 \quad (k=1 \sim n)$$

より、

$$\sum_{k'=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \frac{p_{ijk'} p_{ijk}}{p_{ij.} p_{..k}} \right\} z_{k'} = \eta_Z^2 z_k \quad (k=1 \sim n) \quad (2-2)$$

が得られる。行列、ベクトル表示にすれば、

$$Cz = \eta_Z^2 z \quad (2-3)$$

ただし、 C の (k, k') 要素 $c_{kk'}$ は、

$$c_{kk'} = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \frac{p_{ijk} p_{ijk'}}{p_{ij.} p_{..k}} \quad (k, k' = 1 \sim n) \quad (2-4)$$

であり、 z は $z' = (z_1 z_2 \cdots z_n)'$ なる n 次元縦ベクトルである。

(2-4) より、

$$c_{kk'} \geq 0, \quad \sum_{k'=1}^n c_{kk'} = 1$$

であるので C は確率行列である。また、

$$\begin{aligned} c_{kk'} &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m p(i \cap j | k) p(k' | i \cap j) \\ &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m p(k \rightarrow i \cap j) \bar{p}(i \cap j \rightarrow k') \\ &= Pr(k \rightarrow k') \end{aligned} \quad (2-5)$$

とかきあらわすことができる³⁾ から、 k および k' での平面パターンの近さを (2-5) のような推移確率であらわしていることになる。

(2-3) より、 $\det(C - \eta_Z^2 I_{n \times n}) = 0$ ($I_{n \times n}$ は n 次単位行列) を解き、1を除いた（確率行列は固有値1と対応固有ベクトル $(1 \cdots 1)'$ を持つが $\sum_{k=1}^n p_{..k} z_k = 0$ を満たさないため不適解である）最大固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めればよい。この固有ベクトルの要素の数値が、 k の数量化になっており、これをもとに分類が可能になるのである。

図1の i の数量化および j の数量化も、以上の k の数量化とまったく同様に行うことができる。それぞれの相関比を η_X^2, η_Y^2 であらわせば、

$$Ax = \eta_X^2 x \quad (2-6)$$

$$By = \eta_Y^2 y \quad (2-7)$$

が得られる。ここで A の (i, i') 要素 $a_{ii'}$ と B の (j, j') 要素 $b_{jj'}$ は、

$$a_{ii'} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{p_{ijk} p_{ij'k}}{p_{i.} p_{i'.}} \quad (i, i' = 1 \sim l) \quad (2-8)$$

$$b_{jj'} = \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^n \frac{p_{ijk} p_{ij'k}}{p_{.j} p_{.j'.}} \quad (j, j' = 1 \sim m) \quad (2-9)$$

である。 A, B ともに確率行列であることは C 同様明らかである。固有方程式、

$$\det(A - \eta_X^2 I_{l \times l}) = 0$$

$$\det(B - \eta_Y^2 I_{m \times m}) = 0$$

(I_l, I_m はそれぞれ l 次、 m 次単位行列である) を解き、1を除いた最大固有値に対応する固有ベクトルを求めれば、 i および j の数量化がなされ分類が可能となる。

3) $p(i \cap j | k)$ は k のもとで i が j であるような条件付確率をあらわす。 $p(k \rightarrow i \cap j)$ はそれを推移確率の形にあらわしたものである。

3-way 1-0 データの場合の行列要素は (2-4), (2-8), (2-9) からすぐ求めることができる。

$$N_{ijk} = \begin{cases} 1 & i, j, k \text{ が同時に反応しているとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

$$N_{ij\cdot} = \sum_k N_{ijk}, \quad N_{i\cdot\cdot} = \sum_j N_{ij\cdot} = \sum_j \sum_k N_{ijk},$$

$$N = \sum_i N_{i\cdot\cdot} = \sum_i \sum_j \sum_k N_{ijk} \quad (2-10)$$

N は 3 次元格子空間において, i, j, k ともに反応している点の総数である。

$p_{ijk} = \frac{N_{ijk}}{N}$ と考えると (2-4), (2-8), (2-9) は,

$$c_{kk'} = \sum_i \sum_j \frac{N_{ijk} N_{ijk'}}{N_{ij\cdot} N_{\cdot\cdot k}} \quad (k, k' = 1 \sim n) \quad (2-11)$$

$$a_{ii'} = \sum_j \sum_k \frac{N_{ijk} N_{i'jk}}{N_{i\cdot\cdot} N_{\cdot\cdot k}} \quad (i, i' = 1 \sim l) \quad (2-12)$$

$$b_{ij'} = \sum_i \sum_k \frac{N_{ijk} N_{ij'k}}{N_{\cdot\cdot j} N_{\cdot\cdot k}} \quad (j, j' = 1 \sim m) \quad (2-13)$$

となる。

表 1 の例について実際に固有方程式を解いて k の数量化を行おう。結果は, 第 1 固有値 1 (これは除く), 第 2, 第 3 固有値が重根で 0.583, 第 4 固有値が 0.5 となる。この第 4 固有値に対応する固有ベクトルを求めれば, $z_1 = z_2 = z_3 = -0.1179$, $z_4 = 0.3536$ となり, k は (1, 2, 3) と (4) という 2 つのクラスにわかれる⁴⁾。先の 2×2 分割による親縁性の測度を用いた場合には, k の間に差はなかったのであるが, この方法によると構造化がなされたことになる。表 1 で斜線をほどこした部分に関する類似性が強調されて, このようなクラスタが得られたことがわかる。

3. 3 次相関係数を規準とした数量化

3.1 3 次相関係数の性質

以上の例では, 三つの観点のうちの一つの観点到に注目

- 4) この場合には 1 を除く最大固有値が重根となるため, 固有ベクトルは一意に決まらない。そこで次に大きい単根の固有根 (第 4 固有値) を採用した。実際のデータを使って数量化する場合にも, 1 を除く固有値のうちで, 2 番目, 3 番目に大きいものを採用して数量化しても意味を持つことがある。2 番目, 3 番目のものは, おそらくもとのデータの局所的な構造を反映するものなのであろうが, なお検討を要する問題と思われる。

して, その構成要素に重みづけを行った。ところで 2-way 離散データを扱う数量化 III 類のうまみは, 二つの観点の関連性に注目して関連がもっとも高くなるように (III 類の場合, 関連性の測度を相関係数としている) それぞれの要素に重みづけを行い, 同時分類がなされていることである。3-way データの場合についても, 三つの観点の関連の程度を知りたい場合が起こる。こうした関連性の測度として 3 次相関係数を取り上げ, その数量化について述べる。

竹内 (1973) は, 3 次の相関係数として,

$$\rho_{xyz} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z})}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 \sum_i (y_i - \bar{y})^2 \sum_i (z_i - \bar{z})^2}} \quad (3-1-1)$$

あるいは,

$$\rho_{XYZ} = \frac{E\{(X - E(X))(Y - E(Y))(Z - E(Z))\}}{\sqrt{E(X - E(X))^2 E(Y - E(Y))^2 E(Z - E(Z))^2}} \quad (3-1-2)$$

を提案している。

(3-1-1) であらわされる ρ_{xyz} を ρ_1 と置く。

図 1 のような 3-way データが与えられたとする。離散分布の場合, 同時確率密度,

$$p_{ijk} = P_r(X = x_i, Y = y_j, Z = z_k) \\ 1(i = 1 \sim l, j = 1 \sim m, k = 1 \sim n)$$

を用いて, (3-1-2) の定義にしたがって書き下すと,

$$\rho_2 = \frac{\sum_i \sum_j \sum_k p_{ijk} \left(x_i - \sum_i p_{i\cdot\cdot} x_i \right)}{\sqrt{\sum_i p_{i\cdot\cdot} \left(x_i - \sum_i p_{i\cdot\cdot} x_i \right)^2}} \times$$

$$\frac{\left(y_j - \sum_j p_{\cdot j\cdot} y_j \right) \left(z_k - \sum_k p_{\cdot\cdot k} z_k \right)}{\sqrt{\sum_j p_{\cdot j\cdot} \left(y_j - \sum_j p_{\cdot j\cdot} y_j \right)^2} \sqrt{\sum_k p_{\cdot\cdot k} \left(z_k - \sum_k p_{\cdot\cdot k} z_k \right)^2}} \quad (3-1-3)$$

が得られる。さらに等確率の場合を考えて, (3-1-3) の p_{ijk} が,

$$p_{ijk} = \frac{N_{ijk}}{N} \quad (i = 1 \sim l, j = 1 \sim m, k = 1 \sim n)$$

と書きあらわされるとき 3 次相関係数を ρ_3 としよう。ここで N_{ijk} , N は (2-10) で定義されているものである。

る。

3次相関係数の性質については、ほとんど調べられていない。ここでは、考察の結果明らかになった性質をいくつか挙げる。

まず、 ρ_1, ρ_2, ρ_3 はいずれも有界であることがいえる。

〔定理1〕 $\rho_1^2 < 1$ (3-1-4)

ただし、 $x_i (i=1 \sim n)$ はすべて等しい値をとることはないとする。 $y_i, z_i (i=1 \sim n)$ についても同様とする。

(証明) (3-1-1) において、

$$u_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sqrt{\sum_i^n (x_i - \bar{x})^2}}, \quad v_i = \frac{y_i - \bar{y}}{\sqrt{\sum_i^n (y_i - \bar{y})^2}},$$

$$w_i = \frac{z_i - \bar{z}}{\sqrt{\sum_i^n (z_i - \bar{z})^2}}$$

と置けば、 $\rho_1 = \sum_i^n u_i v_i w_i$ 。また $\sum_i^n u_i^2 = \sum_i^n v_i^2 = \sum_i^n w_i^2 = 1$ である。シュワルツの不等式より、

$$\begin{aligned} \rho_1^2 &= \left\{ \sum_i^n u_i (v_i w_i) \right\}^2 \leq \left(\sum_i^n u_i^2 \right) \left(\sum_i^n v_i^2 w_i^2 \right) \\ &= \sum_i^n v_i^2 w_i^2 \end{aligned}$$

しかるに、 $\sum_i^n v_i^2 w_i^2 < \left(\sum_i^n v_i^2 \right) \left(\sum_i^n w_i^2 \right) = 1$ である。

なぜなら、 $\sum_i^n v_i^2 w_i^2 \geq 1$ とすれば、

$$\begin{aligned} \sum_i^n v_i^2 w_i^2 - \left(\sum_i^n v_i^2 \right) \left(\sum_i^n w_i^2 \right) \\ = \sum_i^n v_i^2 w_i^2 - \sum_i^n v_i^2 w_i^2 - v_1^2 \sum_{i=2}^n w_i^2 - v_i^2 \sum_{i=2}^n w_i^2 \\ - \dots - v_n^2 \sum_{i=2}^n w_i^2 \geq 0 \end{aligned}$$

となり、すべての i について v_i, w_i は0になる。したがって $y_i = \bar{y}, z_i = \bar{z} (i=1 \sim n)$ となって仮定に反する。

よって $\rho_1^2 < 1$ が成り立つ。 (証明終わり)

ρ_2 について $p_{ijk} = p_{i..} p_{.j.} p_{..k}$ や $p_{ijk} = p_{i..} p_{.jk}$ などが成立すれば、(3-1-3) より $\rho_2 = 0$ となる。以下ではこのような独立性が成り立っていない場合について考察することにする。

〔定理2〕

$$\rho_2^2 < \sum_i^l \sum_j^m \sum_k^n \frac{p_{ijk}^2}{p_{i..} p_{.j.} p_{..k}} \quad (3-1-5)$$

(証明)

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{x_i - \sum_i^l p_{i..} x_i}{\sqrt{\sum_i^l p_{i..} \left(x_i - \sum_i^l p_{i..} x_i \right)^2}}, \\ v_j &= \frac{y_j - \sum_j^m p_{.j.} y_j}{\sqrt{\sum_j^m p_{.j.} \left(y_j - \sum_j^m p_{.j.} y_j \right)^2}}, \\ w_k &= \frac{z_k - \sum_k^n p_{..k} z_k}{\sqrt{\sum_k^n p_{..k} \left(z_k - \sum_k^n p_{..k} z_k \right)^2}} \end{aligned}$$

と置けば、

$$\begin{cases} \sum_i^l p_{i..} u_i^2 = \sum_j^m p_{.j.} v_j^2 = \sum_k^n p_{..k} w_k^2 = 1 \\ \sum_i^l p_{i..} u_i = \sum_j^m p_{.j.} v_j = \sum_k^n p_{..k} w_k = 0 \end{cases}$$

となり、

$$\rho_2 = \sum_i^l \sum_j^m \sum_k^n p_{ijk} u_i v_j w_k$$

と表現できる。

$$\begin{aligned} \rho_2^2 &= \left\{ \sum_i^l \left(\sum_j^m \sum_k^n \frac{p_{ijk}}{\sqrt{p_{i..}}} v_j w_k \right) \sqrt{p_{i..}} u_i \right\}^2 \\ &\leq \sum_i^l \left(\sum_j^m \sum_k^n \frac{p_{ijk}}{\sqrt{p_{i..}}} v_j w_k \right)^2 \left(\sum_i^l p_{i..} u_i^2 \right) \\ &\quad \text{(シュワルツの不等式より)} \\ &= \sum_i^l \left\{ \sum_j^m \left(\sum_k^n \frac{p_{ijk}}{\sqrt{p_{i..}} \sqrt{p_{.j.}}} w_k \right) \sqrt{p_{.j.}} v_j \right\}^2 \\ &\leq \sum_i^l \left\{ \sum_j^m \left(\sum_k^n \frac{p_{ijk}}{\sqrt{p_{i..}} \sqrt{p_{.j.}}} w_k \right)^2 \right\} \left(\sum_j^m p_{.j.} v_j^2 \right) \\ &\quad \text{(シュワルツ不等式より)} \\ &= \sum_i^l \sum_j^m \left(\sum_k^n \frac{p_{ijk}}{\sqrt{p_{i..}} \sqrt{p_{.j.}} \sqrt{p_{..k}}} \sqrt{p_{..k}} w_k \right)^2 \\ &\leq \sum_i^l \sum_j^m \left\{ \sum_k^n \left(\frac{p_{ijk}}{\sqrt{p_{i..} p_{.j.} p_{..k}}} \right)^2 \right\} \left(\sum_k^n p_{..k} w_k^2 \right) \\ &\quad \text{(シュワルツ不等式より)} \\ &= \sum_i^l \sum_j^m \sum_k^n \frac{p_{ijk}^2}{p_{i..} p_{.j.} p_{..k}} \end{aligned}$$

最後の不等式で等号が成り立つとすれば、

$$\frac{p_{ijk}}{\sqrt{p_{i..} p_{.j.} p_{..k}}} = a \sqrt{p_{..k}} w_k \quad (k=1 \sim n)$$

でなければならない。α は 0 でない定数である。

$$\begin{aligned}\frac{p_{ijk}}{\sqrt{p_{i..}p_{.j.}}} &= \alpha p_{..k}w_k \\ \sum_k^n \frac{p_{ijk}}{\sqrt{p_{i..}p_{.j.}}} &= \alpha \sum_k^n p_{..k}w_k \\ \text{右辺} &= 0 \\ \text{左辺} &= \frac{p_{ij.}}{\sqrt{p_{i..}p_{.j.}}} \neq 0\end{aligned}$$

となるので、等号をとることはない。

よって、

$$\rho_a^2 < \sum_i^l \sum_j^m \sum_k^n \frac{p_{ijk}^2}{p_{i..}p_{.j.}p_{..k}}$$

となり、定理が証明された。(証明終わり)

ところで、(3-1-1) は、実数の三つ組が n 個与えられているときの 3 次相関係数をあらわしている。この場合 (3-1-2) の定義にしたがって書き下せば

$$\rho_{xyz} = \frac{1}{\sqrt{n}} \rho_{XYZ} \quad (3-1-6)$$

なる関係が成り立っていることがわかる。 ρ_a について、三つ組が N 個与えられていると考えれば、(3-1-6) の関係式および定理 1 の証明を用いて $\rho_a < \sqrt{N}$ が成り立つことが容易にわかる。

なお、定理 2 の (3-1-5) に示された上界値を求めるのに、(2-10) で定義された $p_{ijk} = \frac{N_{ijk}}{N}$ を用いれば、 $\rho_a/\sqrt{N}$ としてもその上界は、定理 1 での上界 1 より小さくなることもある。

以下、本稿ではとくにことわらない限り、3 次相関係数を (3-1-2) で定義されている量と考えることにする。

定理 2 にあらわれた $\sum_i^l \sum_j^m \sum_k^n \frac{p_{ijk}^2}{p_{i..}p_{.j.}p_{..k}}$ はどのような意味を持つ量であろうか。

$$p_{ijk} = \frac{N_{ijk}}{N} \quad (i=1 \sim l, j=1 \sim m, k=1 \sim n)$$

を用いて、三つの分類が互いに独立であるという仮説を検定する χ^2 統計量を計算すると、

$$\begin{aligned}\chi^2 &= N \sum_i^l \sum_j^m \sum_k^n \frac{(p_{ijk} - p_{i..}p_{.j.}p_{..k})^2}{p_{i..}p_{.j.}p_{..k}} \\ &= N \sum_i^l \sum_j^m \sum_k^n \left\{ \frac{p_{ijk}^2}{p_{i..}p_{.j.}p_{..k}} - 2p_{ijk} + p_{i..}p_{.j.}p_{..k} \right\} \\ &= N \left(\sum_i^l \sum_j^m \sum_k^n \frac{p_{ijk}^2}{p_{i..}p_{.j.}p_{..k}} - 1 \right)\end{aligned}$$

よって、

$$\sum_i^l \sum_j^m \sum_k^n \frac{p_{ijk}^2}{p_{i..}p_{.j.}p_{..k}} = \frac{\chi^2}{N} + 1 \quad (3-1-7)$$

すなわち $\sum_i^l \sum_j^m \sum_k^n \frac{p_{ijk}^2}{p_{i..}p_{.j.}p_{..k}}$ は χ^2 統計量と密接な関係があることがわかり、3-way 離散データの同時関連性の程度をあらわしている。この統計量によって、与えられた 3-way データを 3 次相関係数による数量化で調べることに意義があるかどうか見積もることができ

る。 χ^2 の展開式より、

$$\sum_i^l \sum_j^m \sum_k^n \frac{p_{ijk}^2}{p_{i..}p_{.j.}p_{..k}} \geq 1 \quad (3-1-8)$$

がいえる。等号が成り立つのは $p_{ijk} = p_{i..}p_{.j.}p_{..k}$ のときである。

さて (3-1-1) において $x_i = y_i = z_i (i=1 \sim n)$ と置くと、

$$\rho_{xyz} = \frac{\sum_i^n (x_i - \bar{x})^3}{\left(\sqrt{\sum_i^n (x_i - \bar{x})^2} \right)^3} \quad (3-1-9)$$

となって、これは分布の歪度を測るのに用いられている統計量である。これから類推すれば、3 次相関係数は、3 次元空間内の点の散布の状態のうち、一方への偏り具合をあらわしている測度だと考えることができる。実際にすべての点のうち、少数個を除いて同一点に集中すればするほど、3 次相関係数の絶対値は大きくなるのがわかる。以下、そのような偏った点の集合を与えて、3 次相関係数が、どのような値をとるか調べることにしよう。

ρ_1 において定理 1 の証明と同様にして u_i, v_i, w_i を用いれば、

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \sum_i^n u_i v_i w_i, \quad \sum_i^n u_i = \sum_i^n v_i = \sum_i^n w_i = 0, \\ \sum_i^n u_i^2 &= \sum_i^n v_i^2 = \sum_i^n w_i^2 = 1\end{aligned}$$

である。このような関係を満足するものとして、1 点の値だけ異なり、残りの点はすべて同じ値をとるような n 個の点を考え、 n が大きくなったときの ρ_1 の極限値を調べてみる。そのような点として、

$$u_1 = v_1 = w_1 = \frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}},$$

$$u_i = v_i = w_i = -\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \quad (i=2 \sim n)$$

を選ぶことができる。

$$\begin{aligned} \rho_1 &= u_1 v_1 w_1 + \sum_{i=2}^n u_i v_i w_i \\ &= \left(\frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}} \right)^3 - \frac{n-1}{(\sqrt{n(n-1)})^3} \end{aligned}$$

となり、

$n \rightarrow \infty$ のとき $\rho_1 \rightarrow 1$ であることが容易にわかる。
ところで、

$$u_1 = \frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}}, \quad u_i = -\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \quad (i=2 \sim n)$$

のみとして $|\rho_1|$ を求めると、

$$\begin{aligned} |\rho_1| &= \left| u_1 v_1 w_1 + \sum_{i=2}^n u_i v_i w_i \right| \\ &\leq \left| \frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}} v_1 w_1 - \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \sum_{i=2}^n v_i w_i \right| \\ &= \left| \frac{n}{\sqrt{n(n-1)}} v_1 w_1 - \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \sum_{i=1}^n v_i w_i \right| \\ &\leq \frac{n}{\sqrt{n(n-1)}} |v_1 w_1| + \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \sum_{i=1}^n |v_i w_i| \\ &\leq \frac{n}{\sqrt{n(n-1)}} |v_1 w_1| \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2 \sum_{i=1}^n w_i^2} \\ &= \frac{n}{\sqrt{n(n-1)}} |v_1 w_1| + \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \\ &\quad \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |v_1 w_1| < 1 \end{aligned}$$

となる。すなわち、3次相関係数は一つの変数だけに偏りがあっても1に近づくことはない。このことは、三つの変数がすべて同時に一方に偏っているときに $|\rho_1|$ が1に近づいていくということであり、三つの変数間の同時関連性を測るのには便利な性質といえる。

以上、偏りの測定としての性質を ρ_1 について見てきたが、 ρ_2, ρ_3 についても同様なことがいえる。 ρ_3 について調べてみよう。

$$u_i = \frac{x_i - \sum_{j=1}^l \frac{N_{i..}}{N} x_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^l \frac{N_{i..}}{N} \left(x_j - \sum_{i=1}^l \frac{N_{i..}}{N} x_i \right)^2}},$$

$$\begin{aligned} v_j &= \frac{y_j - \sum_{i=1}^m \frac{N_{.j.}}{N} y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{N_{.j.}}{N} \left(y_i - \sum_{j=1}^m \frac{N_{.j.}}{N} y_j \right)^2}}, \\ w_k &= \frac{z_k - \sum_{i=1}^n \frac{N_{..k}}{N} z_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{N_{..k}}{N} \left(z_i - \sum_{k=1}^n \frac{N_{..k}}{N} z_k \right)^2}} \end{aligned}$$

と置けば、

$$\rho_3 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n N_{ijk} u_i v_j w_k$$

と書きあらわされる、上式の右辺の0でない項は、全部で N 個あるので次の形に番号づけできる。

$$\begin{aligned} \rho_3 &= \frac{1}{N} (u_{i_1} v_{j_1} w_{k_1} + u_{i_2} v_{j_2} w_{k_2} + \cdots \\ &\quad + u_{i_N} v_{j_N} w_{k_N}) \end{aligned}$$

これをあらたに $\tilde{u}_s = u_{i_s}, \tilde{v}_s = v_{j_s}, \tilde{w}_s = w_{k_s} \quad (s=1 \sim N)$ と置けば、

$$\rho_3 = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N \tilde{u}_s \tilde{v}_s \tilde{w}_s$$

と書きあらわすことができる。

$$N_{1..} = a, \quad N_{.1.} = b, \quad N_{..1} = c$$

と置く。

$\tilde{u}_1 = u_1 = \sqrt{\frac{N-a}{a}}$ とすれば u_1 は a 個あり、 u_1 以外の残りの $N-a$ 個を $-\sqrt{\frac{a}{N-a}}$ とする。同様に $\tilde{v}_1 = v_1 = \sqrt{\frac{N-b}{b}}$, 残りを $-\sqrt{\frac{b}{N-b}}$, $\tilde{w}_1 = w_1 = \sqrt{\frac{N-c}{c}}$, 残りを $-\sqrt{\frac{c}{N-c}}$ とすれば偏りのある点の集合が得られる。

$b=c=1$ として $\frac{\rho_3}{\sqrt{N}}$ を求める。

$$\begin{aligned} \frac{\rho_3}{\sqrt{N}} &= \frac{1}{N\sqrt{N}} \left(\tilde{u}_1 \tilde{v}_1 \tilde{w}_1 + \sum_{i=2}^N \tilde{u}_i \tilde{v}_i \tilde{w}_i \right) \\ &= \frac{1}{N\sqrt{N}} \left\{ \sqrt{\frac{(N-a)(N-1)(N-1)}{a}} \right. \\ &\quad + (a-1) \sqrt{\frac{N-a}{a}} \frac{1}{\sqrt{(N-1)(N-1)}} \\ &\quad \left. - (N-a) \sqrt{\frac{a}{(N-a)(N-1)(N-1)}} \right\} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{N-a}{Na}} \cdot \frac{N-2}{N-1} \quad (3-1-10)$$

(3-1-10) より, $\rho_3/\sqrt{N}$ は a に関して単調減少関数であるから, $a=1$ のとき $\rho_3/\sqrt{N}$ は最大値をとる. $a=1$ の場合には, $(1, 1, 1)$ という唯一つの格子点を除いて他の格子点はすべて同じ座標値をとる. したがって一番偏りが大きい場合に相当する. また $N \rightarrow \infty$ としたときに, u_1 の数 a もある一定値に収束するとすれば, $\rho_3/\sqrt{N} \rightarrow 1$ となることがわかる.

ρ_2 の場合にも, まったく同様な議論が成り立ち, 3次相関係数が, 3次元空間における点の集まりに偏りがあり, しかも1点への集中性がある場合を見積もる測度であることがわかる.

3.2 数量化と数値例

3.1で3次相関係数が, 有界であること, およびその絶対値が大なるほど偏りが大となり, したがって三つの観点の同時関連性を強調した形であらわすには便利な測度であることを示した. ここでは, 3次相関係数 ρ_2 を規準とした数量化の方法について述べ, 固有方程式を導き, さらにこの手法を架空例について適用した結果を示すことにする.

三つの観点からの同時関連性をもっとも強いということをも3次相関係数の絶対値 $|\rho_2|$ の値で表現することにする. こうして関連性を最大にするという規準で三つの観点 i, j, k を構成している各個体 ($i=1 \sim l, j=1 \sim m, k=1 \sim n$) を同時分類することができる.

$$u_i = \frac{x_i - \sum_i \bar{p}_{i..} x_i}{\sqrt{\sum_i \bar{p}_{i..} x_i^2 - \left(\sum_i \bar{p}_{i..} x_i\right)^2}} = \frac{x_i - \sum_i \bar{p}_{i..} x_i}{\sigma_x} \quad (i=1 \sim l)$$

$$v_j = \frac{y_j - \sum_j \bar{p}_{.j.} y_j}{\sqrt{\sum_j \bar{p}_{.j.} y_j^2 - \left(\sum_j \bar{p}_{.j.} y_j\right)^2}} = \frac{y_j - \sum_j \bar{p}_{.j.} y_j}{\sigma_y} \quad (j=1 \sim m)$$

$$w_k = \frac{z_k - \sum_k \bar{p}_{..k} z_k}{\sqrt{\sum_k \bar{p}_{..k} z_k^2 - \left(\sum_k \bar{p}_{..k} z_k\right)^2}} = \frac{z_k - \sum_k \bar{p}_{..k} z_k}{\sigma_z} \quad (k=1 \sim n)$$

と置けば,

$$\rho_2 = \sum_i \sum_j \sum_k \bar{p}_{ijk} u_i v_j w_k$$

と表現できる. ここで ρ_2 の極値問題を考え, $|\rho_2|$ が最大となるように $x_i (i=1 \sim l), y_j (j=1 \sim m), z_k (k=1 \sim n)$ を決めるのである. これらの値が決定されれば, 分類とか, 互いの関連の程度などを見てとることができ.

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1 \sim l), \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial y_j} = 0 \quad (j=1 \sim m),$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial z_k} = 0 \quad (k=1 \sim n)$$

を計算する.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_2}{\partial x_i} &= \sum_s \left(\sum_j \sum_k \bar{p}_{sjk} v_j w_k \right) \frac{\partial u_s}{\partial x_i} \\ &= \sum_s \left(\sum_j \sum_k \bar{p}_{sjk} v_j w_k \right) (\delta_{is} - \bar{p}_{i..}) \\ &\quad - \bar{p}_{i..} u_s u_i = 0 \quad (i=1 \sim l) \end{aligned}$$

ここで δ_{is} は $i=s$ のとき 1, $i \neq s$ のとき 0 をとる関数である.

$$\sum_j \sum_k \bar{p}_{ijk} v_j w_k - \bar{p}_{i..} \sum_j \sum_k \bar{p}_{.jk} v_j w_k = \rho_2 \bar{p}_{i..} u_i \quad (i=1 \sim l)$$

よって,

$$\sum_j \sum_k (\bar{p}_{ijk} - \bar{p}_{i..} \bar{p}_{.jk}) v_j w_k = \rho_2 \bar{p}_{i..} u_i \quad (i=1 \sim l) \quad (3-2-1)$$

同様にして,

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial y_j} = 0 \quad (j=1 \sim m), \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial z_k} = 0 \quad (k=1 \sim n)$$

より次の関係式を得る.

$$\sum_i \sum_k (\bar{p}_{ijk} - \bar{p}_{.j.} \bar{p}_{i.k}) u_i w_k = \rho_2 \bar{p}_{.j.} v_j \quad (j=1 \sim m) \quad (3-2-2)$$

$$\sum_i \sum_j (\bar{p}_{ijk} - \bar{p}_{..k} \bar{p}_{ij.}) u_i v_j = \rho_2 \bar{p}_{..k} w_k \quad (k=1 \sim n) \quad (3-2-3)$$

(3-2-3) より,

$$w_k = \frac{1}{\rho_2} \sum_i \sum_j \left(\frac{\bar{p}_{ijk}}{\bar{p}_{..k}} - \bar{p}_{ij.} \right) u_i v_j \quad (3-2-4)$$

(3-2-4) を (3-2-1), (3-2-2) に代入すれば,

$$\sum_{i'} \left[\sum_j \sum_{j'} \left\{ \sum_k (\bar{p}_{ijk} - \bar{p}_{i..} \bar{p}_{.jk}) \times \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{p_{i'j'k}}{p_{..k}} - p_{i'j'} \right) \left\{ v_j v_{j'} \right\} u_{i'} \\
 &= \rho_a^2 p_{i..} u_i \quad (i=1 \sim l) \quad (3-2-5) \\
 & \sum_{j'}^m \left[\sum_i^l \sum_{i'}^l \left\{ \sum_k^n (p_{ijk} - p_{.j.} p_{i.k}) \left(\frac{p_{i'j'k}}{p_{..k}} - p_{i'j'} \right) \right\} \right. \\
 & \quad \left. \times u_i u_{i'} \right] v_{j'} = \rho_a^2 p_{.j.} v_j \quad (j=1 \sim m) \quad (3-2-6)
 \end{aligned}$$

(3-2-5), (3-2-6) を見れば明らかなように, 逐次近似法によって固有値および解ベクトルを求めていかなければならない. まず出発ベクトル $u^{(1)}$ を与えて (3-2-6) を解き, そこで得られた固有ベクトルを $v^{(1)}$ として (3-2-5) に代入し, 固有ベクトル $u^{(2)}$ を求める. $\|u^{(n)} - u^{(n-1)}\| < \varepsilon$ ($\| \cdot \|$ はノルム, ε はある小さな正数) となるまで計算を続けなければならない. なお (3-2-5), (3-2-6) からわかるとおり, この固有方程式の行列は対称

表 4 3-way 離散データ ($i=1 \sim 8, j=1 \sim 9, k=1 \sim 10$)

<table><tr><th>i \ j</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th><th>9</th></tr><tr><th>1</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>2</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>3</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>4</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>5</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>6</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>7</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>8</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1										2										3										4										5										6										7										8										K=1	<table><tr><th>i \ j</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th><th>9</th></tr><tr><th>1</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>2</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>3</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>4</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>5</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>6</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>7</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>8</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1										2										3										4										5										6										7										8										K=6
i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9																																																																																																																																																																														
1																																																																																																																																																																																							
2																																																																																																																																																																																							
3																																																																																																																																																																																							
4																																																																																																																																																																																							
5																																																																																																																																																																																							
6																																																																																																																																																																																							
7																																																																																																																																																																																							
8																																																																																																																																																																																							
i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9																																																																																																																																																																														
1																																																																																																																																																																																							
2																																																																																																																																																																																							
3																																																																																																																																																																																							
4																																																																																																																																																																																							
5																																																																																																																																																																																							
6																																																																																																																																																																																							
7																																																																																																																																																																																							
8																																																																																																																																																																																							
<table><tr><th>i \ j</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th><th>9</th></tr><tr><th>1</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>2</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>3</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>4</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>5</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>6</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>7</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>8</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1										2										3										4										5										6										7										8										K=2	<table><tr><th>i \ j</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th><th>9</th></tr><tr><th>1</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>2</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>3</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>4</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>5</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>6</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>7</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>8</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1										2										3										4										5										6										7										8										K=7
i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9																																																																																																																																																																														
1																																																																																																																																																																																							
2																																																																																																																																																																																							
3																																																																																																																																																																																							
4																																																																																																																																																																																							
5																																																																																																																																																																																							
6																																																																																																																																																																																							
7																																																																																																																																																																																							
8																																																																																																																																																																																							
i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9																																																																																																																																																																														
1																																																																																																																																																																																							
2																																																																																																																																																																																							
3																																																																																																																																																																																							
4																																																																																																																																																																																							
5																																																																																																																																																																																							
6																																																																																																																																																																																							
7																																																																																																																																																																																							
8																																																																																																																																																																																							
<table><tr><th>i \ j</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th><th>9</th></tr><tr><th>1</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>2</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>3</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>4</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>5</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>6</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>7</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>8</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1										2										3										4										5										6										7										8										K=3	<table><tr><th>i \ j</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th><th>9</th></tr><tr><th>1</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>2</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>3</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>4</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>5</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>6</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>7</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>8</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1										2										3										4										5										6										7										8										K=8
i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9																																																																																																																																																																														
1																																																																																																																																																																																							
2																																																																																																																																																																																							
3																																																																																																																																																																																							
4																																																																																																																																																																																							
5																																																																																																																																																																																							
6																																																																																																																																																																																							
7																																																																																																																																																																																							
8																																																																																																																																																																																							
i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9																																																																																																																																																																														
1																																																																																																																																																																																							
2																																																																																																																																																																																							
3																																																																																																																																																																																							
4																																																																																																																																																																																							
5																																																																																																																																																																																							
6																																																																																																																																																																																							
7																																																																																																																																																																																							
8																																																																																																																																																																																							
<table><tr><th>i \ j</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th><th>9</th></tr><tr><th>1</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>2</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>3</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>4</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>5</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>6</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>7</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>8</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1										2										3										4										5										6										7										8										K=4	<table><tr><th>i \ j</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th><th>9</th></tr><tr><th>1</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>2</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>3</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>4</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>5</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>6</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>7</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>8</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1										2										3										4										5										6										7										8										K=9
i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9																																																																																																																																																																														
1																																																																																																																																																																																							
2																																																																																																																																																																																							
3																																																																																																																																																																																							
4																																																																																																																																																																																							
5																																																																																																																																																																																							
6																																																																																																																																																																																							
7																																																																																																																																																																																							
8																																																																																																																																																																																							
i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9																																																																																																																																																																														
1																																																																																																																																																																																							
2																																																																																																																																																																																							
3																																																																																																																																																																																							
4																																																																																																																																																																																							
5																																																																																																																																																																																							
6																																																																																																																																																																																							
7																																																																																																																																																																																							
8																																																																																																																																																																																							
<table><tr><th>i \ j</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th><th>9</th></tr><tr><th>1</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>2</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>3</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>4</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>5</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>6</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>7</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>8</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1										2										3										4										5										6										7										8										K=5	<table><tr><th>i \ j</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th><th>9</th></tr><tr><th>1</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>2</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>3</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>4</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>5</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>6</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>7</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>8</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1										2										3										4										5										6										7										8										K=10
i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9																																																																																																																																																																														
1																																																																																																																																																																																							
2																																																																																																																																																																																							
3																																																																																																																																																																																							
4																																																																																																																																																																																							
5																																																																																																																																																																																							
6																																																																																																																																																																																							
7																																																																																																																																																																																							
8																																																																																																																																																																																							
i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9																																																																																																																																																																														
1																																																																																																																																																																																							
2																																																																																																																																																																																							
3																																																																																																																																																																																							
4																																																																																																																																																																																							
5																																																																																																																																																																																							
6																																																																																																																																																																																							
7																																																																																																																																																																																							
8																																																																																																																																																																																							

ではない。

架空例についての計算結果を示そう。表4のような3-way 離散データが与えられているとき、 i, j, k の同時関連性をもっとも大きくなるように i, j, k のおおの($i=1\sim 8, j=1\sim 9, k=1\sim 10$)に実数値を与えて数量化を行う。出発ベクトルの要素 $u_i (i=1\sim 8)$ として i の周辺度数を1の総数で割ったものを取り、パワー法により固有値、固有ベクトルを計算した。 $\varepsilon=0.001$ として5回目に収束し、固有値は6桁まで正しい値が得られた。 i, j, k の固有ベクトル値、得られた最大固有値および3次相関係数の計算結果を示したのが表5である。 i, j, k の各要素について得られた固有ベクトル値を数直線上にプロットして、各要素の近さの度合を図2に示

表5 i, j, k の数量化 (固有ベクトル要素の値)

	i	j	k
1	1.0904	-0.9185	-0.8451
2	-0.6669	0.8972	1.6019
3	1.5338	1.9010	-0.5245
4	-0.7036	-0.6730	0.7301
5	1.2664	1.0423	-0.6781
6	-0.6582	-0.1797	1.7979
7	-0.3343	-0.9665	-0.6991
8	-1.2495	0.6575	0.7055
9		1.9267	-0.6039
10			-0.9302

最大固有値 0.194273

3次相関係数 0.440764

固有ベクトル要素

図2 i, j, k の数量化結果の図示 (数直線上)

した。さらに得られた固有ベクトル値の大小順に表4の i, j, k の並べかえを行ったのが表6である。図2を参考にして、似ているもの同士は線でかこってある。

表6を見れば、 i の(1,3,5), j の(3,9), k の(2,6)が同時に関連を持っている(これを $i[135] j[39] k[26]$ と表示することにする) ことが見て取れる。同様に、 $i[135] j[258] k[26]$, $i[135] j[258] k[48]$, $i[24678] j[1467] k[1357910]$ もわかる。とくに最後のものは、さらに $i[246] j[17] k[1357910]$ なる強い同時関連性を持っていることが考えられる。このように表4からは、必ずしも明らかではなかった構造が、3次相関係数最大化の規準によって i, j, k の各要素を数量化した結果、浮かび上がったといえよう。こうして一度分類結果を見た上で、 i, j, k それぞれの要素を似たもの同士のグループにまとめあげる。でき上がった i, j, k のグループが同時にまとまっているならば、グループの属性間の共通点を調べることによって、同時関連性をもたらした要因や因果関係を調べることができる。

4. おわりに

以上、3-way データを分類整理する手法として、分類整理の規準に相関比と3次相関係数を用いた二つの数量化の方法を提案した。前者は3-way データの三つの観点のうち一つに注目し、他の二つの観点から得られたデータパターンを十分利用することによって分類を行うものである。後者の3次相関係数による数量化は、三つの観点の同時関連性を見出すのに利用できるが、一方実際の数値計算上、逐次近似による解の収束性の問題が生じる。この収束性は、もとのデータの構造に依存するであろう。データ行列と収束の安定性との関係や、実際のデータに適用して分類効果を調べることが、今後の課題である。

3-way データから何らかの情報を汲み出すため分類整理する手法は、このほかにもいろいろ考えられる。とくにデータ点を全体として見たとき、その集まり具合あるいは散布の様子を示す測度を考察しなければならない。3次相関係数はその一つの例である。よりきめ細かな分析を可能にするために3-way さらには一般に n -way データを分類整理する手法が将来開発されていくべきものと考ええる。

謝 辞

本論文に懇切丁寧なコメントを寄せられたレフェリーに

表 6 固有ベクトル値の大小による表4の並べかえ

感謝する。論文の形を整える上で、かずかずの貴重な忠告や誤りの御指摘をいただいた。

参 考 文 献

後藤昌司, 松原義弘, 児玉寛典 (1972) 変量集合が m 個の正準相関分析法について 第4回 行動計量学シンポジウム発表論文抄録集

岩坪秀一 (1971) 多次元質的データ構造の解析——重相関係数による数量化—— 電子技術総合研究所集報, 35, 7

岩坪秀一 (1973) 3-way 離散データの解析——名義尺度の数量化とその規準—— 第2回相関分析シンポジウム予稿集

岩坪秀一 (1974) 3-way データからクラスタを構成する手法について 第2回 日本行動計量学会総会発表論文抄録集

- Kettenring, J.R. (1971) Canonical analysis of several sets of variables. *Biometrika*, **58**, 433-451.
- 京極純一 (1967) n 元度数分布の数量化について 統計数理研究所彙報, **15**, 2
- Okamoto, M. & Endo, H. (1973) Basic Properties of Categorical Canonical Correlation Analysis. *Journal of the Japan Statistical Society*, **4**, 1
- 竹内 啓 (1965) 数理統計学. 東洋経済

- 竹内 啓 (1973) 人間行動の偶然性と確率モデル 第1回行動計量学大会発表論文抄録集
- 竹内 啓・柳井晴夫 (1972) 多変量解析の基礎——線型空間への射影による方法 東洋経済新報社
- Tucker, L.R. (1964) The extension of factor analysis to three dimensional matrices. *Contributions to mathematical psychology*. Holt, Rinehart and Winston, Inc.