学習者モデルとしての項目応答モデルの提案

植 野 真 臣*, 久 保 琢 郎*, 繁 栞 算 男*

PROPOSAL OF ITEM RESPONSE MODEL AS A LEARNER MODEL

Maomi UENO*, Takuro KUBO* and Kazuo SHIGEMATSU*

The authors propose a new Item Response Model which can be regarded as a learner model. Unique features of this model are as follows: 1. The model explains learners' solving process to test items. 2. The parameters of this model can be divided into two kinds, namely, item parameters and incidental parameters. Learners' characteristics are described by the incidental parameters, i.e., latent multidimensional variables. 3. Learners' solving process is expressed in terms of the network, and the transition probability is modeled by Markov Process. We apply this model to real data, and show that the parameters are estimated reliably and they reflect well the characteristics of the learners and items.

1. ま え が き

項目応答モデルは、テスト得点のデータ発生プロセスに特定の数学モデルを想定し、そのモデル・パラメータを推定しようとするものである。その利点として、1) 各学習者が異なる項目からなるテストを受けたときにも各人の能力の推定が同一尺度上で可能となる、2) 将来、テストを受けに来る学習者のための最適な項目の選択が可能となる、などが挙げられる (Hambledon 1991, Baker 1992)。

しかし、その克服すべき問題点として、学習者へのフィードバック情報としては、学習者の能力母数のみであり、その学習者がどのようなプロセスを経て、解答を導きだしたのか、または、どのような点を理解できていないのかなどについては検討することは難しく、学習者へのフィードバックを中心とした形成的評価に直接適用することは難しいことが挙げられる。

本論文では、従来の項目の応答モデルでは評価できなかった学習者の解答過程、解答方略を評価できる項目応答モデルを提案する。本モデルの特徴は、以下の通りである。

1. 学習者モデルを確率ネットワークで構成するこ

とによって、学習者の項目に対する解答過程をモデル化できること。

2. モデル・パラメータを用いて、各学習者及び項目に対する解答過程における特徴分析ができること、

3. 統計的側面の特徴として、

3.1. 多次元潜在変数 θ_i を持つこと、

3.2. 学習者の解答過程を r 重マルコフ過程として捉えたモデルであること、

である。

先行研究では、本論文同様に認知的データを取り入れた項目応答モデルが既にいくつか提案されている。その目的、立場によって、以下の2つに分類できる。

1) 認知的データを補助情報とし、モデル・パラメータの推定精度の向上を図ったもの

2) 認知的データを主情報とし、それ自体のデータ発生モデルの構成を図ったもの

1) では、認知的データすなわち、項目が要求する認知処理プロセスの多さ (Mislevy 1988, Mislevy 1987) や学習者の解答方略 (Mislevy 1988) などを補助データとして、項目パラメータの推定精度を高めようとしたものがある。2) では、項目に正答するのに必要ないくつかの知識成分をパスする確率の積によって、項目への正答確率を表現した MLTM (Multi Component Latent Trait Models) (Embreston 1985) が挙げられ

* 東京工業大学工学部

* Faculty of Engineering, Tokyo Institute of Technology

る。

著者らも、1) においては、自信データを補助情報とし、パラメータの推定精度を高めようとしたもの（繁樹, 脇本 1990）や、自信度を補助情報とし、学習者の認知プロセスを表現した IRT モデルの推定（繁樹, 植野 1992）について報告した。2) では、自信-正誤反応を主データとし、そのデータ発生モデル（植野, 永岡 1990）を提案している。また、上述の研究とは、異なる視点で、単語の読みプロセスにおける所要時間の潜在特性モデル（植野, 吉村, 繁樹 1992）についても提案している。

今回提案するモデルは、特に 2) に分類されるもの

であるが、先行する研究が主に項目に正答する過程にのみ注目していたのに対して、本研究では正答だけでなく学習者の誤った解答に至るプロセスを表現できるモデルを提案する。

2. 学習者モデル

教授-学習過程を一連のシステムとして捉えた学習者評価法が、認知科学や AI 分野において開発されている。それらのアプローチでは、特に学習者モデル（Polson & Richardson 1988）の構築法が重視される。学習者モデルは、学習者の思考過程の予測と、誤り原

図1. ある問題における学習者モデル例

因の診断を余な目的としており、教授方略と密接に関連している。しかし、これらの学習者モデルは、定性的な推論のみによって議論され、データによるモデルの妥当性の検討などは行なわれない。

図1に、確率計算テスト項目における学習者の理解状態、問題解決過程を記述する学習者モデル例を示す。図中のノードは、学習者の問題解決過程における状態集合による構成され、状態集合は学習者の誤った状態をも包含する。また、リンクは解答過程の流れを示している。著者らは、特にこのリンク、すなわち、学習者の解答過程における状態遷移のモデル化を提案するものである。

3. 潜在特性学習者モデル

3.1. マルコフ過程モデル

上述の学習者モデルにおける学習者の解答過程における状態集合を $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ とすると、学習者の解答過程は、状態集合 S の時系列 $\{x_n\}$, $(n=1, \dots, l)$ として表記される。ここで、 $\{x_n\}$, $(n=1, \dots, l)$ は、時点 n で、状態が s_j のとき、 $x_n = j$ となる確率変数例を示し、 m は状態数を示している。

ある学習者のある項目に対する解答過程においては $t \in [0, l-n]$ を満たす任意の t について、

$$P\{x_n = j \mid x_t = j_t, \dots, x_{n-1} = j_{n-1}\} \\ = P\{x_{t+n} = j \mid x_{t+1} = j_1, \dots, x_{t+n-1} = j_{n-1}\} \quad (1)$$

ここで、 $j_1, \dots, j_{n-1} = j_1, \dots, j_{r-1}$

が成り立つことを仮定する。すなわち、学習者の項目に対する解答過程を、 r 重マルコフ過程の見本過程とみなし、学習者の解答過程が、 r 過程以前の解答過程に依存しないと仮定するものである。例えば、MLTM では、各過程が独立であるとみなされる。このとき、解答過程において適用する知識の順序が異なった場合、その順序を識別することはできない。それに対して、本モデルでは、適用順序が異なった場合でも、それを表現することができる。これは、MLTM が正答に至るプロセスのみを表現しようとしていたのに対して、本モデルでは、誤答に至るプロセスをも表現することを目指すとし、学習者が知識の適用順序（解答方略と解釈される）を誤ったために誤答するような場合をも表現可能にしたものである。

r の持つ意味については、以下のように解釈できる。マルコフ多重度 r の値が高いほど先行する解答過程

に影響され、項目が要求する解答過程が比較的複雑な過程であると解釈される。また、 r 値が低いほど、先行する解答過程に影響されない、いわば比較的単純な過程であると解釈される。

3.2. 潜在特性モデル

先節で述べた r 重マルコフモデルにおける条件つき確率 $P\{x_n = j \mid x_{n-r+1} = j_{n-r+1}, \dots, x_{n-1} = j_{n-1}\}$ について、さらに式 (2) のモデルを仮定する。

$$P\{x_n = j \mid x_{n-r+1} = j_{n-r+1}, \dots, x_{n-1} = j_{n-1}, \theta_i\} \\ = \frac{\exp(a_{jn-r+1, \dots, j_{n-1}, j}^t \theta_i + b_{jn-r+1, \dots, j_{n-1}, j})}{\sum_j \exp(a_{jn-r+1, \dots, j_{n-1}, j}^t \theta_i + b_{jn-r+1, \dots, j_{n-1}, j})} \quad (2)$$

ここで、

$$a_{jn-r+1, \dots, j_{n-1}, j}^t = (a_{jn-r+1, \dots, j_{n-1}, j, 1}, \dots, a_{jn-r+1, \dots, j_{n-1}, j, q}) \\ \theta_i^t = (\theta_{i,1}, \dots, \theta_{i,h}, \dots, \theta_{i,q})$$

すなわち、式(2)は、特性 θ_i を持つ学習者の解答過程において、先行する解答過程 $[j_{n-r+1}, \dots, j_{n-1}]$ を所与としたとき、学習者が状態 j をとる条件つき確率が、多重ロジット関数で表されると仮定する。 $M_{jn-r+1}, \dots, j_{n-1}$ を所与としたときのノード j_{n-1} より張られたリンクの総数を示している。

θ_i は、 q 次元の学習者特性パラメータ・ベクトルであり、学習者の解答過程、解答方略の特性を示すパラメータである。

$a_{jn-r+1, \dots, j_{n-1}, j, h}$ は、解答系列 $\{x_{n-r+1}, \dots, x_{n-1}, x_n = j\}$ の特性を示すパラメータである。 $a_{jn-r+1, \dots, j_{n-1}, j, h}$ が高い値を取る解答系列 $[j_{n-r+1}, \dots, j_{n-1}, j]$ では、学習者パラメータ θ_{ih} が大きいほど解答系列 $[j_{n-r+1}, \dots, j_{n-1}, j]$ をとる条件付き確率が高いことを示している。すなわち、解答系列 $[j_{n-r+1}, \dots, j_{n-1}, j]$ の潜在特性 θ_{ih} に依る寄与の大きさを示しており、 $a_{jn-r+1, \dots, j_{n-1}, j, h}$ の値と解答系列 $[j_{n-r+1}, \dots, j_{n-1}, j]$ を相互に比較することにより、 θ_{ih} の解釈を行なうことができる。

4. パラメータ推定法

パラメータ推定の流れは、以下のとおりである。

1. マルコフ多重度 r を求める。

2. r, q を所与として、パラメータ $a_{jn-r+1, \dots, j_{n-1}, j, h}$, $b_{jn-r+1, \dots, j_{n-1}, j, h}$, θ_{ih} を推定する。

ただし, 2. では, q 値を変化させ, AIC を最小とする q を求める.

以下, 具体的に示す.

4.1. マルコフ多重度の決定

学習者の解答確率過程

$P\{x_n=j \mid x_{n-r+1}=j_{n-r+1}, \dots, x_{n-1}=j_{n-1}\}$ の持つマルコフ性の多重度 r の値の計量を考える. マルコフ多重度 r はあらかじめ得られた遷移度数データを用いて, r 重遷移の同時エントロピーと $r+1$ 重のそれとの差により, 決定される (Nakahama, Yamamoto, Ishii, Fujii, & Aya, 1977). 詳細は, 文献に譲り, 以下簡単に述べる.

学習者 N 人の解答過程で, 連続 s 個の解答系列 $J^{(s)} = [j_1, \dots, j_s]$ の同時確率 $P_{j_1 \dots j_s}$ が与えられているとき, その不確定度は,

$$H(J^{(s)}) = - \sum_{j_1=1}^m \dots \sum_{j_s=1}^m P_{j_1 \dots j_s} \ln P_{j_1 \dots j_s} \quad (3)$$

である. s 次の条件付情報量 H_s は

$$H_s = H(J^{(s)}) - H(J^{(s-1)}), s=1, 2, \dots \quad (4)$$

で与えられる. ただし, $H_0 = \ln m$ と定める.

今, 第 n 番目の解答過程における学習者の状態 x_n が, 先行する $s-1$ 個の解答過程には依存するが, それ以前の解答過程に対して独立であれば, 条件付き情報量 $H_s, s=1, 2, \dots$ には,

$$H_0 > H_1 > \dots > H_{s-1} > H_s = H_{s+1} = \dots \quad (5)$$

が成り立つ.

したがって, 連続 s 個 ($s-1$ 重) の解答確率過程の相対度数 $P^*_{j_1 \dots j_s}$ を $J^{(s)}$ の同時確率にあてはめて,

$$H^*_s = H^*(J^{(s)}) - H^*(J^{(s-1)}), s=1, 2, \dots \quad (6)$$

を順次計算し, $H^*_s < \epsilon$ となる s の値より, マルコフ多重度 $r (=s-1)$ を求めることができる.

4.2. パラメータ $a_{j_{n-r+1}, \dots, j_{n-1}, j, h}$, $b_{j_{n-r+1}, \dots, j_{n-1}, j, h}$, θ_{ih} の推定

記号を単純にするため, 以後, 添え字 $j_{n-r+1}, \dots, j_{n-1}, j$ を z とし, その取り得る数を Z とする.

学習者の解答過程におけるデータを $X = \{X_{piz}\}$, ($p=1, \dots, M, i=1, \dots, Z$) と表記することにする. ここで, X_{piz} は, 項目 p に対する学習者 i の解答過程に含まれる系列 z の総数を示している. また, M は項目数,

N は学習者数を示す.

これらのデータを所与としたときのモデル (2) の対数尤度 L は以下のとおりである.

$$L = \sum_p^M \sum_i^N \sum_z^Z X_{piz} \log P_{pz}(\theta_i) \quad (7)$$

求めるパラメータ推定値は, 以下の方程式を解くことによって求められる.

$$\frac{\partial L}{\partial a_{zh}} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial b_z} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_{ih}} = 0 \quad (10)$$

ここで, 数値計算に必要な一階微分, ヘシアン行列は解析的に求め, 付録に記した. また, θ_{ih} の推定値を平均 0, 分散 1 となるように基準化し, さらに非現実的な推定値を得ないように, 次のような条件を加えた.

$$Ub_J < Q_J < Ua_J \quad (11)$$

ここで, Ua, Ub はパラメータ $Q = \{\theta, a_z, b_z\}$ の上限値ベクトル, 下限値ベクトルを, 添え字 J は J 番目の要素を示しており, 各要素において不等号が成り立つことを示している.

4.3. q の決定

学習者の解答過程特性の計量値 θ_i の次元 q の決定法について述べる. ここでは, 以下のように AIC を用いて評価する. すなわち,

$$AIC(q) = -2L + 2(Nq + MZq + MZ) \quad (12)$$

を $q=1, 2, \dots$ について順次計算し, $AIC(q) < AIC(q+1)$ となる q を決定値とする.

5. 適用例

本論文で提案したモデルは, 複数の項目 ($M > 1$) について適用可能であるが, ここでは単一項目 ($M=1$) についての適用例を示す.

5.1. データ

本モデルが対象とする学習者の解答過程におけるデータの収集は, 以下の手法が考えられる.

1. 直接学習者が解答過程を記述する方法.
2. 学習者の解答結果より帰納的に解答過程を推論

する方法.

1. ではプロトコル調査や簡単なものでは記述式項目が挙げられ, 2. では ICAI やバグシミュレータを利用した推論を用いて学習者の解答過程データを得ることができる.

今回, 1. の手法を用いて, 大学生 110 名に先に示した項目 (図 1 参照) を解かせた. 以下, データ解析の結果について述べる.

5.2. q 及びマルコフ多重度 r の推定

項目のマルコフ多重度 r は, 4.1 の手法を用いて, 図 2 のように求められた. 図 2 は, 横軸にモデルの解答系列の長さ s を, 縦軸に項目の $H^*(s)$ を示したものである. $s=3$ で $H(J(s))$ 値が $s=2$ の場合よりも値が, 大きくなっているのはデータ数の少なさによるものであると思われる. $\varepsilon=0.1$ とし, 4.1. の手法を用いた結果,

図 2. s 重過程における条件付き情報量

図 3. q に対する AIC 値

$r=2$ が得られた. すなわち, この項目では, 解答過程においておよそ 2 過程以前からの思考にのみ依存していることがわかる. 比較的, 項目を解答するためにパスしなければならないノード数が長い項目 (およそ 6 個) であることから, 単純思考の繰り返しの多い項目であると解釈できる.

図 3 に, 横軸に q の値, 縦軸にそのとき推定された AIC の値を示した. 図より, AIC 値が $q=2$ で最小となっていることがわかる. すなわち, この項目では, 大局的に 2 つの解答方略特性が存在することがわかる.

5.3. a_{zh} 推定値による θ_{ih} の解釈

表 1 にパラメータ a_{zh} ($h=1, 2$) の推定値を示した. ただし, これらを求めるための数値最適化の条件は, 各方程式 (8), (9), (10) を解くための数値計算において, グラディエントが 10^{-3} 以下とし, これらを繰り返した場合の各パラメータ推定値の変化の絶対値が 10^{-1} 以下となるようにした. これらの精度は, 決して高いとは言えないが, データ数を増すことによって, より高い精度で安定したパラメータを推定できると思わ

表 1. 推定パラメータ

解答系列	a_{z1}	a_{z2}
0 → 1 → 4	-1.00816	3.72526
0 → 1 → 14	-0.893446	3.59374
0 → 2 → 4	3.89006	-2.68
0 → 2 → 9	2.95566	-2.18
1 → 4 → 5	-1.83891	4.51409
1 → 4 → 11	-1.92269	4.72461
2 → 4 → 5	1.03282	1.19916
2 → 4 → 6	1.36181	1.17663
2 → 4 → 11	0.905565	1.67028
3 → 4 → 5	0.067863	-3.3785
3 → 4 → 6	0.87482	-4.867
3 → 4 → 11	0.456931	-4.867
4 → 5 → 6	-0.0507726	4.24511
4 → 5 → 11	-0.0084251	4.17725
4 → 6 → 8	0.4681	-4.276
4 → 6 → 15	4.9862	-3.646
5 → 6 → 7	-0.00781083	0.56153
5 → 6 → 10	-0.268072	0.727444
5 → 6 → 13	-0.338092	0.454194
6 → 15 → 7	3.32603	3.290999
6 → 15 → 13	3.52942	3.103692

れる。

表より, a_{z1} の高い解答系列として, $0 \rightarrow 2 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 6 \rightarrow 15, 6 \rightarrow 15 \rightarrow 7, 6 \rightarrow 15 \rightarrow 13$ が挙げられる。これらの解答系列に共通している特性として, ノード 2, 6 (組み合わせの公式を用いて場合の計算を求める) に代表されるような組み合わせ公式を用いた解答方略が挙げられる。これより, θ_{i1} は, 公式を用いる解答方略特性を示していると解釈できる。

また, a_{z2} の高い解答系列として, $0 \rightarrow 1 \rightarrow 4, 0 \rightarrow 1 \rightarrow 14, 1 \rightarrow 4 \rightarrow 5, 1 \rightarrow 4 \rightarrow 11, 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6, 4 \rightarrow 5 \rightarrow 11, 6 \rightarrow 15 \rightarrow 7, 6 \rightarrow 15 \rightarrow 13$ が挙げられる。これらの解答系列に共通している特性として, ノード 1, 6 に代表されるような数え上げを用いた解答方略が挙げられる。これより, θ_{i2} は, 数え上げを用いる解答方略特性を示していると解釈できる。

5.4. 解答過程特性曲線による考察

本モデルは, 通常の項目応答モデル同様, そのモデル関数の曲線形状よりデータの特性を解析することができる。項目応答モデルにおける関数曲線は通常, 項目特性曲線と呼ばれるが, 本モデルでは区別して, 解答過程特性曲線と呼ぶことにする。

図 4 は, ノード 4 (解答過程途中において正答しなければならないノード) に至る確率を計算し, その特性曲線を示したものである。図より, θ_{i1} が高い学習者群では, θ_{i2} に無関係にノード 4 に至る確率が高いが, θ_{i1} が低い学習者群では, θ_{i2} が高いほどノード 4 に至る確率が高くなっていることが分かる。すなわち, 公式を用いることのできる学習者は, 当然ノード 4 に至る

図 5. ノード 13 にいたる解答過程特性曲線

確率が高く, 公式を知らない学習者でも, 数え上げをすれば, ノード 4 に至る確率が高くなることを示している。

図 5 は, ノード 13 (それ以前までの解答過程は正しいが, 最後に計算間違い又は数え間違いなどによるケアレスミスをしたノード) に至る特性曲線を示している。図より θ_{i1} が高いほど, その遷移確率が高くなり, θ_{i2} が高い程, その遷移確率が低くなっていることが分かる。このことは, この問題では数え上げより, 公式を用いるほうが, ケアレスミスが少ないことを示している。

図 6 は, 正答ノード 7 に至る特性曲線を示している。図より, θ_{i1} が高い場合, その遷移確率が高くなり, θ_{i1} が低い場合は, θ_{i2} がどのような値であろうが低く

図 4. ノード 4 にいたる解答過程特性曲線

図 6. 正答ノード 7 にいたる解答過程特性曲線

なっている。特に θ_{i1} が高い学習者でも、 θ_{i2} が極端に高くても低くても、その遷移確率が低くなっていることが分かる。このことより、この問題に正答するためには、場合によっては公式を用い、場合によっては数え上げを用いることが要求されることを示している。

以上示したように、本手法を用いることによって、従来のデータ解析手法ではわからないような情報をもたらすことができる。

6. 学習者評価

本章では、パラメータによる学習者の評価法について述べる。図7は、横軸に θ_{i1} 、縦軸に θ_{i2} を取り、それぞれの平均値をしきい値としたものである。図7中の第一象限、第二象限、第三象限、第四象限について、以下のように解釈できる。第一象限に付置される学習者群は、 θ_{i1} 、 θ_{i2} 共に大きい学習者で、解答方略として、公式と数え上げを場合によって使い分ける解答方略(混合型)を持つと解釈できる。

例えば、学習者1の解答過程は、 $0 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 15 \rightarrow 7$ であり、公式を使うノード2と数え上げを用いるノード15が含まれている。

第二象限が付置されている学習者群は、 θ_{i1} が小さく、 θ_{i2} が大きい学習者で、公式を知らないため、数え上げのみによる解答方略(数え上げ型)を持つ学習者群であると解釈できる。例えば、学習者2の解答過程は、 $0 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 8$ であり、公式を一切用いず、数え上げのみによって解答に至っている。

第三象限に付置される学習者群は、 θ_{i1} 、 θ_{i2} 共に小さい学習者で、白紙や途中で行き詰まるタイプ(ドロップアウト型)

プアウト型)が多い。例えば、学習者3の解答過程は、 $0 \rightarrow 12$ 、すなわち白紙答案である。

第四象限に付置される学習者群は、 θ_{i1} が大きい、 θ_{i2} が小さい学習者で、公式のみを用いる解答方略(公式利用型)を持つと解釈できる。

例えば、学習者4の解答過程は、 $0 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8$ であり、公式に固執したため、いきづまりノード8に至ったと解釈できる。

以上、示したように、学習者特性 θ_i を付置することによって、比較的容易に学習者の特性を知ることができる。

7. むすび

本論文では、学習者の解答過程、解答方略の評価を主目的とした項目応答モデルを提案した。また、実データにあてはめることによって、本モデルが学習者の解答方略を反映したモデル・パラメータを推定できることを示した。

今回、パラメータ推定法には同時最尤法を用いているが、この手法は、尤度を最大化する保証がないことなど、問題点が多い(Little & Rubin 1983)。今後、推定法について、周辺対数最尤法やベイズ推定などを用いた推定法の比較、及び、漸近分散の評価を今後の課題としたい。また、今回、適用例で用いた学習者モデルは、知識状態よりも、表層的な解答過程に着目して構成した簡易なものであり、ICAIなどで通常用いられる学習者モデル(部分知識モデルなど)についての本モデルの適用をも課題とする。

謝 辞

本論文をまとめるにあたり、レフェリーの方から貴重なコメントをいただきました。ここに感謝いたします。

参 考 文 献

- Baker F.B. (1992) *Item Response Theory*. Marcel Dekker, Inc.
- Embretson, S.E. (1985). *Multicomponent Latent Trait Models*. In S.E. Embretson (Ed.), *Test Design: Developments in Psychology and Psychometrics*. Orland, FL: Academic Press.
- Hambleton RK., Swaminathan H. & Rogers H.J.

図7. θ_{i1} - θ_{i2} 平面

- (1991) *Fundamentals of Item Response Theory*. Sage Publications.
- Little, R.J.A. & Rubin, D.B. (1983) On jointly estimating parameters and missing data by maximizing the complete-data likelihood. *The American Statistician*, 37, 281-220
- Mislevy, R.J. (1987) *Exploiting auxiliary information about examinees in the estimation of item parameters*, *Applied Psychological Measurement*, 11, No. 1, 81-91.
- Mislevy, R.J. (1988) *Exploiting auxiliary information about items in the estimation of Rasch item difficulty parameters*, *Applied Psychological Measurement*, 12, No. 3, 281-296.
- Mislevy, R.J. (1988) The role of collateral information about examinees in item parameter estimation, *ETS Research*.
- Mislevy, R.J. (1988) *Final report exploiting collateral information in the estimation of item parameters*, *ETS Research*.
- Mislevy, R.J. (1988) *Modeling item response when different subjects employ different solution strategies*, *ETS Report*.
- Nakahama, H., Yamamoto, M., Ishii, N., Fujii, H. & Aya, K. (1977) *Dependency as a measure to estimate the order and values of markov processes*, *Biological Cybernetics*, 25, 209-226.
- Polson, M.C. & Michardson, J.J. (1988) *Foundations of Intelligent Tutoring System*, Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- 繁樹算男, 脇本あゆみ (1990) 自信度を補助情報とした項目反応モデルの提案, 日本教育工学会第6回大会講演論集
- 繁樹算男, 植野真臣 (1992) 認知的IRTモデルの提案と実データへの適用, 日本行動計量学会第20回大会発表論文抄録集
- 植野真臣, 永岡慶三 (1990) 自信×正誤反応における項目応答理論, 電子情報通信学会研究技術報告集
- 植野真臣, 吉村幸, 繁樹算男 (1992) 単語読みプロセスにおける潜在特性モデル, 日本行動計量学会第20回大会発表論文抄録集

付 録

1 階微分とヘシアン行列ただし $q=2$ の場合

$$P_{pz}(\theta_i) = \frac{\exp(a_{1pz}\theta_{1i} + a_{2pz}\theta_{2i} + b_{pz})}{\sum_z \exp(a_{1pz}\theta_{1i} + a_{2pz}\theta_{2i} + b_{pz})}$$

$$L = \sum_p \sum_i \sum_z x_{piz} \log P_{pz}(\theta_i)$$

とすると

$$\frac{\partial L}{\partial a_{1pz}} = \sum_i x_{piz} \theta_{1i} (1 - P_{pz}(\theta_i))$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_{2pz}} = \sum_i x_{piz} \theta_{2i} (1 - P_{pz}(\theta_i))$$

$$\frac{\partial L}{\partial b_{pz}} = \sum_i x_{piz} (1 - P_{pz}(\theta_i))$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial a_{1pz}^2} = \sum_i -x_{piz} \theta_{1i}^2 (P_{pz}(\theta_i) - P_{pz}(\theta_i)^2)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial a_{2pz}^2} = \sum_i -x_{piz} \theta_{2i}^2 (P_{pz}(\theta_i) - P_{pz}(\theta_i)^2)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial b_{pz}^2} = \sum_i -x_{piz} (P_{pz}(\theta_i) - P_{pz}(\theta_i)^2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_{1i}} = \sum_p \sum_z x_{piz} \left\{ a_{1pz} - \frac{\sum_z a_{1pz} \exp(a_{1pz}\theta_{1i} + a_{2pz}\theta_{2i} + b_{pz})}{\sum_z \exp(a_{1pz}\theta_{1i} + a_{2pz}\theta_{2i} + b_{pz})} \right\}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_{2i}} = \sum_p \sum_z x_{piz} \left\{ a_{2pz} - \frac{\sum_z a_{2pz} \exp(a_{1pz}\theta_{1i} + a_{2pz}\theta_{2i} + b_{pz})}{\sum_z \exp(a_{1pz}\theta_{1i} + a_{2pz}\theta_{2i} + b_{pz})} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_{1i}^2} = \sum_p \sum_z -x_{piz} \left\{ \frac{\sum_z a_{1pz}^2 \exp(a_{1pz}\theta_{1i} + a_{2pz}\theta_{2i} + b_{pz})}{\sum_z \exp(a_{1pz}\theta_{1i} + a_{2pz}\theta_{2i} + b_{pz})} - \frac{(\sum_z a_{1pz} \exp(a_{1pz}\theta_{1i} + a_{2pz}\theta_{2i} + b_{pz}))^2}{(\sum_z \exp(a_{1pz}\theta_{1i} + a_{2pz}\theta_{2i} + b_{pz}))^2} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_{2i}^2} = \sum_p \sum_z -x_{piz} \left\{ \frac{\sum_z a_{2pz}^2 \exp(a_{1pz}\theta_{1i} + a_{2pz}\theta_{2i} + b_{pz})}{\sum_z \exp(a_{1pz}\theta_{1i} + a_{2pz}\theta_{2i} + b_{pz})} - \frac{(\sum_z a_{2pz} \exp(a_{1pz}\theta_{1i} + a_{2pz}\theta_{2i} + b_{pz}))^2}{(\sum_z \exp(a_{1pz}\theta_{1i} + a_{2pz}\theta_{2i} + b_{pz}))^2} \right\}$$

—1993年2月1日受付,

1993年6月4日最終修正—