生徒の個性の方向と一般化固有値分解

椿 美智子

Characterization of students through generalized spectral decomposition

Michiko TSUBAKI

Now we often discuss the importance of the education which values characteristics of students. However it is very difficult to develop the method by which students can be given the education that values their characteristics.

In this paper, I propose a statistical method which is useful to find the vector representing characteristic of each student. I model each student's standardized observation vector by his/her student mean vector and his/her time-dependent characteristic vector. Then I propose that we grasp each student's mean vector standardized by the inverse matrix of its covariance matrix Σ as his/her first characteristic vector. Furthermore I propose that we grasp first eigen vector leaded through generalized spectral decomposition of each student's intra covariance matrix Ω_i against Σ as his/her second characteristic vector during the period. And I show vectors representing characteristics of typical students.

1. はじめに

個性を生かした教育が大切であることが議論される機会が増加している。しかし、各個人が個性を生かし、しかも社会全体がバランス良く成り立っており、さらに進歩していくことはそれほど簡単なことでも、単純なことでもない。ましてや、社会にでる以前に行われる教育の中で、各生徒個人個人の個性を生かした教育指導を受けられる方法を開発することは非常に難しいことである。本論文では、各生徒の個性の方向を探索するために有効となるであろう統計的方法を提案する。

ここでは、たとえば、小学校、中学校、あるいは高等学校で各教科のテストの成績が得られているとき、その成績をもとに各生徒の個性の方向を探索するという状況を考える。各教科のテストの成績は、多変量(国

語、数学、理科、社会、英語等)の時系列データとなっている。

たとえば、表1は中学校のあるクラスの生徒40人の国語と英語のテストの各8回の成績のデータであるとしよう。ただし、1回毎の国語と英語のテストは同時点で行われたとする。

2. 計量行列と個性の方向と一般化固有値分解

i 番目の生徒の t 時点における m 教科の成績得点を、集団における平均が0、分散が1になるように標準化した m 変量観測値ベクトルを y_{it} とする。以後、このベクトルを標準化 m 変量観測値ベクトルと呼ぶ。時点を追うごとに各教科に対する集団全体の能力は当然伸びているであろうが、各時点の成績に対して標準化を行うことにより、常に集団の平均値ベクトルを0として議論することができる。

ここで、 y_{it} の構造を考える。これは教科毎の得点を標準化した変量であるため、各生徒の個性の特徴が短期間でそれ程大きく変化することは起こりにくいので、各生徒の標準化 m 変量ベクトルの取り得る値は個

連絡先氏名 椿 美智子

郵便連絡先 〒182-8585 調布市調布ヶ丘1-5-1

TEL 0424(83)2161

電気通信大学電子情報学科 (Department
of Communication and Systems, The
University of Electro-Communications)

人内ではそれ程大きくばらつく量とはならないと予測される。ここで、 z_i を i 番目の生徒の平均的な位置を表すベクトル、 ε_{it} を i 番目の生徒の t 時点における成績を表すベクトルとすると、

$$y_{it} = z_i + \varepsilon_{it} \quad (2.1)$$

と表すことができるであろう。

さらに、 i 番目の生徒の y_{it} の分散構造を考える。 z_i の (集団における) 分散共分散行列を Σ 、 ε_{it} の (個人内) 分散共分散行列を Ω_i とする。ここで、2 教科毎の成績の相関は、その教科の特性に依存してある程度決まるものであり、当然各時点の試験毎でばらつきはあるであろうが、 z_i の分散共分散行列 Σ から求められる相関はその期間の m 教科の相関関係を代表しているものとする。

このとき、まず、第 1 に生徒の個性を表す方向を、 z_i それ自身ではなく、 Σ の逆行列をこの m 教科 m 次元ベクトル空間における計量行列とし、

$$p_i = \Sigma^{-\frac{1}{2}} z_i \quad (2.2)$$

で捉えることを提案する。それによって、集団における分散共分散構造の特徴を考慮した上での各生徒の個性の方向を捉えることができる。各生徒の個性は集団の多変量分布のどこに位置しているかが重要となる。計量行列については、高根 (1995)、伊理・韓 (1977) を参照。 $\Sigma = bI$ の場合には、ベクトル z_i の方向が生徒の個性を表す方向となる。 $\Sigma \neq bI$ の場合には、集団の傾向に応じて、集団内での方向が決まってくる。

さらに、この期間の個性の伸びの方向を求めるために、次のような m 教科の成績の重み付き和を考える。

$$c_i = v_i^T y_{it} = v_i^T z_i + v_i^T \varepsilon_{it} \quad (2.3)$$

このとき

$$Q = \frac{\text{Var}(v_i^T \varepsilon_{it})}{\text{Var}(v_i^T z_i)} = \frac{v_i^T \Omega_i v_i}{v_i^T \Sigma v_i} \quad (2.4)$$

が最大になるようなベクトル v_i は、この期間の集団内における個性の伸びの方向を表していると解釈できるであろう。そこで、第 2 にこの方向をこの期間の個性の伸びの方向として捉えることを提案する。ベクトル v_i は Ω_i を Σ に対して一般化固有値分解したときの第 1 固有ベクトルとして得られる。一般化固有値分解に関しては、ラオ (1977)、高根 (1995) を参照。

ここで、提案した方法は、個人 $\times$ 変数 $\times$ 時点という 3 重配列データ構造を解析する手法となっている。従

来この種のデータ構造を解析する手段として開発されてきた統計的方法として 3 相因子モデルや PARAFAC モデルに基づく解析法等があるが、これらの方法よりも有用である点、これらの方法ではわからないが提案した方法ならわかるという点について説明する。

まず、Tucker (1966) によって提案された 3 相因子モデルを示すと、 x_{ijk} ($i=1, \dots, n$; $j=1, \dots, m$; $k=1, \dots, t$) が 3 重配列データであるとき、

$$x_{ijk} = \sum_{a=1}^r \sum_{b=1}^r \sum_{c=1}^r g_{ia} h_{jb} f_{kc} l_{abc} + \varepsilon_{ijk} \quad (2.5)$$

で表される。ただし、 $r \leq \min(n, m, t)$ であり、 g_{ia} , h_{jb} , f_{kc} , l_{abc} は未知母数である。

このモデルに基づく解析では、各データが、全データから抽出された、各個人に関する母数 g_{ia} (r 個)、各教科に関する母数 h_{jb} (r 個)、各時点に関する母数 f_{kc} (r 個) の推定値の各組み合わせの積の重み付き和で表される。従って、各教科に関する母数の推定値に各個人に関する母数の推定値を掛け合わせれば、集団の傾向に対する各個人の得意、不得意はある程度わかるが、その母数の持つ意味は明確ではない。また、各教科の母数の推定値に各時点の母数の推定値を掛け合わせれば、集団に対する各教科の各時点における傾向もある程度わかるが、個人毎のこの期間の時点を追った傾向は捉え難い。提案した方法によれば、各個人毎の個人内分散共分散行列を用いているため、この期間における各個人の伸びの方向もわかる。

次に、Harshman (1970) によって提案された PARAFAC モデルを示す。

$$x_{ijk} = \sum_{h=1}^r u_{ih} v_{jh} w_{kh} + \varepsilon_{ijk} \quad (2.6)$$

ただし、 u_{ih} , v_{jh} , w_{kh} は未知母数である。

このモデルに基づく解析では、各データが、全データから 3 相因子モデルとは異なる方法で抽出された、各個人に関する母数 u_{ih} 、各教科に関する母数 v_{jh} 、各時点に関する母数 w_{kh} の推定値の添え字 h に対する積の r 個の和で表される。3 相因子モデルと同様の解釈ができるが、このモデルの場合には、同一添え字 h に対する r 個の積のみの和で表されることが特徴である。

また、教育データを解析する方法としてよく用いられる共分散構造分析では、潜在因子の存在を仮定するが、提案した方法では、そのような因子は仮定せず、

表 1. データ

(1) 素点

学 生 号	国 語								英 語							
	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
1	72	77	80	76	67	72	62	82	63	68	51	59	67	76	74	79
2	65	70	76	69	55	64	51	77	58	63	46	53	63	73	66	73
3	58	68	74	62	52	62	45	72	44	52	26	34	52	68	57	64
4	71	76	81	76	69	70	60	82	59	63	49	54	64	73	67	76
5	71	76	80	77	66	71	60	83	50	57	37	44	58	70	61	72
6	77	78	83	81	73	77	67	85	72	73	64	69	75	82	80	81
7	73	79	80	79	68	72	63	83	64	69	52	60	68	76	72	78
8	68	73	78	74	63	68	58	78	61	65	49	58	66	76	73	75
9	77	80	85	82	74	77	71	84	66	71	60	63	72	78	76	79
10	68	74	78	72	61	67	59	78	49	57	36	43	56	69	63	68
11	69	73	80	74	62	66	58	80	67	69	61	63	67	77	76	78
12	72	75	82	76	70	72	65	80	67	70	65	64	73	79	76	78
13	75	79	82	82	73	75	65	82	59	64	48	58	64	74	68	71
14	73	77	82	77	68	72	62	82	70	73	63	65	73	79	79	82
15	76	81	83	80	73	75	68	83	67	72	59	61	71	79	76	80
16	60	68	74	67	51	60	50	72	50	56	39	47	54	67	62	66
17	69	74	80	74	65	69	58	78	56	61	47	51	62	72	67	71
18	75	79	82	80	71	75	67	84	60	66	50	52	64	75	69	77
19	69	73	80	74	66	70	59	80	72	75	66	69	74	83	79	83
20	50	59	69	55	41	54	37	66	44	50	30	36	52	67	57	64
21	80	83	85	85	79	80	73	85	71	75	66	68	75	82	78	82
22	66	71	78	73	59	67	56	78	52	57	41	47	59	72	63	69
23	63	68	75	69	56	64	52	75	56	62	42	52	63	72	66	73
24	64	70	76	69	59	63	52	76	49	53	33	40	55	67	61	66
25	70	75	80	76	63	70	63	80	61	68	53	56	66	75	72	78
26	70	76	79	74	66	70	59	78	59	64	49	51	63	74	68	73
27	81	84	88	87	78	79	73	86	70	74	68	70	73	80	78	82
28	70	74	81	74	65	69	63	81	48	54	35	41	57	68	63	68
29	96	95	95	98	98	92	93	98	67	72	60	60	73	80	77	80
30	90	89	92	92	90	86	86	92	84	86	81	82	85	87	90	90
31	76	78	83	81	73	75	68	85	92	92	92	90	90	91	95	97
32	63	71	76	71	56	65	49	74	92	92	92	90	90	91	95	96
33	50	61	68	55	40	52	36	67	84	85	83	83	83	89	86	90
34	43	55	64	50	31	49	26	62	67	71	58	64	71	76	76	78
35	43	54	64	50	31	48	26	61	51	56	40	43	57	70	62	67
36	50	58	68	58	41	52	32	67	34	42	18	26	46	60	48	57
37	63	70	75	70	57	65	52	75	26	35	4	18	38	57	42	52
38	76	81	83	79	72	74	69	84	26	35	5	17	38	57	42	52
39	83	84	87	86	83	80	73	87	42	50	27	35	48	66	55	64
40	96	94	95	99	97	91	92	98	51	59	36	45	58	71	63	70

(2) 基準化データ

学 生 番 号	1	2	3	4 国 語	5	6	7	8
1	0.207	0.276	0.067	0.129	0.163	0.252	0.170	0.311
2	-0.379	-0.496	-0.504	-0.504	-0.636	-0.548	-0.564	-0.311
3	-0.965	-0.717	-0.790	-1.138	-0.835	-0.748	-0.964	-0.934
4	0.123	0.165	0.210	0.129	0.296	0.052	0.036	0.311
5	0.123	0.165	0.067	0.219	0.096	0.152	0.036	0.436
6	0.626	0.386	0.497	0.581	0.562	0.753	0.504	0.685
7	0.291	0.496	0.067	0.400	0.229	0.252	0.237	0.436
8	-0.127	-0.165	-0.218	-0.052	-0.103	-0.147	-0.096	-0.186
9	0.626	0.607	0.783	0.672	0.629	0.753	0.771	0.560
10	-0.127	-0.055	-0.218	-0.233	-0.236	-0.247	-0.030	-0.186
11	-0.043	-0.165	0.067	-0.052	-0.169	-0.348	-0.096	0.062
12	0.207	0.055	0.354	0.129	0.362	0.252	0.370	0.062
13	0.458	0.496	0.354	0.672	0.562	0.553	0.370	0.311
14	0.291	0.276	0.354	0.219	0.229	0.252	0.170	0.311
15	0.542	0.717	0.497	0.491	0.562	0.553	0.570	0.436
16	-0.798	-0.717	-0.790	-0.685	-0.902	-0.949	-0.630	-0.934
17	-0.043	-0.055	0.067	-0.052	0.029	-0.047	-0.096	-0.186
18	0.458	0.496	0.354	0.491	0.429	0.553	0.504	0.560
19	-0.043	-0.165	0.067	-0.052	0.096	0.525	-0.030	0.062
20	-0.163	-0.171	-1.505	-1.772	-1.568	-1.550	-1.498	-1.682
21	0.877	0.938	0.783	0.944	0.962	1.054	0.904	0.685
22	-0.295	-0.386	-0.218	-0.142	-0.369	-0.247	-0.230	-0.186
23	-0.546	-0.717	-0.647	-0.504	-0.569	-0.548	-0.497	-0.560
24	-0.462	-0.496	-0.504	-0.504	-0.369	-0.648	-0.497	-0.436
25	0.039	0.055	0.067	0.129	-0.103	0.052	0.237	0.062
26	0.039	0.165	-0.075	-0.052	0.096	0.052	-0.030	-0.186
27	0.961	1.049	1.212	1.125	0.895	0.954	0.904	0.809
28	0.039	-0.055	0.210	-0.052	0.029	-0.047	0.237	0.186
29	2.218	2.263	2.213	2.121	2.227	2.256	2.240	2.305
30	1.715	1.601	1.784	1.577	1.695	1.655	1.772	1.557
31	0.542	0.386	0.497	0.581	0.562	0.553	0.570	0.685
32	-0.546	-0.386	-0.504	-0.323	-0.569	-0.448	-0.697	-0.685
33	-1.636	-1.490	-1.648	-1.772	-1.635	-1.750	-1.565	-1.557
34	-2.222	-2.153	-2.220	-2.225	-2.234	-2.051	-2.233	-2.180
35	-2.222	-2.263	-2.220	-2.225	-2.234	-2.151	-2.233	-2.305
36	-1.636	-1.822	-1.648	-1.500	-1.568	-1.750	-1.832	-1.557
37	-0.546	-0.496	-0.647	-0.414	-0.502	-0.448	-0.497	-0.560
38	0.542	0.717	0.497	0.400	0.496	0.453	0.637	0.560
39	1.129	1.049	1.069	1.034	1.228	1.054	0.904	0.934
40	2.218	2.153	2.213	2.211	2.161	2.156	2.173	2.305

学 生 番 号	1	2	3	4 英 語	5	6	7	8
1	0.233	0.277	0.073	0.263	0.200	0.193	0.376	0.451
2	-0.099	-0.107	-0.176	-0.089	-0.130	-0.181	-0.285	-0.147
3	-1.032	-0.954	-1.175	-1.210	-1.042	-0.805	-1.029	-1.044
4	-0.033	-0.107	-0.026	-0.030	-0.047	-0.181	-0.202	0.151
5	-0.633	-0.569	-0.625	-0.620	-0.544	-0.555	-0.698	-0.246
6	0.833	0.662	0.723	0.853	0.864	0.943	0.872	0.650
7	0.299	0.354	0.123	0.322	0.283	0.193	0.210	0.351
8	0.099	0.046	-0.026	0.204	0.118	0.193	0.293	0.052
9	0.433	0.508	0.523	0.499	0.615	0.443	0.541	0.451
10	-0.699	-0.569	-0.679	-0.679	-0.710	-0.680	-0.533	-0.645
11	0.499	0.354	0.573	0.499	0.200	0.318	0.541	0.351
12	0.499	0.431	0.773	0.558	0.698	0.568	0.541	0.351
13	-0.033	-0.030	-0.076	0.204	-0.047	-0.056	-0.119	-0.346
14	0.699	0.662	0.673	0.617	0.698	0.568	0.789	0.750
15	0.499	0.585	0.473	0.381	0.532	0.568	0.541	0.550
16	-0.633	-0.646	-0.525	-0.443	-0.876	-0.930	-0.615	-0.844
17	-0.233	-0.261	-0.126	-0.207	-0.213	-0.306	-0.202	-0.346
18	0.033	0.123	0.023	-0.148	-0.047	0.068	-0.037	0.251
19	0.833	0.816	0.823	0.853	0.781	1.067	0.789	0.849
20	-1.032	-1.108	-0.975	-1.092	-1.042	-0.930	-1.029	-1.044
21	0.766	0.816	0.823	0.794	0.864	0.943	0.706	0.750
22	-0.499	-0.569	-0.426	-0.443	-0.462	-0.306	-0.533	-0.545
23	-0.233	-0.184	-0.376	-0.148	-0.130	-0.306	-0.285	-0.147
24	-0.699	-0.877	-0.825	-0.856	-0.793	-0.930	-0.698	-0.844
25	0.099	0.277	0.173	0.086	0.118	0.068	0.210	0.351
26	-0.033	-0.030	-0.026	-0.207	0.130	-0.056	-0.119	-0.147
27	0.699	0.739	0.923	0.912	0.698	0.693	0.706	0.750
28	-0.766	-0.800	-0.725	-0.797	-0.627	-0.805	-0.533	-0.645
29	0.499	0.585	0.523	0.322	0.698	0.693	0.624	0.550
30	1.632	1.663	1.572	1.619	1.692	1.567	1.698	1.547
31	2.165	2.125	2.122	2.091	2.107	2.067	2.112	2.245
32	2.165	2.125	2.122	2.091	2.107	2.067	2.112	2.145
33	1.632	1.586	1.672	1.678	1.527	1.817	1.368	1.547
34	0.499	0.508	0.423	0.558	0.532	0.193	0.541	0.351
35	-0.566	-0.646	-0.475	-0.679	-0.627	-0.555	-0.615	-0.745
36	-1.699	-1.724	-1.575	-1.681	-1.539	-1.804	-1.773	-1.741
37	-2.232	-2.263	-2.274	-2.153	-2.202	-2.179	-2.269	-2.240
38	-2.232	-2.263	-2.224	-2.212	-2.202	-2.179	-2.269	-2.240
39	-1.699	-1.108	-1.125	-1.151	-1.373	-1.055	-1.194	-1.044
40	-0.566	-0.415	-0.675	-0.561	-0.544	-0.430	-0.533	-0.446

データからより直接的に各生徒の個性を捉える。また、共分散構造分析のように分散共分散行列の構造に対して仮説を設け、それに対する検証を行うということも本方法では行わない。それでは各生徒の個性の方向は抽出できない。これらの方法に関する詳細は、柳井(1994)を参照されたい。

3. Σ の違いによる個性の方向の違い

本章では、 Σ の違いによる個性の方向の違いを説明し易いように、 $m=2$ (例えば、表1に習って、国語と英語として説明を行う)の場合について、集団の中で特徴的な生徒の個性の方向を導出し検討を行う。一般に、 m 変量の場合にも同様な解釈ができる。特徴的な生徒の平均値 z_i の布置を図1に示す。通常、1つのクラスにこれほど飛び離れた生徒が大勢存在することはないであろうが、ここでは、様々な特徴を表す生徒に対して検討をするために極端に示している。品質管理統計等では、平均値とそのまわりのばらつきを代表値として捉え、そのばらつき具合が小さくなることが良いと考える。従って、異常値をなくすために統計的方法を活用することになる。しかし、教育問題の場合、非常に優れている等の異常値は個性と考えるべきであり、集団の特性が平均値のまわりに集中することが本質的によい状態であるわけでもない。さらに、平均値から同程度に離れていても、その方向によって特徴が全く異なっており、非常に多くの要素の多変量ベクトル空間の中でどこに位置しているかが大きな要素とな

図1 特徴的な生徒の布置

る。

(1) $z_i = (3, 3)^T$ に位置するとき

2教科の成績が正の相関関係にある場合、例えば $\Sigma = b \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{bmatrix}$ として、第1の個性の方向を求めると $p_i = b^{-\frac{1}{2}}(2.301, 2.301)^T$ となる。この生徒は国語も英語も得意な生徒である。ところで、 z_i が同じでも、 $\Sigma = bI$ の場合には $p_i = b^{-\frac{1}{2}}(3, 3)^T$ となることが表3より分かる。これと比べると、正の相関関係にある場合には、国語が得意な生徒は英語も得意である傾向が強いわけであるから、この生徒が国語も英語も得意であるという個性は、この集団の中では、 $\Sigma = bI$ の場合よりも少し弱いものとなる。逆に、2教科の成績が負の相関関係(例えば $\Sigma = b \begin{bmatrix} 1 & -0.7 \\ -0.7 & 1 \end{bmatrix}$)にある場合には表4より

$p_i = b^{-\frac{1}{2}}(5.477, 5.477)^T$ となり、この個性が集団の中で非常に強いものとなることが分かる。なぜならば、負の相関関係にある場合には一方の教科が得意な生徒はもう一方の教科は得意ではない傾向が強いからである。このように、 Σ の逆行列を計量行列として $p_i = \Sigma^{-\frac{1}{2}} z_i$ を用いることによって、集団としての分散共分散構造の特徴を考慮した上での各生徒の個性の方向を捉えることができる。

さらに、例えば $\Omega_i = a \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{bmatrix}$ として (2.4) 式の一

般化固有値問題を解いてみる。このとき重根 $\frac{a}{b}$ に対応する固有ベクトルは一意に定まらない。集団の中ではこの期間はこちらの教科に非常にウェイトをおいて伸びたということなく集団の傾向に従って伸びていたと考えられる。ここでは、この期間も国語も英語も伸びようとしていると仮定し $\Omega_i = a \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{bmatrix}$ としたが、実際にはそのときに伸びようとした成果が個人内データのばらつきとして現れ、そこから方向が検出されるのであるから、様々な結果が得られるであろうが、ここでは典型的なパターンを示しているわけである。様々な Ω_i についてそれがどのような意味をもつかは第4章で議論する。

(2) $z_i = (4, 1)^T$ に位置するとき

この生徒は国語は非常に得意であるが英語はそれ程得意ではない生徒である。2教科の成績が正の相関関係にある場合の第1の個性の方向は $p_i = b^{-\frac{1}{2}}(4.656,$

$-0.821)^T$ となり, 集団の中で国語が得意であることと英語がそれ程得意ではないことが, 後述する $\Sigma = bI$ の場合の $p_i = b^{-\frac{1}{2}}(4, 1)^T$ よりも, この個性の場合強く表れていることが分かる. 2教科の成績が負の相関関係にある場合には, 第1の個性の方向は $p_i = b^{-\frac{1}{2}}(5.715, 3.414)^T$ となる. 負の相関関係にある場合には一方の教科が得意な生徒はもう一方の教科は得意でない傾向が強い集団であるので, この生徒はこの集団の中では, 国語が得意なことはより強く表れると共に, 英語がそれ程得意ではないことは強く表れない.

さらに, 例えば $\Omega_i = a \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{bmatrix}$ として (2.4) 式の一

般化固有分解を解くと, 正の相関関係がある場合には $v_i = b^{-\frac{1}{2}}(1.363, -0.727)^T$ が得られる. このとき, この期間で伸びようとした方向も国語へのウェイトが高いのと同時に, 英語に対する方向はマイナスの方向となっている. $\Sigma = bI$ の場合には $v_i = b^{-\frac{1}{2}}(0.930, 0.367)^T$ が得られ, この期間で伸びようとした方向も国語へのウェイトが高いと解釈できるが, 上記の正の相関関係ある場合の方が, 集団の分散構造を考慮した結果, よりその傾向が強く表れていたことが確認できる. 負の相関関係がある場合には $v_i = b^{-\frac{1}{2}}(1.362, 1.185)^T$ が得られ, 他の場合と比べて, 国語へのウェイトが高いのと同時に, 英語に対する方向ウェイトも高くなっている. 2教科の成績が負の相関関係にある状況では, どちらかの教科が得意であれば, 全体としてマイナスの評価は受けないことがわかる.

(3) $z_i = (-3, -3)^T$ に位置するとき

この生徒は国語も英語も同程度に得意でない生徒である. 正の相関関係がある場合の第1の個性の方向は $p_i = b^{-\frac{1}{2}}(-2.301, -2.301)^T$ となる. その得意でない傾向は, $\Sigma = bI$ の場合の $p_i = b^{-\frac{1}{2}}(-3, -3)^T$ よりも弱く, 2教科の成績が負の相関関係にある場合の $p_i = b^{-\frac{1}{2}}(-5.477, -5.477)^T$ と比べるとさらに弱いことがわかる.

このとき, 国語も英語も同程度に得意ではないが, 同程度に伸びる可能性があるという傾向が強いとして, 例えば $\Omega_i = a \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{bmatrix}$ として一般化固有値分解を行うと重根 $\frac{a}{b}$ に対応する固有ベクトルは一意に定まらな

い. このとき, 集団の中ではこの期間はどちらの教科に非常にウェイトをおいて伸びたということなく集団の傾向に従って伸びようとしていたと考えられる.

その他の特徴的な点に位置する生徒に対しても一般化固有値問題を解いた結果を表2 (正の相関関係にある場合), 表3 ($\Sigma = bI$ の場合), 表4 (負の相関関係にある場合) に示しておく.

4. Ω_i の意味

第3章では, 典型的な位置にある生徒に対して, Σ に応じた比較をしてきた. 本章では, そのとき一応仮定してきた Ω_i についてより一般的に考える. Ω_i が様々な場合にどのような意味を持つのか説明をしていく. やはり, 分かり易いように, 第3章に対応させ, $m = 2$ の場合で説明する. ここで,

$$\Omega_i = \begin{bmatrix} c & e \\ e & d \end{bmatrix}$$

とする.

(1) $c > d, e > 0$ の場合

まず $e > 0$ より, この生徒は国語も英語も共にこの期間に伸びようとしていたと考えられる. これは続く (2) (3) の場合も同様である. さらに, $c > d$ より, どちらかといえば英語より国語に力を入れていたのではないかと推察できる. また, 全く逆に, 国語も英語もこの期間に伸びなかったという場合も考えられる. そのどちらであったかは, 基準化データを時系列的に見ることにより確認できる. この状況の場合には $c > d$ であるためどちらかといえば英語より国語が相対的に伸びなかったのではないかと推察できる.

第3章では仮定した中では, (2) で仮定した

$$a \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{bmatrix} \text{ がこの場合にあたる.}$$

(2) $c = d, e > 0$ の場合

この場合は, $c = d$ より国語にも英語にも同程度に力を入れていたのではないかと推察できる.

第3章で仮定した中では, (1) で仮定した

$$a \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{bmatrix} \text{ がこの場合にあたる.}$$

(3) $c < d, e > 0$ の場合

この場合には, $c < d$ より, (1) の場合とは逆にどち

表2. 2教科の成績が正の相関関係にある場合の個性の方向

z_i^T	p_i^T	Ω_i	v_i^T
(4, 1)	$b^{-\frac{1}{2}}(4.656, -0.821)$	$a \begin{bmatrix} 1 & \frac{0.7}{2} \\ \frac{0.7}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$	$b^{-\frac{1}{2}}(1.363, -0.727)$
(3, 3)	$b^{-\frac{1}{2}}(2.301, 2.301)$	$a \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{bmatrix}$	一意に定まらない
(1, 4)	$b^{-\frac{1}{2}}(-0.821, 4.656)$	$a \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{0.7}{2} \\ \frac{0.7}{2} & 1 \end{bmatrix}$	$b^{-\frac{1}{2}}(-0.727, 1.363)$
(-1, 4)	$b^{-\frac{1}{2}}(-3.414, 5.715)$	$a \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{0.7}{2} \\ -\frac{0.7}{2} & 1 \end{bmatrix}$	$b^{-\frac{1}{2}}(-1.185, 1.362)$
(-3, 3)	$b^{-\frac{1}{2}}(-5.477, 5.477)$	$a \begin{bmatrix} 1 & -0.7 \\ -0.7 & 1 \end{bmatrix}$	$b^{-\frac{1}{2}}(-1.291, 1.291)$
(-4, 1)	$b^{-\frac{1}{2}}(-5.715, 3.414)$	$a \begin{bmatrix} 1 & -\frac{0.7}{2} \\ -\frac{0.7}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$	$b^{-\frac{1}{2}}(-1.362, 1.185)$
(-4, -1)	$b^{-\frac{1}{2}}(-4.656, 0.821)$	$a \begin{bmatrix} 1 & \frac{0.7}{2} \\ \frac{0.7}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$	$b^{-\frac{1}{2}}(-1.363, 0.727)$
(-3, -3)	$b^{-\frac{1}{2}}(-2.301, -2.301)$	$a \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{bmatrix}$	一意に定まらない
(-1, -4)	$b^{-\frac{1}{2}}(0.821, -4.656)$	$a \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{0.7}{2} \\ \frac{0.7}{2} & 1 \end{bmatrix}$	$b^{-\frac{1}{2}}(0.727, -1.363)$
(1, -4)	$b^{-\frac{1}{2}}(3.414, -5.715)$	$a \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{0.7}{2} \\ -\frac{0.7}{2} & 1 \end{bmatrix}$	$b^{-\frac{1}{2}}(1.185, -1.362)$
(3, -3)	$b^{-\frac{1}{2}}(5.477, -5.477)$	$a \begin{bmatrix} 1 & -0.7 \\ -0.7 & 1 \end{bmatrix}$	$b^{-\frac{1}{2}}(1.291, -1.291)$
(4, -1)	$b^{-\frac{1}{2}}(5.715, -3.414)$	$a \begin{bmatrix} 1 & -\frac{0.7}{2} \\ -\frac{0.7}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$	$b^{-\frac{1}{2}}(1.362, -1.185)$

表 3. $\Sigma = bI$ の場合の個性の方向

z_i^T	p_i^T	Ω_i	v_i^T
(4, 1)	$b^{-\frac{1}{2}}(4, 1)$	$a \begin{bmatrix} 1 & \frac{0.7}{2} \\ \frac{0.7}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$	$b^{-\frac{1}{2}}(0.930, 0.367)$
(3, 3)	$b^{-\frac{1}{2}}(3, 3)$	$a \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{bmatrix}$	一意に定まらない
(1, 4)	$b^{-\frac{1}{2}}(1, 4)$	$a \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{0.7}{2} \\ \frac{0.7}{2} & 1 \end{bmatrix}$	$b^{-\frac{1}{2}}(0.367, 0.930)$
(-1, 4)	$b^{-\frac{1}{2}}(-1, 4)$	$a \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{0.7}{2} \\ -\frac{0.7}{2} & 1 \end{bmatrix}$	$b^{-\frac{1}{2}}(-0.367, 0.930)$
(-3, 3)	$b^{-\frac{1}{2}}(-3, 3)$	$a \begin{bmatrix} 1 & -0.7 \\ -0.7 & 1 \end{bmatrix}$	$b^{-\frac{1}{2}}(-0.707, 0.707)$
(-4, 1)	$b^{-\frac{1}{2}}(-4, 1)$	$a \begin{bmatrix} 1 & -\frac{0.7}{2} \\ -\frac{0.7}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$	$b^{-\frac{1}{2}}(-0.930, 0.367)$
(-4, -1)	$b^{-\frac{1}{2}}(-4, -1)$	$a \begin{bmatrix} 1 & \frac{0.7}{2} \\ \frac{0.7}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$	$b^{-\frac{1}{2}}(0.930, 0.367)$
(-3, -3)	$b^{-\frac{1}{2}}(-3, -3)$	$a \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{bmatrix}$	一意に定まらない
(-1, -4)	$b^{-\frac{1}{2}}(-1, -4)$	$a \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{0.7}{2} \\ \frac{0.7}{2} & 1 \end{bmatrix}$	$b^{-\frac{1}{2}}(0.367, 0.930)$
(1, -4)	$b^{-\frac{1}{2}}(1, -4)$	$a \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{0.7}{2} \\ -\frac{0.7}{2} & 1 \end{bmatrix}$	$b^{-\frac{1}{2}}(0.367, -0.930)$
(3, -3)	$b^{-\frac{1}{2}}(3, -3)$	$a \begin{bmatrix} 1 & -0.7 \\ -0.7 & 1 \end{bmatrix}$	$b^{-\frac{1}{2}}(0.707, -0.707)$
(4, -1)	$b^{-\frac{1}{2}}(4, -1)$	$a \begin{bmatrix} 1 & -\frac{0.7}{2} \\ -\frac{0.7}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$	$b^{-\frac{1}{2}}(0.930, -0.367)$

表 4. 2 教科の成績が負の相関関係にある場合の個性の方向

z_i^T	p_i^T	Ω_i	v_i^T
(4, 1)	$b^{-\frac{1}{2}}(5.715, 3.414)$	$a \begin{bmatrix} 1 & \frac{0.7}{2} \\ \frac{0.7}{2} & 1 \end{bmatrix}$	$b^{-\frac{1}{2}}(1.362, 1.185)$
(3, 3)	$b^{-\frac{1}{2}}(5.477, 5.477)$	$a \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{bmatrix}$	$b^{-\frac{1}{2}}(1.291, 1.291)$
(1, 4)	$b^{-\frac{1}{2}}(3.414, 5.715)$	$a \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{0.7}{2} \\ \frac{0.7}{2} & 1 \end{bmatrix}$	$b^{-\frac{1}{2}}(1.185, 1.362)$
(-1, 4)	$b^{-\frac{1}{2}}(0.821, 4.656)$	$a \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{0.7}{2} \\ -\frac{0.7}{2} & 1 \end{bmatrix}$	$b^{-\frac{1}{2}}(0.727, 1.363)$
(-3, 3)	$b^{-\frac{1}{2}}(-2.301, 2.301)$	$a \begin{bmatrix} 1 & -0.7 \\ -0.7 & 1 \end{bmatrix}$	一意に定まらない
(-4, 1)	$b^{-\frac{1}{2}}(-4.656, -0.821)$	$a \begin{bmatrix} 1 & -\frac{0.7}{2} \\ -\frac{0.7}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$	$b^{-\frac{1}{2}}(1.363, 0.727)$
(-4, -1)	$b^{-\frac{1}{2}}(-5.715, -3.414)$	$a \begin{bmatrix} 1 & \frac{0.7}{2} \\ \frac{0.7}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$	$b^{-\frac{1}{2}}(1.362, 1.185)$
(-3, -3)	$b^{-\frac{1}{2}}(-5.477, -5.477)$	$a \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{bmatrix}$	$b^{-\frac{1}{2}}(1.291, 1.291)$
(-1, -4)	$b^{-\frac{1}{2}}(-3.414, -5.714)$	$a \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{0.7}{2} \\ \frac{0.7}{2} & 1 \end{bmatrix}$	$b^{-\frac{1}{2}}(1.185, 1.362)$
(1, -4)	$b^{-\frac{1}{2}}(-0.821, -4.656)$	$a \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{0.7}{2} \\ -\frac{0.7}{2} & 1 \end{bmatrix}$	$b^{-\frac{1}{2}}(0.726, 1.363)$
(3, -3)	$b^{-\frac{1}{2}}(2.301, -2.301)$	$a \begin{bmatrix} 1 & -0.7 \\ -0.7 & 1 \end{bmatrix}$	一意に定まさない
(4, -1)	$b^{-\frac{1}{2}}(4.656, 0.821)$	$a \begin{bmatrix} 1 & -\frac{0.7}{2} \\ -\frac{0.7}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$	$b^{-\frac{1}{2}}(1.363, 0.727)$

らかといえは国語より英語に力を入れていたのではないかと推察できる。また、全く逆に、国語も英語もこの期間に伸びなかったという場合も考えられるが、この状況の場合には $c < d$ であるため、どちらかといえは国語より英語が相対的に伸びなかったのではないかと推察できる。

表2から表4で仮定した中では、 $a \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{0.7}{2} \\ \frac{0.7}{2} & 1 \end{pmatrix}$ がこの

場合に当たる。

(4) $c > d, e < 0$ の場合

この場合には、まず $e < 0$ より、この生徒は国語あるいは英語のどちらかのみが伸び、どちらかは力が入れられず伸びなかったことがわかる。これは続く (5) (6) の場合も同様である。さらに、 $c > d$ から、英語より国語の伸びあるいは伸び悩みの方が大きかったのではないかと推察できる。

表2から表4で仮定した中では、 $a \begin{pmatrix} 1 & -\frac{0.7}{2} \\ -\frac{0.7}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ が

この場合に当たる。

(5) $c = d, e < 0$ の場合

この場合には、 $c = d$ より、英語と国語は同程度の伸びあるいは伸び悩みの仕方をしたのではないかと推察できる。

表2から表4で仮定した中では、 $a \begin{pmatrix} 1 & -0.7 \\ -0.7 & 1 \end{pmatrix}$ が

この場合に当たる。

(6) $c < d, e < 0$ の場合

この場合には、 $c < d$ より、(4) の場合とは逆に国語より英語の伸びあるいは伸び悩みの方が大きかったのではないかと推察できる。

表2から表4で仮定した中では、 $a \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{0.7}{2} \\ -\frac{0.7}{2} & 1 \end{pmatrix}$ が

この場合に当たる。

(7) $e = 0$ の場合

この場合には、 $e = 0$ より、どちらに力を入れたということなく、その生徒の各基準化観測値は、その平均値ベクトルのまわりにばらついていたと推察できる。

5. ダイナミックな教育への応用

第2章で提案した方法を表1の2教科の成績に適用してみる。まず、各生徒から求めた8時点に対する基準化データの各生徒の平均値ベクトルを表5に示す。このベクトルの分散共分散行列の推定値は、

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0.9911 & 0.2301 \\ 0.2301 & 0.9914 \end{pmatrix}$$

と求められる。

さらに、例えば、32番目の生徒の個人内分散行列を推定すると、

$$\hat{\Omega}_{32} = \begin{pmatrix} 0.0176 & -0.0017 \\ -0.0017 & 0.0009 \end{pmatrix}$$

が得られ、この生徒の基準化平均値ベクトルは

$$\mu_{32} = (-0.789, 2.233)$$

と求められる。この生徒の平均的な位置を表すベクトル自身は $z_{32} = (-0.520, 2.117)$ と推定される。ところで、集団の分散共分散において国語と英語の基準化変量は正の相関関係を持っている。そのことを考慮した μ_{32} は、この生徒の英語が得意で国語はそれ程得意ではないという個性が、この集団の傾向の中では、 z_{32} で評価するよりも本当はより強いのだということを示している。 z_{32} で評価するのでは、この場合英語が得意で国語はそれ程ではないという個性の方向を少し過小評価してしまう。

さらに、個人内の変化を捉えることも個人の特徴を知る上で重要なことであるため、この期間の個人内の変化、伸びの方向を一般化固有値分解によって求めると、

$$v_{32} = (-1.026, 0.344)$$

と求められる。この期間も国語より英語に力を入れていたことが分かるが、2教科共この期間は集団の中で非常に伸びる方向に向かったわけではなかったことがわかる。

以上、この2つの方向によって、この生徒の今まで培ってきた個性の方向と、現在短期間に伸びようとしている個性の方向を捉えることができ、ある期間毎に時間を追ってダイナミックに教育していくときの有用な指標となろう。

表5. 基準化データの平均値ベクトル

学生番号	国語	英語
1	0.197	0.258
2	-0.493	-0.152
3	-0.887	-1.036
4	0.165	-0.059
5	0.162	-0.561
6	0.574	0.800
7	0.301	0.267
8	-0.137	0.122
9	0.675	0.501
10	-0.166	-0.649
11	-0.093	0.417
12	0.224	0.552
13	0.472	-0.063
14	0.263	0.682
15	0.546	0.516
16	-0.801	-0.689
17	-0.048	-0.237
18	0.481	0.033
19	-0.001	0.851
20	-1.615	-1.031
21	0.893	0.808
22	-0.259	-0.473
23	-0.574	-0.226
24	-0.490	-0.815
25	0.067	0.173
26	0.001	-0.093
27	0.989	0.765
28	0.068	-0.712
29	2.230	0.562
30	1.670	1.624
31	0.547	2.129
32	-0.520	2.117
33	-1.632	1.603
34	-2.190	0.451
35	-2.232	-0.614
36	-1.664	-1.692
37	-0.514	-2.227
38	0.538	-2.228
39	1.050	-1.152
40	2.199	-0.521

6. 終わりに

成績を平均0, 分散1と基準化し, この基準化観測値ベクトルの成績データにおける性質より, 各生徒の平均値ベクトルと各時点における成績の特徴を表すベクトルで表されるとモデル化した。その上で, 平均値ベクトルの分散共分散行列 Σ の構造を考慮した各生徒の平均値ベクトルの方向を第1の個性の方向と捉えることを提案した。さらに, テストの行われた期間の伸びの方向を, 個人内分散共分散 Ω_i を Σ に対して一般化固有値分解して得た第1固有値ベクトルで捉えることも提案し, 教育問題においてどのように利用し, 解釈していくことが妥当であるかを示した。本論文においては, あるクラスの例で示したが, より大きな集団(ある学校の同学年の生徒, 全国の同学年の生徒等)に対しても拡張して使用することができる。

参考文献

- Harshman, R.A. (1970). Foundation of the PARAFAC procedure, models and conditions for an explanatory multimode factor analysis. Unpublished report, Los Angeles, Univ. of California.
- 伊理正夫・韓 太舜 (1977). 線形代数. 教育出版.
- 高根芳雄 (1995). 制約付き主成分分析法. 朝倉書店.
- Tucker, L.R. (1966). Some mathematical notes on three-mode factor analysis. *Psychometrika*, 31, 279-311.
- ラオ (1977). 統計的推測とその応用. 東京図書株式会社. (奥野忠一, 長田 洋, 篠崎信雄, 広崎昭太, 古河陽子, 矢島敬二, 鷺尾泰俊訳).
- 柳井晴夫 (1994). 多変量データ解析法. 朝倉書店.

—— 1996年11月20日 受付,
1998年4月9日 最終修正 ——