プログラム学習における学習進度分布に関する一考察

竹 谷 誠, 佐 藤 隆 博

ON THE LEARNING PROGRESS DISTRIBUTION OF PROGRAMMED INSTRUCTION

Makoto TAKEYA*, Takahiro SATO*

A new estimation method for learning progress distribution of self-paced programmed instruction is introduced in order to better evaluate the instructional program. The traditional program evaluation has been based on student performance for frame responses and scores of pre- and post-tests.

This paper points out that learning progress distributions in time process should be utilized in order both to evaluate the program construction and to estimate student learning progress, as well as the traditional evaluation methods. First, this paper discusses differences between a self-paced programmed instruction and a group-paced instruction. Second, this paper describes the relation of learning progress distribution to frame response time distribution. Finally, this paper suggests (1) learning progress distribution models and these characteristics, (2) quantitative estimation of student learning progress, and (3) average response time estimation of each frame.

1. ま え が き

B. F. Skinner によって提唱されたプログラム学習 (Programmed Instruction) は、個人ベース学習の代表的なものとして、あるいは CAI (Computer Assisted Instruction) の教育技法として、広く教育現場で利用されている。実際の実施にあたっては学習プログラム教材の評価は重要な問題である。一般に学習教材の評価や学習者の学習効果の評価は実施検証による方法が取られている。プログラム教材の場合には、事前、事後テスト (Pre-, Post-test) の得点差および各設問の通過率 (正答率) が利用されている。これに加えて筆者らは応答時間が学習プログラムの検証に有効であることを報告した (竹谷・佐藤・洲之内 (1973))。さらにプログラム学習を実施する場合には一斉授業と交互に利用されることが多く、学習進度差が出ることは、管理上重要な問題である。竹谷・佐藤他 (1973) はそのために一定時間ごとに

全学習者の学習進度を測定する簡便法を提案した。

本論文では、この測定法を用い学習者の学習進度を求め、学習進度分布から学習プログラム教材を評価したり、学習者の進度状況を把握したりするために以下の 3 点を中心に提案する。

(1) 学習進度分布のモデルを組立て分布の基本的特性を考察する。また、シミュレーションによって学習進度分布を予測し、その指導計画への利用を述べる。

(2) 学習進度分布の統計量として全学習者の平均学習進度、平均学習速度および変動係数を求め、全体的な進行状況の定量的な観察法を示す。

(3) 学習進度分布から各フレームの平均応答時間を推定する方法を示すと同時に、その推定値の利用法を示す。

2. プログラム学習と一斉授業

学校などの教育現場における授業形態は、一斉授業 (Group-paced Instruction) とプログラム学習で代表される個別学習 (Self-paced Instruction) の形態がある。

* 日本電気株式会社 中央研究所 (Nippon Electric Company, Limited, Central Research Laboratories)

プログラム学習が導入されるときは、多くの場合一斉授業の間に挿入されて、一斉授業と交互に利用される。ここでは、プログラム学習と一斉授業の差異を述べ、プログラム学習における学習進度分布の意味を考察する。

プログラム学習は、B. F. Skinner の“刺激—反応—強化”の理論の実践的な教育技法として発展してきた。その技法は学習プログラムと呼ばれる教材を各学習者に与え、学習者を個人ペースで学習指導する技法である。学習者に情報が提示（刺激）され、それに対して学習者が解答（反応）し、その結果により適切なフィード・バック情報（強化）が学習者に与えられる。学習者は順次この過程を繰り返し次第に目標行動に到達する。ここで学習者に提示する情報の単位をフレーム（frame）、連続する二つのフレーム間の難易の差をステップ・サイズ（step size）と呼んでいる。

プログラム学習で代表される個別学習はこのように個人ペースで学習するのに対し、一斉授業は教師の指導のもとに全学習者が同一ペースで学習する。一斉授業では全学習者が同一フレームを一斉に開始し、教師の判断により適切な時間に終了する。こうして全学習者は順次同一ペースで学習する。藤田・平田・佐藤（1969）は一斉

授業におけるフレームごとの応答時間の累積確率分布を測定する方法と分析法を提案した。応答時間の累積確率分布は横軸を時間 t 、縦軸を学習終了者の確率 $G(t)$ とし図 1 のように示される。一般にこの分布曲線を応答曲線（Response Curve）と呼んでいる。一斉授業では、リスpons・アナライザ（Response Analyzer）を用いて応答曲線を求めることができ、フレームの学習行動を推定することができる。しかし、一斉授業は各フレームを同一ペースで進行するので、学習者の学習進度分布は図 2 (a) に示すように進度差があらわれない。他方、個別学習では個人ペースで各フレームを学習するのでリスpons・アナライザを用いて直接応答曲線を求めることはできない。しかし、学習者の応答時間の差異は学習進度の差異としてあらわれ、図 2 (b) に示すようになる。このように、個別学習では学習した過去のフレームの応答時間が学習進度分布に関係があることは容易に推察できる。そこで、本論文では学習進度分布の特性の考察とそれにもとづいて学習者の学習行動およびフレームの特性を推察する方法を提案する。

3. 学習進度分布と応答曲線

2. においてプログラム学習と一斉授業の学習形態の差異はそれぞれ学習進度分布と応答曲線にあらわれることを述べた。ここでは、4. 以下の議論の準備としてプログラム学習における学習進度分布と応答曲線の関係を示す。学習者が一斉に開始したプログラム学習の学習進度分布を定量的に取り扱うには一定時間ごとに学習進度を測定すべきである。この測定単位時間を τ (分) とする。また学習プログラムのフレーム数を n (第 1 フレームから第 n フレーム)、学習者数を N 人、最後の学習者が終了したときの測定回数を m とあらわす。学習者は第 1 フレームから第 n フレームまで順次学習していくものとする。そのとき i 回目の測定時間（すなわち開始後 $i\tau$ 分）における全学習者のうちの第 k フレーム実行者数を確率 $f_i(k)$ とあらわす ($i=1, 2, \dots, m$)。このとき次式が成り立つ。

$$\sum_{k=1}^{n+1} f_i(k) = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (3.1)$$

とくに、

$$\begin{cases} f_m(n+1) = 1 \\ f_m(k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (3.2)$$

一般に i 回目の測定時間における $f_i(k)$ ($k=1, 2, \dots, n+1$) を時間 $i\tau$ 分における学習進度分布と呼ぶ。

一方、第 l フレームを開始後第 j フレームを終了す

図 1 一斉授業における応答曲線

図 2 学習進度分布

るまでの応答時間の累積確率分布関数を $G_{lj}(t)$ とする ($l, j = 1, 2, \dots, n, l \leq j$). すなわち, 第 l フレームから第 j フレームまでの応答曲線を $G_{lj}(t)$ であらわす. また, このときの応答時間の確率密度関数を $g_{lj}(t)$ とあらわす. そこで次式が成り立つ.

$$G_{lj}(t) = \int_0^t g_{lj}(t) dt \quad (3.3)$$

また, 第 k フレームの平均応答時間を t_k とすると ($k = 1, 2, \dots, n$), i_k は,

$$i_k = \int_0^{m\tau} \{1 - G_{kk}(t)\} dt \quad (3.4)$$

で示される.

プログラム学習の学習進度分布 $f_i(k)$ と応答曲線 $G_{ij}(t)$ との間には, 以下の (3.5), (3.6) 式の関係が成り立つことは容易に示される.

$$G_{1j}(i\tau) = \sum_{k=j+1}^{n+1} f_i(k) \quad (3.5)$$

($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$)

逆に,

$$f_i(k) = G_{1k-1}(i\tau) - G_{1k}(i\tau) \quad (3.6)$$

($k = 1, 2, \dots, n$)

ここで,

$$\begin{cases} G_{10}(i\tau) = 1 \\ G_{1n+1}(i\tau) = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

とする. 今, 第 j フレームの最終終了者の第 1 フレームからの応答時間を $\max. t_j$ とし, 応答曲線 $G_{1j}(t)$ を近似的に求めるのに必要なサンプリング数を μ 個とする. このとき,

$$\max t_j / \mu \geq \tau \quad (3.8)$$

であれば, (3.5) 式によって学習進度分布から応答曲線 $G_{1j}(t)$ は推定できる. 他方, (3.6) 式から $G_{1k-1}(t)$ と $G_{1k}(t)$ から任意の測定時間の $f_i(k)$ は求められる.

4. 学習進度分布のモデルと特性

2. において学習進度分布の形状が各フレームに対する学習行動の結果に関係していることを述べた. 各測定時間の学習進度分布の変化と構成されているフレーム系列の特性との関係を考察するために, ここでは四つの基本的モデルを設定する.

フレームの応答時間の特性は応答曲線 $g_{kk}(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) で表現される. 一般にスキナー型 (直線型) の学習プログラムでは 1 フレームの学習内容の量は少なく, かつステップ・サイズは小さく取られている. 藤田・佐藤・平田 (1972) はこのように学習量の少ない場

合の応答曲線が指数分布形になることを示した. そこで各フレームの応答曲線を指数分布関数として四つのモデルを設定し, そのときの学習進度分布の時間による変動を比較することにより, 学習者の進行状況やフレームの応答時間を推定する方法を示す.

一般に各フレームの応答曲線の密度関数 $g_{kk}(t)$ は,

$$g_{kk}(t) = \begin{cases} \lambda_k e^{-\lambda_k(t-t_0)} & t \geq t_0 \\ 0 & t_0 > t \geq 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

と示される. 時間 t_0 までは応答する学習者がいないことを示しており, t_0 を心理学では潜時 (latency) と呼んでいる. また藤田・平田・佐藤 (1969) は無回答時間と呼んでいる. 分布の形状の特性に関する考察では $t_0 = 0$ としても一般性を失わない. そこで以下の議論で示すモデルの応答曲線の密度関数を次式であらわす.

$$g_{kk}(t) = \lambda_k e^{-\lambda_k t} \quad (t \geq 0) \quad (4.2)$$

4.1 各フレームの応答時間の従属性・独立性の学習進度への効果

各フレームの学習内容が質的に同じ場合や, よくできる学習者ほどどのフレームでも応答時間が短く, できない学習者ほど応答時間が長い場合には, 各フレームの応答時間の従属性が高くなる. 逆に各フレームの学習内容が質的に異なる場合や, 各学習者の応答時間がフレームによってまちまちである場合は, 応答時間の独立性が高くなる. 従属性と独立性が成り立つ二つのケースの極端な場合として次の完全に従属性が成り立つときと, 完全に独立性が成り立つときのモデルを設定する. 実際の分布は, この二つのモデル分布の間に位置すると考えられる. ここで各フレームの学習量およびステップ・サイズは等しいとして, 各フレームの応答曲線の密度関数を,

$$g_{kk}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (4.3)$$

であらわし, 次の二つのモデルを設定する.

[モデル 1]: 各フレームの応答曲線が完全に従属な場合, 第 1 フレームから第 k フレームまでの応答曲線は,

$$g_{1k}(t) = \frac{\lambda}{k} e^{-\frac{\lambda}{k} t} \quad (4.4)$$

で示されるので, (3.3), (3.6) 式から $f_i(k)$ は,

$$\begin{cases} f_i(1) = e^{-\lambda i\tau} \\ f_i(k) = e^{-\frac{\lambda i\tau}{k}} - e^{-\frac{\lambda i\tau}{k-1}} \quad (k = 2, 3, \dots, n) \\ f_i(n+1) = 1 - e^{-\frac{\lambda i\tau}{n}} \end{cases} \quad (4.5)$$

表 1. 学習進度分布モデル-1
(a) モデル I の例

	フ レ ー ム 番 号										end
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2	55	19	8	4	3	2	1	1	1	1	6
4	30	25	12	7	5	3	2	2	1	1	11
6	17	24	14	9	6	4	3	3	2	2	16
時 8	9	21	15	10	7	5	4	3	3	2	21
間 10	5	17	14	10	8	6	4	4	3	3	26
(分) 12	3	14	14	11	8	6	5	4	3	3	30
14	1	11	12	10	8	6	5	4	4	3	34
16	1	8	11	10	8	7	5	5	4	3	38
18		6	10	9	8	7	6	5	4	3	42
20		3	9	9	8	7	6	5	4	4	45

(b) モデル II の例

	フ レ ー ム 番 号										end
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2	55	33	10	2							
4	30	36	22	9	3	1					
6	17	30	27	16	7	3	1				
時 8	9	22	26	21	13	6	2	1			
間 10	5	15	22	22	17	10	5	2	1		
(分) 12	3	10	18	21	19	14	8	4	2	1	
14	1	6	13	19	19	16	11	7	4	2	1
16	1	4	9	15	18	17	14	10	6	3	3
18		2	6	12	16	17	16	12	8	5	5
20		1	4	9	13	16	16	14	10	7	8

となる。一例としてフレーム数 $n = 10$, 測定単位時間 $\tau = 2$ 分, $\lambda = 0.3$ としたときの各測定時間の学習進度分布を表 1 (a) に示す。その表の中の数値はパーセントを示し太字の数値は分布の山となるフレーム位置を示す。

〔モデル II〕：各フレームの応答時間が完全に独立な場合, $g_{ik}(t)$ はよく知られているように Γ 分布となる。すなわち, 次式で示される。

$$g_{ik}(t) = \frac{\lambda (\lambda t)^{k-2} e^{-\lambda t}}{(k-1)!} \quad (4.6)$$

(4.6) 式を (3.3), (3.6) 式に代入すると, $f_i(k)$ は次式となる。

$$f_i(k) = \frac{(\lambda i \tau)^{k-1} e^{-\lambda i \tau}}{(k-1)!} \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (4.7)$$

すなわち, $f_i(k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) はポアソン分布と

なる。完全従属が完全独立になる以外はモデル I の例と同一条件の学習進度分布表の例を表 1 (b) に示す。表 1 (a), (b) の二つの例では, 各フレームの平均応答時間は等しいので全フレームを終了するまでの平均応答時間は等しい。しかしモデル I とモデル II とを比べてみると学習進度分布表に明らかな差異が見られる。例えば分布の山の頂上となるフレームの推移の進行はモデル I の方が遅い。またモデル I の山の高さの方が低く, 分布の広がり大きい。換言すれば, モデル I においては, 早く解答する学習者はどんどん進み, 遅い学習者はどんどん遅れていき, 進度差が大きくなることは容易にわかる。5.2 においてこの分布の広がりおよび学習進度を定量的に扱う。

プログラムが実際に導入されているケースのほとんどは一斉授業と併用されている。その場合極端に進度差が

生ずることは学習指導上好ましくない。上記のモデルで考えると各フレームの応答時間が従属的であるとき進度差が大きくなる。進度差が予想よりはるかに大きくなった場合には、早く終わった学習者と遅い学習者それぞれに対する補助教材の準備、コースを分けての学習指導、あるいは学習プログラムの改良等の対策を立てる必要がある。

4.2 応答時間が極端に異なるフレームの学習進度への効果

学習プログラムの中に特別にむずかしくて解決のために長時間を要する問題がある場合や、逆にやさしすぎて短時間しか要しない問題がある場合、どのような分布になるかを考察する。ここでは n フレームの内特定の j フレーム ($j \neq 1$) のみが極端に応答時間が異なり、かつ各フレームの応答時間は独立である場合を論ずることにする。すなわち、モデル II と第 j フレームの平均応答時間が異なる以外まったく同じモデルを設定する。具体的に応答曲線を式で示すと、

$$g_{kk}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (k = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n) \quad (4.8)$$

$$g_{jj}(t) = \mu e^{-\mu t} \quad (\mu \neq \lambda) \quad (4.9)$$

となる。このとき $g_{ik}(t)$ は次式で示される (付録 I)。

$$g_1(kt) = \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1} e^{-\lambda t}}{(k-1)!} \quad (1 \leq k \leq j-1) \quad (4.10)$$

$$g_1(k) = \frac{\lambda^{k-1} \mu}{(\lambda - \mu)^{k-1}} \left(e^{-\mu t} - \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(\lambda - \mu)^j t^j e^{-\lambda t}}{j!} \right) \quad (j \leq k \leq n) \quad (4.11)$$

(4.10), (4.11) 式と (3.3), (3.6) 式とから学習進度分布 $f_i(k)$ は次式で与えられる (付録 II)。

$$\begin{cases} f_i(k) = \frac{(\lambda i \tau)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda i \tau} & (k=1, 2, \dots, j-1) \\ f_i(k) = \frac{\lambda^{k-2} \mu}{(\lambda - \mu)^{k-1}} \left(e^{-\mu i \tau} - \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(\lambda - \mu)^j (i \tau)^j e^{-\lambda i \tau}}{j!} \right) & (k=j+1, \dots, n) \end{cases} \quad (4.12)$$

すなわち、

$$f_i(k) = \frac{1}{\lambda} g_{1k}(i\tau) \quad (k \neq j) \quad (4.14)$$

となる。(4.14) 式から残る $f_i(j)$ は数値計算によって求められる。そこで代表的モデルとして次のモデル III, IV を設定する。すなわち、

〔モデル III〕：第 j フレームの μ が $\mu = \lambda/3$ である以外はモデル II とまったく同じ場合、

〔モデル IV〕：第 j フレームの μ が $\mu = 3\lambda$ である以外はモデル II とまったく同じ場合、

の二つの場合を考察する。具体例としてモデル II の例と第 4 フレーム以外同じであるモデル III とモデル IV の学習進度分布表を表 2 (a), (b) にそれぞれ示す。表 2 (a) のモデル III の例では分布の山が長時間第 4 フレームに停滞し、かつ山の高さが上昇する。他方、表 2 (b) のモデル IV の例ではモデル II と比較して第 4 フレームで谷ができ、長時間その谷が第 4 フレームで停滞する。このように学習進度分布の山の位置や山の高さの変動によってフレームの応答時間が他のフレームに比べて長いかな否かを推察することができる。また谷の位置の変動によってフレームの応答時間が他に比べて短いかな否かを推察することができる。

表 2. 学習進度分布モデル-2
(a) モデル III の例

	フ レ ー ム 番 号										end
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2	55	33	10	2							
4	30	36	22	11	1						
6	17	30	27	22	3	1					
時 8	9	22	26	33	6	3	1				
間 10	5	15	22	41	9	5	2	1			
(分) 12	3	10	18	44	11	7	4	2	1		
14	1	6	13	45	13	10	6	3	2	1	
16	1	4	9	43	14	10	8	5	3	1	1
18		2	6	41	14	12	10	7	4	2	2
20		1	4	36	13	13	11	9	6	4	3

(b) モデル IV の例

	フ レ ー ム 番 号										end
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2	55	33	10	1	1						
4	30	36	22	5	5	1					
6	17	30	27	7	12	5	2				
8	9	22	26	9	18	10	4	2			
10	5	15	22	9	21	14	8	4	1		
12	3	10	18	7	22	18	12	7	3	1	
14	1	6	13	5	20	19	15	11	5	3	1
16	1	4	9	4	17	19	17	13	8	5	4
18		2	6	3	14	17	17	15	11	7	7
20		1	4	2	11	15	17	16	13	9	12

以上四つのモデルはいずれも基本的モデルであるが、このようなフレームの応答時間の特性と学習進度分布の形状との関係を知っておくことは、一般の学習進度分布を観察するときには有効である。定量的な分布の観察は5.にゆずるが、ここでは分布の形状による観察点として、(a) 山の広がり、(b) 山の頂上の位置と高さの推移、(c) 谷の位置と高さの推移を挙げておく。また教師の予想と実際の分布とを対比して、予想外の学習者のつまずき、おとし穴あるいは特定の学習者の遅れなどを観察し、考察することができる。とくに学習進度分布の観察は直観的に目に見える形でとらえられる点の特徴で4.3に示すようにグラフにあらわすと観察しやすい。しかし、この観察はあくまで概観的なもので、定量的な観察については5.において述べる。

4.3 コンピュータ・シミュレーションによる学習進度分布予測

先に述べた4モデル以外にも、各フレームの応答時間が独立あるいは従属のもとでコンピュータ・シミュレーションにより学習進度分布を作成することができる。一般に応答曲線は任意の分布関数として与えることができるが、ここでは各フレームの応答曲線 $G_{kk}(t)$ を、

$$G_{kk}(t) = 1 - e^{-\lambda_k t} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (4.15)$$

とする。すなわち各フレームの応答曲線のパラメータを入力し、学習進度分布表を出力するようにプログラムされている。各フレームの学習者の応答時間 t_k は $G_{kk}(t)$ の値を0から1の区間の一様乱数 $\text{RAN}(X)$ であらわして求める。すなわち、

$$t_k = -\frac{1}{\lambda_k} \log(\text{RAN}(X)) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (4.16)$$

で与えられる。こうして全学習者の応答時間を求め、 $G_{1k}(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) を得た後、(3.6) 式より容易に $f_i(k)$ を求めることができる。ここでモデル III のシミュレーション結果を図3に示す。この図のように分布をグラフ化して示すと観察するのに便利である。また各フレームの応答曲線を複合形分布とした場合も同様にコンピュータ・シミュレーションにより学習進度分布を作成することができるが、これについては、竹谷・佐藤・洲之内(1973)が報告したので省略する。

このシミュレーション結果は教師が教材をはじめて利用する場合や、改訂した教材を新たに利用する場合など、授業の指導計画に利用することができる。また現在のように一斉授業の合間にプログラム学習を利用するときには、進度差の調整も大きな問題でありシミュレーション結果から進度予測するのも一考である。教師はシミュレーション結果を以下の点に着目して考察することができる。

- (a) 全体的な進行状況
 - (b) 進度差、とくに遅い学習者と早い学習者の把握。これは補講や補助教材の準備に必要である。
 - (c) 打ち切り時間の推定。一斉授業と併用するとき必要である。
 - (d) 各フレームの同時学習者数の把握。各フレームに必要な補助資料、教材等の量の見積りに利用される。
- ここで大切なのはシミュレーション予測結果と実施結果の比較検討である。教師の予測と大きなへだたりがあるときには該当するフレームおよびそれに関連するフレームを十分考察する必要がある。

Learning Progress After 10 Minutes

```

Prame %
1 5 I *****
2 20 I *****
3 22 I *****
4 41 I *****
5 4 I ****
6 5 I *****
7 2 I **
8 1 I *
9 0 I
10 0 I
end 0

```

Learning Progress After 12 Minutes

```

Prame %
1 0 I
2 14 I *****
3 20 I *****
4 47 I *****
5 9 I *****
6 3 I ***
7 4 I ****
8 2 I **
9 1 I *
10 0 I
end 0

```

Learning Progress After 14 Minutes

```

Prame %
1 0 I
2 6 I *****
3 12 I *****
4 54 I *****
5 13 I *****
6 6 I *****
7 2 I **
8 4 I ****
9 2 I **
10 1 I
end 0

```

Learning Progress After 16 Minutes

```

Prame %
1 0 I
2 4 I ****
3 3 I ***
4 51 I *****
5 17 I *****
6 10 I *****
7 7 I *****
8 4 I ****
9 2 I **
10 2 I **
end 0

```

図 3 学習進度分布シミュレーション

5. 学習進度分布の定量的推定

4. において学習進度分布のモデルを組立て、分布の基本的特性の考察と実践前の分布予測の利用法を述べた。ここでは分布の特性の定量的な推定と分布の時系列からフレームの平均応答時間を推定する方法を示す。これにより藤田・佐藤・平田 (1972) により提案された R-T 分析法が可能となる。

5.1 平均学習進度と平均学習速度

任意の時間の全学習者の進度を端的に把握したり、進行状況を考察したりするために、全学習者の平均学習進度と平均学習速度を求める。一般に i 回目の測定時間における平均学習進度 $\bar{l}_i$ と平均学習速度 $\bar{v}_i$ を次式で定義する。

$$\bar{l}_i = \sum_{k=1}^{n+1} \{f_i(k) \times k\} \quad (5.1)$$

$$\bar{v}_i = \frac{1}{\tau} (\bar{l}_{i+1} - \bar{l}_i) \quad (5.2)$$

(5.1) 式は、全学習者の平均学習フレーム番号を示し、(5.2) 式は、測定単位時間あたりの平均実行フレーム数を示す。なお $\bar{v}_i$ は学習終了者がいる場合には補正が必要であるが、これについてはすでに筆者らが述べているので省略する (竹谷・佐藤 (1974))。また全学習者の分布の広がりを見るために、学習進度分布の変動係数 $c.v_i$ を算出する。 i 回目の測定時間における変動係数 $c.v_i$ は次式で示される。

$$c.v_i = \frac{1}{\bar{l}_i} \sqrt{\sum_{k=1}^{n+1} f_i(k) (k - \bar{l}_i)^2} \quad (5.3)$$

これら三つの値を時系列にして観察すると、いつどのフレームの付近で学習が停滞しているか、分布の広がり、すなわち進度差がどのように変化しているか等を定量的に推定できる。

5.2 フレームの平均応答時間推定と R-T 分析

個々のフレームが学習プログラム教材の中で意図どおりに教育効果をもたらしたか否かを考察するために、R-T 分析がある。一斉授業ではリスpons・アナライザで直接得られる応答曲線から容易に平均応答時間は求められる。しかし、プログラム学習では一般に進度がまちまちで直接平均応答時間を算出することができない。ここでは学習進度分布の時系列から平均応答時間を推定する方法を提案する。

一般に第 k フレーム ($k \neq 1$) を開始後最初の測定時間までの時間を t' とするとき ($0 \leq t' < \tau$)、第 k フレーム ($k \neq 1$) の開始時間と時間間隔 t' とは独立と考えてよい。そこで t' の密度関数 $h(t')$ は、

$$h(t') = \frac{1}{\tau} \quad (0 \leq t' < \tau) \quad (5.4)$$

で示されるとする。このとき各フレームの平均応答時間 t_k ($k = 2, 3, \dots, n$) は次式で示される (付録 III)。

$$t_k = \tau \cdot \sum_{i=1}^m f_i(k) \quad (k = 2, 3, \dots, n) \quad (5.5)$$

第 k フレームの正答率 $\bar{r}_k$ と平均応答時間 t_k を求め、縦軸が正答率 (R)、横軸が平均応答時間 (T) をあらわす R-T 平面上に点 $(t_k, \bar{r}_k)$ をフレーム順にプロットする。

こうして得られた R-T 平面のプロットの推移と学習過程とを対比して観察することにより、予想外のつまづきなどを発見することができる。

6. あとがき

本論では学習プログラムを実施したときの学習者の進度差に着目し、学習進度分布の特性を考察した。筆者らが提案した学習進度分布による解析法は次の二つの場合に適用した。第1は日常の授業においてスモール・ステップからなるリニア・プログラムを利用する場合である。第2は CAI 学習プログラム設計の資料とするために、その原形となるリニア・プログラムを実施する場合である。いずれの場合も学習プログラムはスモール・ステップであるので、このような学習プログラムに対してはほとんどの学習者群が同質とみなせる。そこで本論文のモデルによる解析法が適合できることが確認できた。これら実践データの解析結果に関する報告は別の機会にゆずることとする。また分岐形学習プログラムにおける学習進度分布の特性に関しては現在検討を行っている。

参考文献

- 藤田・平田・佐藤 (1969). 集団学習反応測定装置に関する理論的考察. 電子通信学会論文誌 (c) 52-c, 12, p. 820.
- 藤田・佐藤・平田 (1972). Computer Managed Instruction のための学習応答時間による教育評価について. 電子通信学会論文誌 (D) Vol. 55-D, 10, p. 331
- 佐藤・竹谷 他 (1973). CAI 学習プログラムの作成法と評価法. 電子通信学会教育技術研究会資料 ET-73-7

1973-10, p. 13

竹谷・佐藤・洲之内 (1973). 学習プログラムの応答時間と学習進度 —その測定法と評価法—. 電子通信学会教育技術研究会資料 ET 73-9 (1973-12), p. 45

竹谷・佐藤 (1974). 個別学習指導における学習進度分布の定量的評価. 電子通信学会全国大会. 昭和49年7月

$$g_{1k}(t) = \frac{\lambda^{k-1} \mu}{(\lambda - \mu)^{k-1}} \left(e^{-\lambda t} - \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(\lambda - \mu)^j t^j}{j!} \cdot e^{-\lambda t} \right) \quad (\text{A1.10})$$

となる.

(証明終)

付 録 I

$g_{jk}(t)$ ($j \leq k$) のラプラス変換を $\Phi_{jk}(\theta)$ とすると, 各フレームの応答時間が独立であることから, $\Phi_{1k}(\theta)$ は次式で示される.

$$\Phi_{1k}(\theta) = \prod_{i=1}^k \Phi_{ii}(\theta) \quad (\text{A1.1})$$

$g_{kk}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ のラプラス変換 $\Phi_{kk}(\theta)$ は,

$$\Phi_{kk}(\theta) = \frac{\lambda}{\theta + \lambda} \quad (\text{A1.2})$$

であるから,

(i) $k \leq j-1$ のときは,

$$\Phi_{1k}(\theta) = \left(\frac{\lambda}{\theta + \lambda} \right)^k \quad (\text{A1.3})$$

ラプラス逆変換して,

$$g_{1k}(t) = \frac{\lambda (\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda t} \quad (\text{A1.4})$$

(ii) $k \geq j$ のときは,

$$\Phi_{1k}(\theta) = \left(\frac{\lambda}{\theta + \lambda} \right)^{k-1} \left(\frac{\mu}{\theta + \mu} \right) \quad (\text{A1.5})$$

そこで $\Phi_{1k}(\theta)$ は次式で表現できる.

$$\Phi_{1k}(\theta) = \sum_{j=0}^{k-2} \frac{A_j}{(\theta + \lambda)^{j+1}} + \frac{B}{\theta + \mu} \quad (\text{A1.6})$$

(A1.6) を $(k-2-j)$ 回 ($j=0, 1, \dots, k-2$) 微分して $\theta = -\lambda$ と置くと, A_j が次式で求められる.

$$A_j = -\frac{\lambda^{k-1} \mu}{(\lambda - \mu)^{k-1-j}} \quad (j=0, 1, \dots, k-2) \quad (\text{A1.7})$$

同様に B も,

$$B = \frac{\lambda^{k-1} \mu}{(\lambda - \mu)^{k-1}} \quad (\text{A1.8})$$

と求められる. そこで $\Phi_{1k}(\theta)$ は次式で与えられる.

$$\Phi_{1k}(\theta) = \frac{\lambda^{k-1} \mu}{(\lambda - \mu)^{k-1}} \left(\frac{1}{\theta + \mu} - \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(\lambda - \mu)^j}{(\theta + \lambda)^{j+1}} \right) \quad (\text{A1.9})$$

(A1.9) 式をラプラス逆変換して,

付 録 II

$$f_i(k) = \int_0^{i\tau} g_{1k-1}(t) dt - \int_0^{i\tau} g_{1k}(t) dt \quad (\text{A2.1})$$

であるから,

$$\begin{aligned} f_i(k) &= \int_{\lambda}^{i\tau} \frac{\lambda^{k-2} \mu}{(\lambda - \mu)^{k-2}} \left(e^{-\mu t} - \sum_{j=0}^{k-3} \frac{(\lambda - \mu)^j t^j e^{-\lambda t}}{j!} \right) dt \\ &\quad - \int_0^{i\tau} \frac{\lambda^{k-1} \mu}{(\lambda - \mu)^{k-1}} \left(e^{-\mu t} - \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(\lambda - \mu)^j t^j e^{-\lambda t}}{j!} \right) dt \end{aligned} \quad (\text{A2.2})$$

(A2.2) 式を変形すると,

$$\begin{aligned} f_i(k) &= \int_0^{i\tau} \left\{ \frac{\lambda^{k-2} \mu}{(\lambda - \mu)^{k-2}} - \frac{\lambda^{k-1}}{(\lambda - \mu)^{k-1}} \right\} e^{-\mu t} dt \\ &\quad - \frac{\lambda^{k-2} \mu}{(\lambda - \mu)^{k-2}} \cdot \sum_{j=0}^{k-3} \frac{(\lambda - \mu)^j}{j!} \int_0^{i\tau} t^j e^{-\lambda t} dt \\ &\quad + \frac{\lambda^{k-1} \mu}{(\mu - \mu)^{k-1}} \cdot \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(\lambda - \mu)^j}{j!} \int_0^{i\tau} t^j e^{-\lambda t} dt \end{aligned} \quad (\text{A2.3})$$

となる.

(A2.3) 式第3項は,

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda^{k-1} \mu}{(\lambda - \mu)^{k-1}} \cdot \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(\lambda - \mu)^j}{j!} \int_0^{i\tau} t^j e^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{\lambda^{k-1} \mu}{(\lambda - \mu)^{k-1}} \int_0^{i\tau} e^{-\lambda t} dt \\ &\quad + \frac{\lambda^{k-1} \mu}{(\lambda - \mu)^{k-1}} \sum_{j=1}^{k-2} \frac{(\lambda - \mu)^j}{j!} \int_0^{i\tau} t^j e^{-\lambda t} dt \end{aligned} \quad (\text{A2.4})$$

部分積分して整理すると,

$$\begin{aligned} &= \frac{\lambda^{k-2} \mu}{(\lambda - \mu)^{k-1}} + \frac{\lambda^{k-2} \mu}{(\lambda - \mu)^{k-2}} \sum_{j=0}^{k-3} \frac{(\lambda - \mu)^j}{j!} \int_0^{i\tau} t^j e^{-\lambda t} dt \\ &\quad - \frac{\lambda^{k-2} \mu}{(\lambda - \mu)^{k-1}} \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(\lambda - \mu)^j}{j!} (i\tau)^j e^{-\lambda i\tau} \end{aligned} \quad (\text{A2.5})$$

(A2.5) を (A2.3) に代入して整理すると,

$$\begin{aligned}
 f_i(k) &= \frac{\lambda^{k-2} \mu}{(\lambda - \mu)^{k-1}} \left(e^{-\mu i \tau} \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(\lambda - \mu)^j}{j!} (i\tau)^j e^{-\lambda i \tau} \right) \quad (\text{A2.6}) \\
 &= \frac{1}{\lambda} g_{1k}(i\tau) \quad (\text{証明終})
 \end{aligned}$$

付 録 III

第 k フレーム ($k \neq 1$) を開始してから r 回目の測定時に、第 k フレームを実行中の確率 $P_k(r)$ は、

$$\begin{aligned}
 P_k(r) &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau (1 - G_{kk}(t' + (r-1)\tau)) dt' \\
 &= \frac{1}{\tau} \int_{(r-1)\tau}^{r\tau} (1 - G_{kk}(t)) dt \quad (\text{A3.1})
 \end{aligned}$$

そこで各測定時間における第 k フレーム実行者の延べ人数 $\tilde{M}_k$ 人とする、

$$\begin{aligned}
 \tilde{M}_k &= N \cdot \sum_{r=1}^m P_k(r) \\
 &= \frac{N}{\tau} \int_0^{m\tau} (1 - G_{kk}(t)) dt \\
 &= \frac{N}{\tau} \cdot t_k \quad (\text{A3.2})
 \end{aligned}$$

他方、

$$\tilde{M}_k = N \cdot \sum_{i=1}^m f_i(k) \quad (\text{A3.3})$$

$$\therefore t_k = \tau \cdot \sum_{i=1}^m f_i(k) \quad (\text{A3.4})$$

(証明終)