練り土のレオロジー特性 —Astburyらの周期的ねじり試験法の吟味

小林 種雄・鈴木 傑・河地 千尋・西山 哲司*

(名古屋工業大学,* 川崎製鉄(株))

Rheological Properties of Plastic Clay Body (An Examination on the Astbury's Cyclic Tortion Test Method)

By

Taneo KOBAYASHI, Suguru SUZUKI, Chihiro KAWACHI and Tetsuji NISHIYAMA*
(Nagoya Institute of Technology, Department of Ceramic Engineering, *Kawasaki Seitetsu Co. Ltd.)

In order to study the rheological properties of plastic clay body, cyclic torsion test method by Astbury was examined on a plastic mass for electrical insulators. Thin hollow cylindrical tubes, $10\phi\sim 20\phi\times 100$, were formed by extruding. One end of specimen was fixed, and the other free end was oscillated torsionally, while the rotating angle was changed in a sinusoidal way. By analyzing the hysteresis loops of the stress-strain curves, the following results were obtained. (1) By the sinusoidal torsional motion, S-S curve was constricted in a steady hysteresis loop, showing that the phenomenon of the "Memory" was lost. (2) The remanent strain depended markedly on the maximum strain (torsional strain amplitude). (3) The coercive force and the maximum stress much decreased on the increase of the moisture content. (4) The ratio of the coercive force to the maximum stress was constant regardless of experimental conditions. (5) The energy absorbed during one cycle was directly proportional to the maximum strain, and was reduced with increasing moisture content. (6) If the torsional strain amplitude and the frequency of sinusoidal oscillation were taken as the same condition, the ratio of energy lost during one cycle to the one for the perfectly plastic body was equal to the ratio of the coercive force to the maximum stress, which was constant, irrespective of experimental conditions. (7) The critical value of the strain energy, which determines the ratio of the number of the elastic elements to the that of viscous elements was not constant.

The writers, on the basis of the results, pointed out, (1) the plastic property should be added to the Astbury's model as one of the mechanical components, (2) the assumption that the elastic elements would be changed to the same number of the viscous elements due to the increase of strain energy, should be modified, (3) the term which gives the effect of moisture content on the behaviour of plastic clay body must be added in the fundamental rheological equation, (5) the model by Astbury should be reevaluated after determining more precisely the model parameters.

[Received July, 7, 1971]

1. 緒 言

練り土のレオロジー特性は多くの要因の複雑な相関に基づいている。したがってこの現象の解明はまだ十分に体系づけられていない。その可塑性は Wilson, Shaw, Bingham, Haines, Hasse や A.S.T.M などにより定義され¹⁾, それを支配する諸因子がいろいろの測定方法とともに論じられてきた^{2), 3)}。

練り土の可塑性を Stephenson³⁾ は練り土のチキソトピーで説明し, Norton⁴⁾ はねじり試験の結果から粘弾性現象に基づくものとし, 含水量を種々に変える時, 降

伏応力と最大変形の積の最大なものがもっともよい仕事性を与えると報告した。この積は“可塑性指数”と呼ばれ, 簡単な表示として現在でも作業上の目安としてかなり使用されている。しかし, この指数は応力の負荷速度やひずみ速度にかなり依存するので^{4), 14)}, 普遍的な定数と考えることはできない。そのほかいろいろの提案があつて, クリーブや応力緩和などの静的試験方法から可塑性の表示が試みられているが, どれも限られた範囲で実用に供しうる程度で, 物性値としてはいづれもほど遠いものである。

Macey⁵⁾ は応力-ひずみ曲線 (S-S 曲線) にヒステリシスループが現われることを見だし、粘土粒子相互がその表面をおおっている水膜によってすべる現象として説明した。

素木⁶⁾ は練り土のくり返しねじり試験を行ない S-S 曲線にヒステリシス・ループを生じる要因を追求した。さらに同氏⁷⁾ は練り土から成形した生素地から乾燥および焼成後に現われる欠陥が、練り土の塑性を合わせ考えた粘弾性的性質に基づくことを指摘した。またその粘弾性的挙動をスプリングとダッシュポットとの組み合わせによる力学的な 3 要素モデルにより、ほぼ説明できることを示し、そのモデルと実際の練り土の組織との関連を論じた。

E. Geuze と Tan Tjong-Kie⁸⁾ は練り土の中空円筒試験のねじり試験を行ない、練り土の流動特性を研究し、瞬間変形、遅延変形、流動変形を明確に区別して述べた。

村山と柴田^{9)~11)} は従来の機械的モデル、たとえばスプリングとダッシュポットの組み合わせによる 3 要素モデル等による結果を整理して、スライダーを付け加え、さらに粘性要素は Eyring 粘性に従うとして解析した結果を、土質力学の立場から土壌のレオロジー挙動に適用して、よい一致を得た。しかし定量的な検討は余りなされていない。

N.F. Astbury^{12), 13)} は中空の薄肉円筒形に成形した練り土について、周期的ねじり振動を加え、得られる S-S 曲線が収束したヒステリシス・ループを描くことを見いだした。このループの数学的な解析を行ない、さらに弾性的成分に基づく部分と粘性的成分に基づく部分とに分離し、力学的モデルを立てて理論と実験との一致を検証した。練り土の可塑的挙動には“記憶現象”を伴うので、実験結果の再現性をよくするために、その効果を除くことが望ましい。周期的振動はこの点ですぐれているし、また結果の数学的解析が可能な動的な性質を求めうる方法であるが、彼らの論文にはそのモデル常数や練り土のレオロジー的特性値が定量的に十分に確かめられてはいない。

そこで著者らは低圧碍子用坏土を用いて、さらに精密な解析を行ない、練り土の挙動をレオロジー的観点から説明する基礎を得る目的で、Astbury らの仮定を検討し、その修正すべき点を明らかにしつつ本研究をまとめたものである。

2. 理 論

薄肉中空円筒形の練り土に周期的ねじり振動を加えて得られる応力とひずみとの関係 S-S 曲線が定常的なヒステリシス・ループを形成するに至ってから、そのループの解析を行なった。中空円筒のねじりに関しては既に

材料力学で明らかにされているので¹⁸⁾、その基礎の上に Astbury らの機械的モデルを適用した。そのモデルの特徴は弾性要素と粘性要素との変換を仮定したもので、その仮定から導かれる経過と結果とについて、文末の注に概略を示した。

3. 実 験

3.1 試 料

実験に用いた練り土の配合組成は陶石 40、長石 25、蛙目粘土 18、木節粘土 17 であって、低圧碍子用坏土である。工場で調製したこの坏土をさらに真空土練機にかけ、50 mm ϕ の円筒状にまず押し出した。ついでこれをピストン式押し出し機を用いて、ピンを備えたノズルを通して押し出し、内径 10 mm ϕ 、外径 20 mm ϕ 、長さ 150 mm の薄肉中空円筒に成形した。

この試料の力学的特性を予備的に調査する目的で、ねじり試験を行なった。その装置は後に述べる周期的ねじり試験装置により、周期的ねじりを与える代りに、一方向に一定角度でねじ切るようにしたものである。ひずみ-応力の関係は図-2 に示すように通常的特性曲線を与えた。この例でも可塑性指数は一定値にならずに、ひずみ速度が増すと、最大応力も最大ひずみもともに増して、この指数はかなり増し、2 倍以上も変化する⁴⁾。

Fig. 2. Stress-Strain diagram for various rate of strain of torsional test at moisture content 22.6%.

3.2 実験装置

本研究に用いた実験装置は前に述べた中空円筒形の試料の一端を固定し、他方の自由端に周期的に大きさの変化するねじり振動を与え、それに伴って起こる内部応力の変化を検出することである。その原理は Astbury らの用いたのと同様であるが、試料は押し出し成形してから、全く別のねじり試験装置で試験を行ない、かつ測定の精度を高くするように、サイン振動の発生、トルクの検出に配慮を加えた。

図-3. 3 は正弦的に回転角の大きさを変化させるための単振動の発生装置である。円板 (14) (半径 R_{14}) の角速度を ω 、周期を T 、振動数を f とする。スライダー (12) の水平運動を図-3. 2 のねじり試験装置本体の

プーリー (10) (半径 R_{10}) に伝える. この時プーリー (10) の回転角を Ω とすると,

$$R_{10}\Omega = R_{14}\sin \omega t$$

であるから, $R_{14}/R_{10} = \Omega_0$ とおくと,

$$\Omega = \Omega_0 \sin \omega t$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

となる. すなわちプーリー (10) は回転振動を行ない, その回転角の大きさは正弦的に変動する. この運動を試料 (3) にそのまま伝える. 回転振動の振幅 Ω_0 はボルト (15) の円板 (14) 上の位置を変えて, R_{14} の値を変化させて調節した. 周期 T または周波数 f は歯車減速機の歯車の組み合わせを変えて調節した.

試料 (3) の下端 (2) に加えられる回転角 Ω の大きさは, 試料 (3) およびプーリー (10) と共軸のポテンシオメーター (9) により, それに加えた基準電圧の変化として検出し, X-Y 記録計の Y 軸の入力とした (図

Fig. 3.1 Block diagram of stress-strain measurement.

Fig. 3.2 Apparatus for stress-strain measurement.

Fig. 3.3 Sine function generator.

Fig. 3.4 Apparatus for measurement.

-3.1 参照).

図-3.2 で試験体 (3) の上端をチャック (1) を使ってピアノ線 (6) の下端に固定し, (3) の下端に外力を加えてねじると, 試験体のねじりひずみに対応する内部応力のため, その軸方向のモーメント M_z を生じる. これを試料 (3) の上端のチャック (1) に直結した 1.8 ~ 3.2 mm ϕ のピアノ線 (6) のねじれ角として検出した. ピアノ線はその上端は格納箱 (5) に固定したチャック (4) で留めてある. ピアノ線下端のねじれ角は差動変圧器を用いた回転角度測定器 (測定範囲 $\pm 5^\circ$, 精度 $\pm 1\%$) (8) により求めた. そのねじれ角とトルクとの関連は既知のトルクをプーリー (7) によってピアノ線に加え, その時のねじれ角を測って, ときどき検定した. 回転角度測定器の出力は増幅してから, X-Y 記録計の X 軸入力とした (図-3.1 参照).

装置の全容を写真で 図-3.4 に示してある.

今回の実験に用いた条件は (i) 振幅 ($=2\Omega_0$) として, $\pm 18^\circ$, $\pm 30^\circ$, $\pm 48^\circ$, $\pm 68^\circ$, (ii) 振動の周期 f として, 0.166 c/s, 0.0830 c/s, 0.0414 c/s, 0.0092 c/s, 0.0052 c/s, (iii) 練り土の含水量 wt (湿量基準) 20.7%, 21.9%, 22.6%, 23.1%, 24.0%, 24.5% である.

4. 結果と考察

Astbury らの理論に基いた練り土のいろいろなレオロジー的な特性値を周期的振動の実験の結果から算出した値と比較検討し, また合わせて Astbury らが述べている可塑性の指標についても論及する.

4.1 パラメーターについての検討

4.1.1 残留ひずみ (ϵ_r) $\epsilon = r_2\Omega/l$ であるから本実

Fig. 4. Effect of strain amplitude on residual strain at moisture content 24.0%.

験では $\varepsilon=0.1\Omega$ である。式 (9) から $\varepsilon_r=N^2\varepsilon_0\omega g_d C_0(1-C_0)/g_s$ である。図-4は練り土の含水量が一定の時、ねじり振動の周期をパラメーターとして、残留ひずみ ε_r とひずみ振幅 ε_0 との関係を実験的に求めたものである。この図によると ε_r と ε_0 は比例し、その直線の勾配も大きく、依存性が高い。しかしその直線が正しくは原点を通らずに、 ε_0 のかなり小さい値のところで ε_r は0になっている。このことはその ε_0 値以下では弾性変形のみしか実際には起こらないことを意味し、Geuze ら⁸⁾ の第1降伏点の存在を示唆するものであろう。また ε_r が0になる時の ε_r の値は含水量の差で余りちがわない。すなわち塑性変形が始まる点におけるひずみは含水量の影響を受けない。さらに練り土の含水量を一定にするとなねじり振動の周期 T が小さいほど、残留ひずみ ε_r は小さく、弾性的挙動に近づき、また周期 T を一定にして含水量 w を 20.7~24.0% の範囲で変化しても、 ε_r は余り変わらない。

ε_r と周期 T との関係を図-5, 6に示した。これらは負の勾配の直線になり、そのとき含水量 w 一定では振幅 ε_0 の小さいほど依存性は高く、振幅 ε_0 一定では残留ひずみ ε_r は余り角速度 ω に依存しないが、詳細にみると含水量が高いほど依存性は少し高い。当然ながら含水量の高い方が残留ひずみは小さい。 $\varepsilon_r-\omega$ は実験結果でもこのように比例関係はあるが、その関係を示す直線がやはり原点を通らず、かつ負の勾配をもつことは Astbury らの力学モデルに塑性を考えていないためである。本来、練り土はビンガム体に近い挙動を示すことが認められているから、試験体にねじりを与えると、その中に $M_z-2\pi\sigma_y(r_2^3-r_1^3)/3$ のねじりモーメントで加速された流れを生じ²⁰⁾、それに対応して減少した内部応力

Fig. 5. Effect of strain rate on residual strain at moisture content 24.0%.

Fig. 6. Effect of strain rate on residual strain at $\varepsilon_0=0.0524$ (%).

の減少のため、残留ひずみ ε_r は小さくなるはずである。すなわち Ω が増すほど ε_r の大きさは小さく、図-5の結果になるわけである。しかし、この事実は今回の力学モデルから導くことはできない。

図-6 から見ると残留ひずみにおよぼす含水量の影響はないといってよいが、ないしはかなり小さい。先の ε_r を与える式で含水量の効果は $g_d C_0(1-C_0)/g_s$ にあらわれてくる。

後に述べるようにこの各因子の変化は小さいので、 ε_r に対する含水量の影響は小さい。ただ含水量 w の項が今回の力学モデルに明らかに表現されていないのは少なからざる欠点である。

さて $\varepsilon_r/\varepsilon_0$ ¹⁵⁾ は“springiness”と呼ばれ、この比の値が小さいほど外力に対する内部応力の値が0になったときのひずみの回復が完全に近くなる。そこでその逆数は可塑性の指標の1つとすることができるといわれている。Astbury らも $\varepsilon_r/\varepsilon_0$ の値は ε_0, ω, w によって変化しないとしている。事実図-7に示したように実験結果から算出した値も比較的一定に近い。ただ ε_r を与える式の形からこの値は ω および w に依存するので、 w が 20~22% のようにやや小さい時 $\varepsilon_r/\varepsilon_0$ は一定であるが、 w がより高いと明らかに減少を示している。したがって可塑性の指標として十分とはいえない。

Fig. 7. Effect of strain rate on $\varepsilon_r/\varepsilon_0$ at $\varepsilon_0=0.0524$ (%).

4.1.2 最大応力 ($\sigma_{\pi/2}$) と保歪力 (σ_c) ならびに降伏応力 (σ_y) 最大ひずみ点のすぐ近くにあらわれる内部応力の最大値と保歪力とは次のようになる。

式 (22) から $\sigma=2r_2M_z/\pi(r_2^4-r_1^4)=0.6793M_z$ こ

の関係と式 (7), (8) とから

$$\sigma_{\pi/2} = \frac{10 g_s \varepsilon_0}{N C_0 (1 - \lambda)}$$

$$\sigma_c = 10 \omega N g_d \varepsilon_0 (1 - C_0)$$

$\sigma_{\pi/2}$, σ_c ともに

ねじりのひずみ振幅 ε_0 はもちろん実験結果の図-8によると、振動の周期にもほとんど依存せず、強く含水量に影響されている。それらは含水量を増すと実験の範囲内 ($w = 20.7 \sim 24.5\%$) で直線的に減少し、ことに $\sigma_{\pi/2}$ は大きく減少している。これは粘土粒子間で水分が粒子面に水膜として、または自由水として、粒子のすき間にあって粘土粒子を互いに結合している

ため^{1), 16), 21)}, 含水量が σ の値に大きく効いてくるからである。これは経験的にも定性的にも従来よく知られている事実である。

ここで $\sigma_c/\sigma_{\pi/2}$ の比の値を考えるとそれは $N^2 \cdot (g_d/g_s) \cdot C_0(1 - C_0)(1 - \lambda)$ である。実験の結果図-9, 10 が示すようにこの値はねじり振動の周期、ひずみ振幅、練り土の含水量への依存性は比較的小さく、Astbury らの結論にほぼ一致する。上式からも比の値は T や ε_0 には無関係のはずで、また含水量については図-8 に示した実験結果から無関係になる。そうすると g_s と g_d は含水量とともに変化するので、その比 g_d/g_s がほぼ一定であ

Fig. 9. Effect of strain amplitude on $\sigma_c/\sigma_{\pi/2}$ at $\omega = 0.521$ (rad/sec).

Fig. 8. Effect of moisture content on maximum stress and coercive stress at $\varepsilon_0 = 0.0524$ (—).

ることになる。しかしやはり今回のモデルでは含水量の効果を明確に記述できないのが欠点である。 $\sigma_c/\sigma_{\pi/2}$ の値は従来いわれているように練り土の特性値として一応認められるが、なお数種の試料について検討する必要がある。

式 (25) から算出した降伏応力 σ_y の値もまた角速度 ω や振幅 ε_0 で余り変わらないが、含水量に大きく依存する。それを図-8 にあわせ示してある。ただしこの降伏応力は周期的振動にさいし与えられる値であり、他の方法で測定した値と全く一致するわけではないし、その意味で周期的振動法は作業性を判定するのに妥当な方法とはなり得ようが、ひずみと破壊との関係を論じるさいに、設計基準を与える数値としては適当ではなからう。

Fig. 10. Effect of strain rate on $\sigma_c/\sigma_{\pi/2}$ at $w = 24.0$ (%).

4.1.3 吸収エネルギー (W) ねじり振動で粘性要素に吸収されるエネルギー (W) は 1 周期あたり、ヒステリシスループの囲む面積に等しい。

式 (8), (11) から

$$W = 10 \pi (M_z)_c \varepsilon_0 = 100 \pi N \omega \varepsilon_0^2 g_d (1 - C_0)$$

吸収エネルギー (W) は $(M_z)_c$ と ε_0 との関数であるが、前の項で述べたように一定の含水量で $(M_z)_c$ はほぼ一定であるから、 W はほとんど ε_0 のみの関数になると考えられる。

実験による図-11, 12 は W と ε_0 とは原点を通る直線関係にあり、ひずみ振幅 ε_0 に W は強く依存している。また振動の周期 T が小さいほど吸収エネルギーはわずかに小さい。

図-12 では練り土の含水量が大きいほど吸収エネルギーは小さく、その依存度も大きい。上式で w により C_0 は余り変わらないので (後出)、含水量が高くなってヒステリシスループの幅が広くなり、粘性要素の数が次第に支配的になっても、ただ粘性要素の総数が増したことを意味するのでなく、粘性率 g_d がかなり減少するものと考えられる。この点について論議もあるが^{9), 10), 17)}, さらに検討を別に重ねる予定である。ただ、ねじりひずみが一定でもそれに対する応力は含水量が高い方が小さいので、吸収エネルギーは小さいのは当然である (図-12)。

式 (12) により $W/W_0 = (M_z)_c / (M_z)_{\theta = \pi/2}$ の関係が成

立しているが、これは 図-13 の実験の結果でもよく支持されている。

4.1.4 臨界エネルギー (U_c^*)

式 (16), (20) から

$$U_c = \frac{50 \varepsilon_0^2}{K_1 \lambda} = \frac{50 \varepsilon_0^2}{K_1 - K_3}$$

U_c^* は単位体積あたりの臨界エネルギー U_c で、実

Fig. 11. Effect of strain amplitude on energy absorbed in a cycle at moisture content 21.9%.

Fig. 12. Effect of strain amplitude on energy absorbed in a cycle at $\omega = 0.521$ (rad/sec).

験結果を U_c とねじりの ひずみ振幅 ε_0 について 図-14, 15 に示した. 両者の間に直線関係があり, 振動の周期の影響は小さいが, 含水量には依存性が高く, それ

Fig. 13. Relation between W/W_0 and $\sigma_e/\sigma_{e/2}$ at moisture content 24.0%.

Fig. 14. Relation between critical strain energy and strain amplitude at moisture content 20.7%.

Fig. 15. Relation between critical strain energy and strain amplitude at $\omega = 0.521$ (rad/sec).

が高いほど U_c の値は小さくなる。すなわち弾性要素の粘性要素への変化が容易になることを意味する。上式と実験の結果とを比較すると (K_1-K_3) は ϵ_0 に比例するはずであるが、それは不確実である。

次に上記以外のパラメーターの値を表-1~3に掲げた。

Table 1. Effect of rate of strain and strain amplitude on hysteresis model parameter at moisture content 24.0%.

ω (rad/sec)	ϵ_0 (—)	λ (—)	C_0 (—)	K_1 $\times 10^{-6}$ (dyne/cm ²)	K_2 $\times 10^{-6}$ (dyne/cm ²)	K_3 $\times 10^{-6}$ (dyne/cm ²)	U_c^* $\times 10^{-3}$ (erg/cm ³)
1.043	0.0314	0.41	0.63	0.89	0.31	1.51	0.68
	0.0524	0.47	0.73	0.48	0.19	0.90	0.88
	0.0838	0.51	0.76	0.29	0.13	0.59	1.24
	0.1178	0.52	0.82	0.23	0.13	0.49	1.06
0.521	0.0314	0.40	0.69	0.90	0.36	1.51	0.69
	0.0524	0.50	0.77	0.50	0.25	1.00	0.86
	0.0838	0.51	0.83	0.30	0.15	0.62	1.30
	0.1178	0.55	0.89	0.21	0.12	0.47	1.64
0.260	0.0314	0.40	0.75	1.04	0.46	1.72	0.81
	0.0524	0.47	0.80	0.51	0.27	0.96	0.93
	0.0838	0.57	0.86	0.27	0.17	0.62	1.04
	0.1178	0.52	0.81	0.23	0.15	0.49	1.94
0.058	0.0314	0.36	0.63	0.99	0.51	1.55	0.84
	0.0524	0.45	0.79	0.56	0.31	1.00	1.07
	0.0838	0.47	0.74	0.36	0.22	0.68	1.69
	0.1178	0.43	0.69	0.30	0.22	0.53	3.05
0.033	0.0314	0.41	0.70	0.96	0.49	1.62	0.72
	0.0524	0.48	0.77	0.59	0.34	1.14	1.04
	0.0838	0.45	0.76	0.35	0.22	0.65	1.72
	0.1178	0.54	0.88	0.25	0.17	0.54	2.04

Table 2. Effect of moisture content and strain amplitude on hysteresis model at constant rate of strain ($\omega=0.521$ (rad/sec)).

moisture content wt (%)	ϵ_0 (—)	λ (—)	C_0 (—)	K_1 $\times 10^{-6}$ (dyne/cm ²)	K_2 $\times 10^{-6}$ (dyne/cm ²)	K_3 $\times 10^{-6}$ (dyne/cm ²)	U_c^* $\times 10^{-3}$ (erg/cm ³)
20.7	0.0314	0.40	0.67	3.84	2.38	6.34	2.98
	0.0524	0.49	0.82	2.00	1.32	3.88	3.53
	0.0838	0.52	0.94	1.05	0.71	2.17	4.48
	0.1178	0.56	0.89	0.76	0.56	1.73	5.88
21.9	0.0314	0.32	0.72	3.84	2.31	5.68	3.69
	0.0524	0.45	0.80	1.72	1.07	3.12	3.31
	0.0838	0.50	0.90	0.96	0.65	1.92	4.26
	0.1178	0.57	0.92	0.66	0.46	1.51	5.01
22.6	0.0314	0.42	0.69	1.89	1.12	3.25	1.38
	0.0524	0.47	0.80	1.01	0.64	1.92	1.84
	0.0838	0.52	0.92	0.54	0.36	1.12	2.27
	0.1178	0.49	0.87	0.42	0.31	0.84	3.74
23.1	0.0314	0.44	0.69	1.75	0.93	3.10	1.24
	0.0524	0.46	0.74	0.95	0.53	1.76	1.76
	0.0838	0.52	0.89	0.51	0.29	1.08	2.16
	0.1178	0.53	0.87	0.40	0.27	0.85	3.27
23.5	0.0314	0.41	0.67	1.40	0.77	2.38	1.04
	0.0524	0.52	0.82	0.65	0.37	1.35	1.07
	0.0838	0.55	0.95	0.36	0.23	0.81	1.44
	0.1178	0.54	0.96	0.27	0.20	0.59	2.17
24.0	0.0314	0.40	0.69	0.90	0.36	0.51	0.69
	0.0524	0.50	0.77	0.50	0.25	1.00	0.84
	0.0838	0.51	0.83	0.30	0.15	0.60	1.30
	0.1178	0.55	0.89	0.21	0.12	0.47	1.60

K_1, K_3 は今回の基礎式には具体的に示されていない練り土の含有水分の指標となっているものと見なせる。式 (13), (14) 中の弾性率 g_s , 粘性率 g_d は一定値ではなく、含水量が増すと減少するものとしたので、 K_1 も K_2 も同様に減少する。そこでこれらは練り土のかたさに関連しているものであることを前に述べた。含水量、振動の周期が一定ならば、ねじりのひずみ振幅 ϵ_0 が増すと K_1, K_2 とともに減少する。

C_0 の算出は $(\sin \theta)_{\max}$ をヒステリシス曲線上で作図的に求めて、式 (19) で計算するさいに、 $(\sin \theta)_{\max}$ は十分精密には決定できない。そこで C_0 の値も少し信頼度が落ちざるをえないことになる。 C_0 は仮定のように含水量によっては実際上変わらないと認められる。またねじり振動の周期にも余り依存しないが、ひずみ振幅を変えるとやや変化する。 C_0 は 0.7~0.8 で碍子用坏土を試料とした関係上やや高くなっている。

λ は式 (20) ではひずみ振幅の自乗によるものであるが、振幅の増加につれ、 U_c^* の増大と K_1 の減少とで相殺し、結局 λ は実際上余り変わらない。また練り土の含水量、振動の周期にも無関係であるから、Astbury らは可塑性指標として λ を採用しようと述べているが¹³⁾、本実験でもほぼ 0.5 となり、やはり一定値と見なせるかもしれない。

4.2 ヒステリシス・ループについての検討

以上に述べてきたことを総括して、次に実測した S-S ヒステリシス・ループと計算値とを比較検討した結果を述べる。用いた練り土試料は含水量が 23.4% のもので、ねじり振動の周期は 12 秒、ひずみ振幅は 0.0524 である。実験から $Q_0=7.1, Q_r=4.3, (M_z)_{\theta=\pi/2}=5.0, (M_z)_c$

Fig. 16. Stress-strain hysteresis loops, calculated and observed.

Table 3. Effect of moisture content and rate of strain on hysteresis model parameter at strain amplitude $\epsilon_0=0.0524(-)$.

moisture content wt (%)	ω (rad/sec)	λ (-)	C_0 (-)	K_1 ($\times 10^{-6}$ dyne/cm ²)	K_2 ($\times 10^{-6}$ dyne/cm ²)	K_3 ($\times 10^{-6}$ dyne/cm ²)	U_c^* ($\times 10^{-3}$ erg/cm ²)
20.7	1.043	0.52	0.80	1.76	1.16	3.68	2.91
	0.521	0.49	0.82	2.00	1.32	3.88	3.53
	0.260	0.46	0.81	1.76	1.16	3.27	3.29
	0.058	0.48	0.78	1.80	1.23	3.43	3.25
	0.033	0.54	0.80	1.88	1.34	3.64	3.01
21.9	1.043	0.49	0.84	1.59	0.96	3.05	2.81
	0.521	0.45	0.80	1.72	1.07	3.12	3.31
	0.260	0.47	0.74	2.30	1.48	4.31	4.23
	0.058	0.49	0.76	1.65	1.09	3.25	2.88
	0.033	0.46	0.72	1.90	1.22	3.50	3.58
22.6	1.043	0.50	0.78	0.97	0.58	1.95	1.67
	0.521	0.47	0.80	1.01	0.64	1.92	1.84
	0.260	0.43	0.76	0.95	0.61	1.68	1.88
	0.058	0.44	0.80	1.17	0.77	2.07	2.30
	0.033	0.49	0.76	1.24	0.84	2.40	2.19
23.1	1.043	0.49	0.76	0.85	0.44	1.66	1.49
	0.521	0.46	0.74	0.95	0.53	1.76	1.76
	0.260	0.50	0.75	0.83	0.48	1.64	1.43
	0.058	0.47	0.77	0.95	0.60	1.78	1.73
	0.033	0.44	0.69	1.06	0.71	1.89	2.08
23.5	1.043	0.46	0.83	0.67	0.41	1.24	1.24
	0.521	0.52	0.82	0.65	0.37	1.35	1.07
	0.260	0.46	0.80	0.85	0.52	1.57	1.57
	0.058	0.48	0.72	0.80	0.51	1.53	1.45
	0.033	0.47	0.82	0.82	0.54	1.53	1.51
24.0	1.043	0.47	0.73	0.48	0.19	0.90	0.88
	0.521	0.50	0.77	0.50	0.25	1.00	0.86
	0.260	0.47	0.80	0.51	0.26	0.96	0.93
	0.058	0.45	0.79	0.56	0.31	1.00	1.07
	0.033	0.48	0.77	0.59	0.34	1.14	1.04

Fig. 17. Calculated and observed functions.

$=1.4$, $(\sin \theta)_{\max}=0.704$, $K_1=0.347$, $K_2=0.201$, $K_3=0.704$, $\lambda=0.507$ を得た (図-16, 17). これらの値を式 (17) へ代入すると,

$$M_z = \frac{2.46 \sin \theta}{1 - 0.507 \sin^2 \theta} + 1.49(1 + 1.95 \sin^2 \theta) \cos \theta$$

図-16 で実線は実験で求めたヒステリシス・ループを, 点線は上式による計算値を示している. 両者の対応はかなりよく, ほぼ満足できるものである. しかしひずみが大きい $(\sin \theta)_{\max}$ の付近から最大ひずみに至る範囲で, 計算値は実測による S—S 曲線の外側へわずかながらずれている. この原因を解析するため S—S 曲線から同位相成分と異位相成分とを分離して 図-17 に示した. この図によると同位相成分については実験の結果と計算

値とが全くよく一致しているが, 異位相成分は計算値が実験値よりも, ことに閉曲線の幅の広い所で大きくなっている. このことは Astbury らの力学モデルの仮定で弾性要素が破壊する時, それが粘性要素に変わるさいに両要素が (1:1) 対応ではなくて, それ以下の割合で変わる可能性を示唆しているものと考えられる. このことについて Astbury らが応力の同位相成分と異位相成分とをそれぞれが弾性要素の存在比の逆数と粘性要素の存在比とに比例することから, 両要素の数を相対的に求め, その総数を周期的振動の期間中一定と見なして, これら両要素の数の間に直線関係が成立することを証明している¹³⁾. しかし彼らの実験結果は両要素の相対数をあらわした直線が両軸と 45° で交差するのではなく, むしろ (1:1) 対応ではなしに (1:0.6~1.8) ないしはそれ以上の対応関係を示していると考えられる.

5. 総 括

練り土を薄肉中空円筒に成形して, その自由端に単振動的にねじり角の変化するくり返しねじり振動を与え, 試料に加えられたひずみとそれに伴って発生する内部応力との関係を求めた. 試作した測定装置はきわめて良好な正確さで作動した.

練り土は周期的ねじり振動で容易に“記憶”を消失して, S—S 曲線は完全に収束したヒステリシス・ループを描いた.

最大応力と保歪力との比は実験の条件や練り土の含水量によらず, 練り土の特性値とすることができよう. またその比 $\sigma_c/\sigma_{\pi/2}$ の値はよく W/W_0 の値に一致した.

さらに新しく次の結論を得た.

1) 残留ひずみの大きさは最大ひずみの大きさに比例し, その依存性も大きい. ねじり振動の周期が小さいほど直線的に小さくなるが, 練り土の含水量の影響は比較的小さい.

2) ϵ_r/ϵ_0 の比の値は一定であると見なせないこともないが, 練り土の特性値として, その可塑性を表示するには不十分である.

3) 最大応力と保歪力とは練り土の含水量に強く依存し, それが高くなると直線的に減少する. しかし最大ひずみやねじり振動の周期には影響されない.

4) ねじり振動の一周周期に吸収されるエネルギーは最大ひずみに正しく比例する. 含水量が増すとそれは小さくなり, 振動の周期も少し影響を与える.

5) 単位体積当たりの臨界ひずみエネルギーは練り土に固有の常数にならず, 最大ひずみに比例し, 含水量が

多いほど小さく、弾性要素の粘性要素への変化が容易になることを示す。振動の周期にはほとんど無関係である。また Astbury らのモデルの修正点について次の結果を得た。

1) モデルには練り土の塑性を考慮していないため、ことに残留ひずみ、内部応力に関して実験値と理論値とに小さいずれを生じた。

2) 内部応力の増加で弾性要素が粘性要素へ変わるさいに (1:1) 対応で変わるとする仮定は修正を要する。この対応は実験上試料によって種々に変わる。

3) 練り土中の水分の効果を直接表示する項をモデルを記述する式中に導入すべきである。

4) モデルを修正して各パラメーターを具体的な数値でさらに検討する必要がある。

謝辞 本研究を遂行するにさいし、本学窯業工学科学生川本孝次、森川茂幸両君がその実験について多大の努力をつくされたこと、ならびに朝日碍子工業(株)、旭碍子工業技術奨励会の御援助に負うこと多大であることを記して感謝の意を表わします。

Notation:

$C(-)$ ratio of number of elastic elements to that of total elements

$C_0(-) = (C)_{t=0}$ C before cyclic testing

$f(1/\text{sec})$ frequency of simple harmonic motion = frequency of cyclic torsional motion

$G(\text{dyne/cm}^2)$ torsional rigidity of soft mud sample

$g_s(\text{dyne/cm}^2)$ torsional rigidity of each elastic element

$g_d(\text{dyne/cm}^2)$ viscosity of each viscous element

$K_1(\text{dyne/cm}^2) = (M_2)_c/\Omega_r$

$K_2(\text{dyne/cm}^2) = (M_2)_c/\Omega_0$

$K_3(\text{dyne/cm}^2) = (M_2)_{\theta=\pi/2}/\Omega_0$

$l(\text{cm})$ axial length of hollow cylindrical tube

$M_2(\text{dyne cm})$ torsional moment about cylindrical axis

$(M_2)_{\theta=\pi/2}(\text{dyne cm})$ M_2 at $\theta=\pi/2$

$(M_2)_c(\text{dyne cm})$ M_2 at $\theta=0$

$N(-)$ number of total elements in mechanical model

$r_1(\text{cm})$ internal radius of hollow cylindrical tube

$r_2(\text{cm})$ outer radius of hollow cylindrical tube

$T(\text{sec})$ period of single harmonic motion

$t(\text{sec})$ any time

$U_c(\text{erg})$ critical strain energy

$U_c^*(\text{erg/cm}^3)$ critical strain energy in unit volume

$W(\text{erg/cm}^3)$ energy absorbed by sample during one cycle

$W_0(\text{erg/cm}^3)$ energy absorbed by ideal plastic body during one cycle

$\text{wt}(\%)$ moisture content of soft mud sample (wet basis)

$\alpha(1/\text{cm}^3) = g_d/2 NC_0 U_c$

$\beta(\text{rad/cm}) = \Omega/l$ tortional angle

$\varepsilon(-)$ tortional strain on outer surface of hollow cylindrical sample at time t

$\varepsilon_0(-)$ maximum tortional strain

$\varepsilon_r(-)$ remanent strain

$\theta(\text{radian}) = \omega t$ angle of simple harmonic motion at time t

$\lambda(-) = g_s \Omega_0^2/2 NC_0 U_c$

$\sigma(\text{dyne/cm}^2)$ internal stress induced by strain ε at time t

$\sigma_0(\text{dyne/cm}^2)$ maximum internal stress induced by maximum strain ε_0 .

$\sigma_{\pi/2}(\text{dyne/cm}^2)$ σ at $\theta=\pi/2$

$\sigma_c(\text{dyne/cm}^2)$ σ at $\theta=0$

$\sigma_y(\text{dyne/cm}^2)$ yield stress

$\Omega(\text{radian})$ rotational angle of free end of cylindrical tube

$\Omega_0(\text{radian})$ maximum rotational angle

$\Omega_r(\text{radian})$ Ω at zero stress

$\Omega_y(\text{radian})$ Ω at yield stress

$\omega(\text{radian/sec})$ angular velocity of single harmonic motion

文 献

- 1) 山内俊吉編, “窯業の研究 II” 技報堂 (1961), 素木洋一 “粘土-水系のレオロジー” pp. 228-45.
素木洋一, 窯協, **69** [2], C 64-72 (1961); *ibid* **69** [3] C 93-101 (1961).
- 2) 窯協編, “窯業工学ハンドブック” 技報堂 (1952), pp. 72-78.
素木洋一, 窯協, **69** [4] C 136-44 (1961).
- 3) H.H. Stephenson, *J. Am. Ceram. Soc.* **10**, 924 (1927).
- 4) F.H. Norton, *J. Am. Ceram. Soc.* **21**, 33 (1938).
- 5) H.H. Macey, *Trans. Brit. Ceram. Soc.* **47**, 259-67 (1948).
- 6) 素木洋一, 窯協, **63**, 319-24 (1955).
- 7) 素木洋一, 窯協, **63**, 421-29 (1955).
- 8) E.G.W.A. Geuze, Tan Tjong-Kie, *Proceedings of the 2nd International Congress on Rheology* pp. 247-59 (26-July 1953).
- 9) 村山朔郎, 柴田 徹, 土木学会論文集, **40**, 1-31 (1956).
- 10) 村山朔郎, 材料, **12**, 72-78 (1963).
- 11) 村山朔郎, 材料, **14**, 282-88 (1965).
- 12) N.F. Astbury, *Trans. Brit. Ceram. Soc.* **62**, 1-18 (1963).
- 13) N.F. Astbury, F. Moore and J.A. Lockett, *Trans. Brit. Ceram. Soc.* **65**, 435-62 (1966).
- 14) Th. Naase, *Ber. Deut. Keram. Ges.* **34**, 27 (1957).
- 15) 中川鶴太郎, 神戸博太郎, “レオロジー”, みすず書房 (1970).
- 16) 若林嘉一郎, 粉体工学, **6** [11] 53-62 (1969).
- 17) 河上房義, 小川正二, 土木学会論文集, **50**, 8 (1966).
- 18) 鶴戸口英善, “材料力学”, 裳華房 (1967). p. 98.
- 19) 素木洋一, 窯協, **63**, 233-43 (1955).
- 20) Markus Reiner, “Deformation, Strain and Flow”, London H.K. Lewis & Co. Ltd. (1969), pp. 94-96.
- 21) E.C. Bloor, *Trans. Brit. Ceram. Soc.* 423-81 (1957). (7/7/1971 受付)

(注) S-S とヒステリシスループの解析法^{12), 13)}

薄肉中空円筒形の練り土の一端を固定し、他端に周期的ねじりによるひずみを加える。任意の時刻 t におけるひずみを ε とし、 ω を周期振動(単振動)を与える角速度(3.2 実験装置の項参照)とし、振動数を f とすると、これは周期 T の逆数である。

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t = \varepsilon_0 \sin \theta \dots \dots \dots (1)$$

ここで ε_0 はひずみ ε の最大値であり、また $\theta = \omega t$ といいた。

練り土の中に生ずる応力とひずみとの関係を求めるとヒステリシス現象を示す S 字形の閉曲線が得られ、この曲線はくり返しを重ねると、次第に収束して十数サイクル以内で定常的で安定な閉曲線—ヒステリシス・ループ—を描くに至る¹²⁾。このような収束への過程が見られるのは Astbury らによると、試料がそ

れまでに受けた履歴の記憶現象によるものである。それがねじり振動のくり返しにより次第に消失し、ついに試料本来の特性を示すに至るものと述べている¹²⁾。

完全塑性体、粘性体、粘弾性体の S-S 曲線はヒステリシス・ループを描き、応力とひずみとの位相がずれていることを示す。また練り土のそれは S 字形となることが知られている。

練り土のレオロジー的特性を論じるのに Astbury らは有限個の弾性要素が直列に連なり、これと並列にやはり有限個の粘性要素を配列したモデルを考えた^{12), 13)}。弾性要素はフック弾性にしたいが、その弾性率を g_s (一定) とし、粘性要素はニュートン粘性を示し、その粘性率は g_d (一定) とする。この系に偶力を加える時、それによって練り土の中に発生するねじりモーメントを M_z とすると、弾性要素はそれを全くはささえきれない。そしてある固有の限界ひずみエネルギー U_c なる値以上の外力を受ければ、弾性要素はその存在割合に比例した数だけ破壊し、(1:1) 対応で粘性要素に変わると仮定している。この系に周期的ねじり振動を次の式にしたがって加える。式 (1) でひずみをねじりの回転角 Ω に取り、その最大値を Ω_0 とすると、

$$\Omega = \Omega_0 \sin \omega t = \Omega_0 \sin \theta \quad \dots\dots\dots (2)$$

力の平衡から次の関係が導きだされる。

$$\frac{M_z}{\Omega_0} = \frac{g_s \sin \theta}{NC_0(1-\lambda \sin^2 \theta)} + Ng_d \{1 - C_0(1-\lambda \sin^2 \theta)\} \omega \cos \theta \quad \dots\dots\dots (3)$$

ただし

$$\lambda = \alpha \Omega_0^2 = \frac{g_s \Omega_0^2}{2 NC_0 U_c} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\alpha = \frac{g_s}{2 NC_0 U_c} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$C = C_0 \left(1 - \frac{g_s \Omega_0^2}{2 NC_0 U_c}\right) \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで N は力学モデル中の全要素の数であり、 C はその中の弾性要素の存在割合である。 C_0 は最初 ($t=0$, $\Omega=0$) の時の C の値である。

また式 (3) を誘導するさいに g_s , U_c はひずみ ε の変化に無関係であるとしている。しかし既に述べたようにこの仮定は実験結果に矛盾を生じるので修正を要する。

実験的に得られる S-S 曲線を Astbury ら¹²⁾ にしたがって作図的に解析し、試料に加えた偶力により発生したねじりモーメント M_z に基づく弾性成分の変形分と粘性成分の変形分とを分離することができる。それらはまた理論的に次の式で与えられる。

式 (3) で $\theta=\pi/2$ の時、 Ω は式 (2) からその最大値 Ω_0 をとり、また M_z の値を $(M_z)_{\theta=\pi/2}$ と書くと、式 (3), (4) から

$$(M_z)_{\theta=\pi/2} = \frac{g_s \Omega_0}{NC_0(1-\lambda)} \quad \dots\dots\dots (7)$$

一方 $\theta=0$ では $\Omega=0$ であり、その M_z の値 $(M_z)_{\theta=0}$ は保歪力 (coercive force) に相当するので $(M_z)_c$ と記すと、

$$(M_z)_{\theta=0} = (M_z)_c = \omega Ng_d \Omega_0 (1-C_0) \quad \dots\dots\dots (8)$$

さらに $M_z=0$ の時、得られる Ω の値、 Ω_r は残留ひずみに対応する回転角で式 (3) から計算できる。

$$(\Omega)_{M_z=0} = \Omega_r \approx N^2 \Omega_0 \omega \frac{g_d C_0 (1-C_0)}{g_s} \quad \dots\dots\dots (9)$$

周期的ねじり振動の一周期中に練り土に吸収されるエネルギーは定常状態では、ヒステリシス閉曲線の面積に相当し、

$\int M_z d\Omega$ で求められる。その値を W とすれば、

$$W = \pi N \omega \Omega_0^2 g_d \left\{1 - C_0 \left(1 - \frac{\lambda}{4}\right)\right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

後に述べるように $1 > \lambda/4$ であって、式 (8) を上式へ代入すると、

$$W = \pi (M_z)_c \Omega_0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

図-1 でヒステリシス・ループに外接する長方形の面積を W_0 とすると、これは完全塑性体における吸収エネルギーに相当する。その値は図から、

$$W_0 = 4 \Omega_0 (M_z)_{\theta=\pi/2} \quad \dots\dots\dots (12)$$

であり、次の式を導くことができる。

$$\frac{W}{W_0} \approx \frac{(M_z)_c}{(M_z)_{\theta=\pi/2}} \quad \dots\dots\dots (12)$$

Fig. 1. Typical steady-state hysteresis loop and rectangular loop for ideal plastic material.

次に K_1 , K_2 , K_3 を次の式のように定義して、式 (7), (8), (9) を代入すると、

$$K_1 = \frac{(M_z)_c}{\Omega_r} = \frac{g_s}{NC_0} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$K_2 = \frac{(M_z)_c}{\Omega_0} = \omega Ng_d (1-C_0) \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$K_3 = \frac{(M_z)_{\theta=\pi/2}}{\Omega_0} = \frac{g_s}{NC_0(1-\lambda)} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで K はおのおの (力のモーメント)/(変位) の形であるから、一種のコンプライアンスとみなすことができる。かつ K_1 と K_3 とは同位相のコンプライアンスで、今回の力学モデルの弾性的特性による係数であり、また K_2 は異位相のコンプライアンスで、粘性的特性による係数である。

式 (13), (15) から

$$\lambda = \frac{K_1 - K_3}{K_1} \quad \dots\dots\dots (16)$$

式 (13), (14) を式 (3) へ代入して

$$M_z = \frac{K_1 \Omega_0 \sin \theta}{1 - \lambda \sin^2 \theta} + K_2 \Omega_0 \left(1 + \frac{C_0}{1 - C_0} \lambda \sin^2 \theta\right) \cos \theta \quad \dots\dots\dots (17)$$

この式は弾性要素と粘性要素とからなる Astbury らの力学モデルにおいてねじりモーメントと変位との関係を与える式である。

式 (17) で右辺の第 1 項が 同位相成分を表わしていて、原点におけるその勾配は、

$$\left\{ \frac{dM_z}{d\theta} \right\}_{\theta=0} = K_1 \Omega_0 \quad \dots\dots\dots (18)$$

また式 (17) の右辺の第 2 項である異相成分が極大値を取る時の条件から、

$$\frac{C_0 \lambda}{1 - C_0} = \frac{1}{2 - 3 \{(\sin \theta)_{\max}\}^2} \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここで $(\sin \theta)_{\max}$ は異相成分が極大値を取る時の $\sin \theta$ の値である。 $(\sin \theta)_{\max}$ をヒステリシス・ループから実験的に求め、上式に代入すると C_0 が算出できる。

式 (4), (13) から、

$$\lambda = \frac{g_s \Omega_0^2}{2 N C_0 U_c} = \frac{K_1}{2} \frac{\Omega_0^2}{U_c} \quad \dots\dots\dots (20)$$

この式から U_c を求める。

もし実際の試験片が長さ l 、内半径 r_1 、外半径 r_2 の薄肉中空円筒であり、その一端を固定し、他端に偶力を加えてねじるとする。その回転角 Ω は小さく、円筒表面上の母線は直線のまじり角 ε だけねじれるとする。この時 $r_2 \Omega = l \varepsilon$ であり、 $\Omega/l = \beta$ はねじり角と呼ばれる。円筒表面は単純剪断を受けているとし、その剪断応力を σ 、この材料の剪断弾性係数を G とすると、

$$\sigma = G \varepsilon = G r_2 \frac{\Omega}{l} = G r_2 \beta \quad \dots\dots\dots (21)$$

偶力で試験片内に生じたねじりモーメント M_z は次の式で与

えられる¹⁸⁾、

$$M_z = \frac{\pi \sigma}{2 r_2} (r_2^4 - r_1^4) \quad \dots\dots\dots (22)$$

式 (4), (11), (21) から、

$$U_c = \frac{\sigma_c \varepsilon_0^2}{4 \varepsilon_r \lambda} \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2} \cdot \pi (r_2^2 - r_1^2) l \quad \dots\dots\dots (23)$$

単位体積あたりの限界ひずみエネルギーを U_c^* とすると、中空円筒の体積は $\pi (r_2^2 - r_1^2) l$ であるから、

$$U_c^* = \frac{\sigma_c \varepsilon_0^2}{4 \varepsilon_r \lambda} \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2} \quad \dots\dots\dots (24)$$

式 (6) で $C=0$ とおくと、弾性要素がことごとく破壊して粘性要素に変わり、それのみになる時の変位の大きさが求まる。すなわち、

$$\{(\Omega)_{c=0}\}^2 = \frac{2 C_0 N U_c}{g_s}$$

Ω_y を降伏応力 σ_y に相応する回転角とすると、上式の $(\Omega)_{c=0}$ を Ω_y と書き代えてよいから、その式を式 (4) で辺々割算すると、

$$\frac{\Omega_y^2}{\Omega_0^2} = \frac{1}{\lambda}$$

式 (21) から $\sigma_y/\sigma_0 = \Omega_y/\Omega_0$ であるから、この関係を上式へ代入すると、

$$\sigma_y = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\lambda}} \quad \dots\dots\dots (25)$$