破壊位置データを用いたワイブル・パラメータの新推定法

松尾陽太郎・北上浩一*

(東京工業大学 工学部 無機材料工学科)
*東京工業大学大学院

Oh と Finnie はぜい性材料の破壊について研究し、破壊応力のみならず破壊位置も推定可能な理論（破壊位置の確率論）を提唱している。しかし、セラミックスなどの破壊原因は1種類のみではないために、複数種類の破壊原因を同時に考慮できる破壊位置の確率論が必要である。

著者は、先に破壊位置の確率論と競合リスク理論とを結合した新しい理論の定式化を行い、これを用いて種々の解析を行い、その有効性を明らかにしている。

本論文では、これらの解析結果に基づいて、破壊位置データのみから多重モードワイブル分布の形状母数を推定する新しい方法を提案した。情報量マトリックス理論により、推定精度が極めて高いことが明らかとなっている多段最尤法と、本推定法の結果とを窒化ケイ素に関する3点曲げ強度データを用いて比較したところ、新推定法の精度は十分高いことが分かった。

更に、3点曲げ試験における破壊位置に関して形状母数を含んでいる新しい性質についても述べた。

(1985年3月13日受付)

New Estimating Method of Weibull Parameters from Fracture Location Data

Yohtaro MATSUO and Kohichi KITAKAMI

(Faculty of Engineering, Tokyo Institute of Technology)
(12-1, Ookayama 2-chome, Meguro-ku, Tokyo 152)

Oh and Finnie developed the statistical theory of fracture location which can be used to estimate not only the fracture stress but also fracture location. However, this study is restricted only to one type of fracture origin. In fact, brittle materials like ceramics involve many types of fracture origins. Recently, we established a new theory by combining the statistical theory of fracture location with the competing risk theory. In the present study, we developed a new method of estimating Weibull's shape parameters on the basis of this theory, which has made it possible to estimate Weibull's shape parameters only from fracture location data. Using 3-point bending test data for silicon nitride, we estimated the shape parameters by the present method. The estimated results were compared with those obtained by the multi-maximum likelihood method. It was found that they coincide with each other satisfactorily. Further, the implications of Weibull's shape parameters for the fracture location in the 3-point bending test are discussed.

[Received March 13, 1985]

Key-words : Weibull distribution, Fracture location, Competing risks, Bending test, Silicon nitride

1. 緒言

著者らは最近、Oh と Finnie¹⁾ が提唱した破壊応力のみならず破壊位置をも推定できる理論（破壊位置の確率論）と競合リスク理論²⁾とを結合し、その定式化を行っ

た。そしてこの理論を用いて、種々の解析を行い、その有効性を明らかにしている³⁾。

本研究では、上記の理論すなわち、複数種類の破壊原因を同時に考慮できる位置の確率論を用いて、破壊位置

データのみからワイブル分布の形状母数を推定する新しい方法を提案し、更に3点曲げ試験における形状母数の持つ新しい性質について述べる。

2. 破壊応力と破壊位置に関する競合リスク理論の概略³⁾

ワイブル・パラメーターの新推定法を提案するに当たって、まず初めに著者らが先に定式化した、破壊応力と破壊位置に関する競合リスク理論の概略を説明する。

2.1 一般式の導出

Oh と Finnie が提唱した破壊応力と破壊位置に関する理論¹⁾によれば、基準応力 σ_m^{*1} が $(\sigma_m, \sigma_m + d\sigma_m)$ の間にある物体が、領域 A_i 内の位置 ξ にて破壊する確率は、 $h_{A_i}(\sigma_m, \xi)$ をその結合確率密度関数とすると次式のように表される。

$$h_{A_i}(\sigma_m, \xi) d\xi d\sigma_m = \exp(-B_i) \frac{\partial}{\partial \sigma_m} (G_i) d\xi d\sigma_m \quad (1)$$

(1) 式に含まれている i は破壊原因 C_i の種類を表し、 A_i は破壊原因によって分類された各々の領域を表す^{*2}。 B_i は破壊原因 C_i に対する破壊の危険率である。破壊原因としては任意の C_i を想定し、破壊強度を記述する分布関数としてワイブルの一軸分布関数を適用して B_i , G_i を求めると次のようになる。

$$B_i = \int_{\xi} G_i d\xi, \quad G_i = \left(\frac{\sigma - \sigma_{0i}}{\sigma_{0i}} \right)^{m_i} Y(\sigma, \sigma_{0i}) \left(\frac{dA_i}{d\xi} \right) \quad (2)$$

ここで σ は物体内の任意点での最大主応力、 m_i , σ_{0i} , σ_{0i} はワイブル・パラメーター、 dA_i は無次元の要素(破壊原因の種類により、体積要素、面積要素、線素のいずれかをとり)である。また、 $\int_{\xi}$ は A_i の全領域について積分を実行することを意味し、 $Y(\sigma, \sigma_{0i})$ はヘビサイドのステップ関数である。

(1) 式で表現される個々の結合確率密度関数 $h_{A_i}(\sigma_m, \xi)$ と競合リスク理論とを結合することにより、破壊原因 C_i が n 種類存在するときの結合確率密度関数 $h_A(\sigma_m, \xi)$ として、次式を得る。

$$h_A(\sigma_m, \xi) = \prod_{i=1}^n R_i(\sigma_m) \times \sum_{j=1}^n \lambda_j \quad (3)$$

ここで R_i は信頼度、 λ_j は故障率で各々次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} R_i(\sigma_m) &= 1 - \int_0^{\sigma_m} \int_{\xi} h_{A_i}(\sigma_m, \xi) d\xi d\sigma_m \\ \lambda_j &= h_{A_j}(\sigma_m, \xi) / R_j(\sigma_m) \\ A &= A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(4) 式中の $\oplus$ は集合論で言う直和である。このように、(3) 式、(4) 式を用いれば n 種類の破壊源を含む物

Fig. 1. A beam subjected to three-point bending load.

体の破壊応力及び破壊位置の解析が可能となる。

2.2 3点曲げ試験の解析

本節では、簡単かつ重要な例として、内部き裂と表面き裂の2種類が破壊に関与する場合を想定し、(2) 式を用いて3点曲げ試験の解析を行う。

試験片としては、細長い矩形断面梁を考える。この梁が3点曲げ荷重を受けるときの材料内の任意点の曲げ応力 σ は次式となる(図1参照)。

$$\sigma = \frac{\sigma_{\max}}{hL} x(h-y), \quad \sigma_{\max} = \frac{3WL}{4bh^2} \quad (5)$$

ただし、座標 x , y の原点は3点曲げ試験における一方の支点とした。 $\sigma_{0i}=0$ ($i=1, 2$) とし、梁側面からの破壊を無視すれば、(2) 式、(5) 式より破壊の危険率 B_i は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= V_{e0} \left(\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{01}} \right)^{m_1}, \quad V_{e0} = \frac{2bLh}{(m_1+1)^2} \\ B_2 &= A_{e0} \left(\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{02}} \right)^{m_2}, \quad A_{e0} = \frac{2bL}{m_2+1} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

V_{e0} , A_{e0} は各々無次元の有効体積と有効面積である。

(3) 式、(4) 式、(6) 式より破壊応力及び破壊位置に関する結合確率密度関数 $h_{D \cup \partial D}(\sigma_m, \xi)$ は次式で表される ($\sigma_m \equiv \sigma_{\max}$)。

$$\begin{aligned} h_{D \cup \partial D}(\sigma_m, \xi) &= h_D(\sigma_m, \xi) \exp \left[-A_{e0} \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{02}} \right)^{m_2} \right] \\ &\quad + h_{\partial D}(\sigma_m, \xi) \exp \left[-V_{e0} \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{01}} \right)^{m_1} \right] \\ h_D(\sigma_m, \xi) &= 2bm_1\sigma_m^{m_1-1} \left\{ \frac{x(h-y)}{\sigma_{01}Lh} \right\}^{m_1} \\ &\quad \cdot \exp \left[-V_{e0} \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{01}} \right)^{m_1} \right] \\ h_{\partial D}(\sigma_m, \xi) &= 2bm_2\sigma_m^{m_2-1} \left(\frac{x}{\sigma_{02}L} \right)^{m_2} \exp \left[-A_{e0} \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{02}} \right)^{m_2} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

ここで D は内部き裂が存在する領域を、 ∂D は表面き裂が存在する領域を表す。

次に、(7) 式の第1式から破壊位置 x に関する周辺分布 $S_{D \cup \partial D}(x)$ を求めると、次式を得る。

$$\begin{aligned} S_{D \cup \partial D}(x) &= \int_0^x \int_0^h \int_0^\infty h_{D \cup \partial D}(\sigma_m, x, y) d\sigma_m dy dx \\ &= (x/L)^{m_1+1} \int_0^\infty \frac{dB_1}{d\sigma_m} \exp(-B_1 - B_2) d\sigma_m \end{aligned}$$

*1 基準応力としては、例えば物体内の最大応力をとる。

*2 ここで言う領域とは各種の破壊源が存在する領域を示す。したがって、破壊源の種類が異なれば同一領域でも異なる領域として取り扱う。その意味では、(1) 式は Oh と Finnie の理論を拡張したものである。

$$+(x/L)^{m_2+1} \int_0^\infty \frac{dB_2}{d\sigma_m} \exp(-B_1 - B_2) d\sigma_m \quad (8)$$

(8) 式の最右辺に含まれている二つの積分項は、基準応力 σ_m のみから計算される内部破壊の割合と表面破壊の割合を表している。したがって、 $S_{D\partial\partial}(x)$ は内部破壊と表面破壊の混合分布 (Mixture) になっていることが分かる。一方、内部破壊のみに関する x の周辺分布 $S_D(x)$ と表面破壊のみに関する x の周辺分布 $S_{\partial\partial}(x)$ を (7) 式の第2, 第3式からそれぞれ求めると次のような形となる。

$$S_D(x) = (x/L)^{m_1+1}, \quad S_{\partial\partial}(x) = (x/L)^{m_2+1} \quad (9)$$

この (9) 式は、(8) 式に関して先に述べた考察の証明となっている。

3. 形状母数の新推定法

2.2節の (9) 式で最も注目すべき点は、 $S_D(x)$, $S_{\partial\partial}(x)$ がワイブル分布の形状母数のみを含んでいることである。

(9) 式の二つの式について、その両辺の対数をとると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \ln S_D(x) &= (m_1+1) \ln(x/L) \\ \ln S_{\partial\partial}(x) &= (m_2+1) \ln(x/L) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

(10) 式から直ちに次のことが結論される。 $S_D(x)$ 又は、 $S_{\partial\partial}(x)$ と x/L とで位置付けられる実験値を両対数グラフ上にプロットすると、その傾きは (m_i+1) となる。

Table 1. Estimated shape parameters by multi-maximum likelihood method and the present method (3-point bend test data for silicon nitride, after Ito et al.⁴⁾).

	$\hat{m}_1$	$\hat{m}_2$
M-M.L.M.	15.79	12.73
Present method	15.14	12.79

すなわち、破壊位置データを両対数グラフ上にプロットし、これに対して線形回帰分析を行うことにより、形状母数 m_i を推定することができる。このことは、破壊原因の種類が3以上であっても同様に成立する。

4. 窒化ケイ素3点曲げ試験データに対する解析

伊藤ら⁴⁾が行った窒化ケイ素の3点曲げ試験データに対して、2.2節で述べた線形回帰分析を行い、形状母数の推定値を求めた。その結果を図2(a), (b) 及び表1に示す。表中には、2重モード・ワイブル分布を想定し、多段最尤法 (M-MLM)⁵⁾ により求めた形状母数の推定値も載せてある。この多段最尤法は、高い精度でパラメータを推定できることを、情報量マトリックス理論から既に明らかにしている⁵⁾。今回新たに提案した推定法による形状母数の推定値は、多段最尤法による推定値とほとんど一致しており、本方法の推定精度が極めて高いことが分かる。したがって、形状母数の推定値のみが必要な場合には、3点曲げ試験を行い、破壊位置 (試験片長手方向の位置) のデータと破壊原因さえ記録しておけば、

Fig. 2. Linear regression of fracture location data in x -direction. (a) Inner cracks, (b) Surface cracks

破壊応力が未知でも形状母数を精度よく推定できることが分かる。

5. 形状母数の持つ新しい性質

ここでもう一度、(7)式に注目し破壊位置 y に関する周辺分布 $U_{v\partial v}(y)$ を求めてみる。

$$\begin{aligned} U_{v\partial v}(y) &= \int_0^y \int_0^L \int_0^\infty h_{v\partial v}(\sigma_m, x, y) d\sigma_m dx dy \\ &= \left\{ 1 - \left(\frac{h-y}{h} \right)^{m_1+1} \right\} \int_0^\infty \frac{dB_1}{d\sigma_m} \\ &\quad \cdot \exp(-B_1 - B_2) d\sigma_m + \int_0^\infty \frac{dB_2}{d\sigma_m} \\ &\quad \cdot \exp(-B_1 - B_2) d\sigma_m \end{aligned} \quad (11)$$

(11) 式から、 $U_{v\partial v}(y)$ も内部破壊と表面破壊の混合分布になっていることが分かる。内部破壊に関する y の周辺分布 $U_v(y)$ は、次式で表される。

$$U_v(y) = 1 - \left(\frac{h-y}{y} \right)^{m_1+1} \quad (12)$$

また、 $U_{\partial v}(y)$ は当然のことではあるが 1 に等しい。したがって、 y の分布すなわち試験片厚さ方向の破壊位置データからは、内部破壊に関する形状母数 m_1 は推定できるが、表面破壊に関する形状母数 m_2 を推定することはできない。

さて、(9) 式の第 1 式と (12) 式の確率密度関数を計算すると、下の二つの式を得る。

$$\left. \begin{aligned} s_v(x) &= \left(\frac{m_1+1}{L} \right) (x/L)^{m_1} \\ u_v(y) &= \left(\frac{m_1+1}{h} \right) \left(\frac{h-y}{h} \right)^{m_1} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$x/L \equiv X$, $y/h \equiv Y$ と置き、 m_1 をパラメーターとして (13) 式の各々を計算した結果を、図 3(a), (b) に示す。この図 3(a) に対して、考察を加えると次のようになる。

m_1 値が増加すると破壊位置 x の分布は荷重点側 (スパン中央部) にかたより、 $m_1 = \infty$ で δ 関数となる。また、 m_1 値がゼロに近づくとき破壊位置 x の分布は一様分布に近づくことが分かる。

一方、図 3(b) より、 m_1 値が増加すると破壊位置 y の分布は、引張り側表面部にかたより、 $m_1 = \infty$ で δ 関数となる。また、 m_1 値がゼロに近づくとき図 3(a) と同様、一様分布に近づく。

また、表面破壊について破壊位置 x の確率密度関数を求めると次式を得る。

$$s_{\partial v}(x) = \left(\frac{m_2+1}{L} \right) (x/L)^{m_2} \quad (14)$$

この式は、形状母数を除くと (13) 式の第 1 式と一致しており、表面破壊の位置も m_2 の増加とともに、スパン中央部に集中してくるのが分かる。

以上のことより、形状母数はぜい性材料の破壊応力のばらつき具合を示すという性質のほかに、3 点曲げ試験の場合には破壊位置の領域をも制限する性質を持つと

Fig. 3. Probability density function of fracture location for inner cracks.
(a) x -direction, (b) y -direction

ということが結論される。これは非常に重要な結果であって、もし m 値が比較的大きい ($m > 10$) ならば、破壊はほとんど表面付近の極く狭い領域で起こることになる。したがって、何らかの方法で表面近傍を強化してやれば、強度が著しく向上することになる。このことは、一般の応力状態下にあるセラミックス部品に対しても適用することができ、実用上有効であると考ええる。

6. 結 言

競合リスク理論に基づく破壊位置の確率論を用いることにより、ワイブル分布の形状母数の新しい推定法を提案した。すなわち、3点曲げ試験を行い、試験片長手方向についての破壊位置データを観測し、これらに対して線形回帰分析を施すことにより、形状母数を推定する手法である。この推定法は多種類の破壊原因に対して適用

可能である。また、形状母数が3点曲げ試験における破壊位置を制限するという性質を持つということが分かった。

謝 辞 本研究を行うに当たり、工業技術院名古屋工業技術試験所・伊藤正治氏には詳細なデータを御提供頂いた。また、東京工業大学・木村脩七教授には貴重な御助言を賜った。ここに深く感謝の意を表します。

文 献

- 1) H. L. Oh and I. Finnie, *Int. J. Fracture Mech.*, 6, 287-300 (1970).
- 2) M. L. Moeschberger and H. A. David, *Biometrics*, 27, 909 (1971).
- 3) 松尾陽太郎, 北上浩一, 日本機械学会論文集 (A編), 投稿中.
- 4) 伊藤正治, 酒井清介, 伊藤 勝, 材料, 30, 337, 1019 (1981).
- 5) 村田博隆, 松尾陽太郎, 宮川雅巳, 北上浩一, 日本機械学会講演論文集, No. 840-10, 62 (1984).