一定熱流束で加熱されるセラミック円板における熱応力の相関式

—熱応力に及ぼす物性値の温度依存性の影響—

水谷安伸・西川直宏*・高津 學*

東邦ガス(株)総合技術研究所, 476 愛知県東海市新宝町 507-2

*名古屋工業大学材料工学科, 466 名古屋市昭和区御器所町

Correlative Equations of Thermal Stress in Ceramic Disk Heated with Constant Heat Flux

—Effect of Temperature Dependence of Thermal Properties on Thermal Stress—

Yasunobu MIZUTANI, Tadahiro NISHIKAWA* and Manabu TAKATSU*

Technical Research Institute, Toho Gas Co., Ltd., 507-2, Shinpo-machi, Tokai-shi, Aichi 476

*Department of Materials Science and Engineering, Nagoya Institute of Technology, Gokiso-cho, Showa-ku, Nagoya-shi 466

[Received November 14, 1994; Accepted February 21, 1995]

In the thermal shock test by means of a heated ceramic disk specimen with constant heat flux, temperature distributions in the specimen and time to fracture can be easily measured. Therefore, thermal stress in the ceramics can be estimated without measuring the heat transfer coefficient whose measurement is needed in case of water quenching test. On the other hand, the temperature dependence of thermal properties of material substantially affects the temperature distribution and thermal stress history. In this paper, numerical calculations of non-steady-state temperature distribution in thin disk, which was heated from outside with constant heat flux, were conducted to estimate the generated thermal stress. Temperature dependence of thermal conductivity and thermal diffusivity was assumed to be exponential functions. Time-dependent thermal stress was expressed with the correlative equations containing coefficients of temperature dependence of thermal properties, the supplied heat flux and Fourier's number. The last factor was a nondimensional parameter with specimen size and time. Based on the proposed equations, the effect of temperature dependence of thermal properties on thermal stress and the suitable experimental conditions in above-mentioned thermal shock test were discussed.

Key-words : Ceramics, Thermal shock test, Thermal stress, Correlative equation, Temperature distribution

1. 緒 言

著者らは、前報において円板状セラミックス試験片の外周を一定熱流束で加熱し、円板中心部に発生する引張り応力で試験片を破壊させる方法でセラミックスの熱衝撃試験を試みた¹⁾。この方法では、セラミック部材が実用的にさらされるのに近い伝熱条件下での試験が可能である。また、試験片の温度分布を測定することにより、試験片に発生する熱応力を推定することができる長所があり、実験及び数値計算の結果から、発生する熱応力は熱伝導率及び熱拡散率の温度依存性に大きく影響されることが分かった。

物性値の温度依存性を考慮した熱応力の解析について

は、著者らを含めいくつかの報告例があるが^{2)~7)}、その多くはいずれも境界条件が熱伝達係数で示される水中急冷法などの急熱・急冷条件における解析であり、一定熱流束加熱の条件下でこれら熱伝導率や熱拡散率の温度依存性の大小が熱応力に及ぼす影響については十分定量化されていない。

そこで本報では、外周を一定熱流束で加熱した円板内の温度分布及び熱応力の過渡的变化を数値計算により求めた。数値計算では、材料物性値として熱伝導率、熱拡散率及びそれらの温度依存性を考慮し、実験条件として試験片の寸法、供給熱流束をパラメーターとして、熱応力の相関式を作成した。これにより、上記の一定熱流束加熱熱衝撃試験の際に、セラミック円板に発生する過渡的な熱応力のパターンが材料によって異なることを示し、材料物性値の温度依存性が過渡的熱応力に及ぼす影響について考察した。

この相関式は、上記の熱衝撃試験における実験条件の検討、及び実験結果の考察を行う場合に極めて重要なデータを提供することが分かったので報告する。

2. 数値計算法

2.1 温度分布の算出

セラミック円板を一定熱流束加熱する熱衝撃試験法とは、図1に示すように円板状試験片の外周面を薄膜ヒーターにより一定電力で加熱し、試験片を破壊させる方法である¹⁾。薄膜ヒーターにルテニウムペーストを用いれば、1000℃以下における抵抗値の温度依存性が極めて少ないため、一定電位を与えることにより一定電力による加熱、すなわち一定熱流束加熱とみなすことができる。このとき円板の半径方向の温度分布をモニタリングすることにより、破壊の起点となる円板中心部に生ずる引張り応力の履歴を知ることができる。また、ヒーターへの供給電力を加減することにより、実用条件に近い熱流束を設定して熱衝撃試験を行うことができる。

この熱衝撃試験では解析を容易にするため、試験片の上

Fig. 1. Schematic diagram of thermal shock fracture test by means of ceramic disk. Disk specimen is rapidly heated from outside by constant heat flux, and thermal stress is estimated from measured temperature distributions.

下面には同じくヒーターを焼きつけた同種の試験片を積層し、軸方向を断熱としたので、一次元熱伝導問題に帰結することができる。外周から一定熱流束で加熱される円板の熱伝導方程式、初期条件、及び境界条件について、熱伝導率 λ_T 及び熱拡散率 κ_T を温度の関数として定義し、無次元化して変数変換すると、それぞれ(1)～(3)式で示される (Appendix 参照)。

$$\kappa^*(T) \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial F}{\partial \xi} \right\} = \frac{\partial F}{\partial \eta_i} \quad (1)$$

$$\eta_i = 0 \quad \text{で} \quad F = 0 \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi = 0 \quad & \frac{\partial F}{\partial \xi} = 0 \\ \xi = 1 \quad & \frac{\partial F}{\partial \xi} = Q_i \frac{\kappa^*(T)}{\lambda^*(T)} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで、

$$F = \int_0^T \kappa_T dT,$$

T は無次元温度で $T = (\theta - \theta_i) / (\theta_f - \theta_i)$, ξ は無次元長さで $\xi = r/r_0$, η_i はフーリエ数で $\eta_i = \kappa_i t / r_0^2$, Q_i は無次元熱流束で $Q_i = q r / \lambda_i (\theta_f - \theta_i)$ である。 θ は温度, r_0 は円板の半径, r は円板の中心から外向きにとった距離で, t は時間である。 κ_T は熱拡散率で, $\kappa_T = \lambda_T / \rho C_p$, q は単位面積当たりの供給熱量である。 λ_T は材料の熱伝導率で, ρ , C_p はそれぞれ比重及び比熱である。添字の i, f はそれぞれ最初及び最後を示す。なお, θ_i , θ_f はそれぞれ室温及び実験終了時の最高温度で, θ_i は任意の温度としてよい。

$\lambda^*(T)$ 及び $\kappa^*(T)$ は、熱伝導率 λ_T 及び熱拡散率 κ_T の温度依存性を示す関数であり、セラミックスの λ_T , κ_T の温度依存性のプロファイルを考慮し、(4), (5) 式のように指数関数で近似した。

$$\lambda^*(T) = \lambda_T / \lambda_i = e^{AT} \quad (4)$$

$$\kappa^*(T) = \kappa_T / \kappa_i = e^{BT} \quad (5)$$

A, B はそれぞれ $\lambda^*(T)$, $\kappa^*(T)$ の温度依存性の大小を示す温度係数である。ここで、温度依存性を示す物性値として比熱 C_p を用いることも考えられるが、熱拡散率 κ_T を用いたほうが数値計算過程をより簡略化できることに着

目し、熱拡散率 κ_T を温度の関数とした。つぎに、(1) 式の左辺を時間中心差分、右辺及び初期条件、境界条件を中心差分とする差分方程式に離散化し、陰スキームである Crank-Nicolson 法⁸⁾を用いて時間経過に伴う円板半径方向の温度分布 $T(\xi, \eta_i)$ を数値計算した。

実験に用いたルテニウムペーストを利用した薄膜ヒーターは、室温から約1000℃までその抵抗値がほぼ一定であるので、定電圧に制御することにより、供給熱量 q を一定とみなすことができる。また、実験の温度範囲内では λ_T 及び κ_T は(4), (5) 式で精度良く近似できることから、数値計算では無次元熱流束 Q_i 及び温度係数 A, B は同一計算内で一定とした。

2.2 熱応力分布の算出

つぎに、求めた温度分布 $T(\xi, \eta_i)$ から、(6)～(8) 式で示す円板の熱応力式⁹⁾を用いて、各時刻における円板の半径方向の無次元熱応力分布 $\sigma_r^*(\xi, \eta_i)$ 及び接線方向の無次元熱応力分布 $\sigma_\theta^*(\xi, \eta_i)$ を数値積分により求めた。

ここで、 $\sigma^*(\xi, \eta_i) = \sigma(\xi, \eta_i) / E \alpha (\theta_f - \theta_i)$ である。

$$\sigma_r^*(\xi, \eta_i) = \int_0^1 T(\xi, \eta_i) \xi d\xi - \frac{1}{\xi^2} \int_0^\xi T(\xi, \eta_i) \xi d\xi \quad (6)$$

$$\sigma_\theta^*(\xi, \eta_i) = \int_0^1 T(\xi, \eta_i) \xi d\xi + \frac{1}{\xi^2} \int_0^\xi T(\xi, \eta_i) \xi d\xi - T(\xi, \eta_i) \quad (7)$$

ただし、衆知のように $\xi=0$ では(6), (7) 式は用いることができないので、この極限をとると(8) 式となる。

$$\sigma_r^*(0, \eta_i) = \sigma_\theta^*(0, \eta_i) = \int_0^1 T(\xi, \eta_i) \xi d\xi - \frac{1}{2} T(0, \eta_i) \quad (8)$$

なお、本報ではヤング率 E 及び熱膨張率 α は定数として取り扱ったが、部分安定化ジルコニアや耐火物などのように、 E 及び α の温度依存性が無視できないほど大きい材料^{10), 11)} については、これらの温度係数をパラメーターとして議論する必要があるので、個別に数値計算を実行した方が得策と考えられる。

3. 結果と考察

3.1 熱応力分布

円板の半径方向の無次元熱応力分布 $\sigma_r^*(\xi, \eta_i)$ 及び接線方向の無次元熱応力分布 $\sigma_\theta^*(\xi, \eta_i)$ の一例を図2 (a), (b) に示す。図2の破線は材料の物性値に温度依存性がないとした場合の数値計算結果を、実線は熱伝導率及び熱拡散率の温度依存性を実測してこれを算入した場合の数値計算結果を示している。図2では、温度係数 A, B は99.5% アルミナの実測値を用いた。

熱応力は、フーリエ数、換言すると時間の経過とともに増加するが、物性値の温度依存性にかかわらず、いずれの時刻においても、円板の中心部 ($\xi=0$) において引張り応力は最大となる。位置を示す無次元項 ξ が大きいとこ

Fig. 2. Result of numerical calculations about the distributions of nondimensional thermal stress in radius direction at several Fourier's numbers.

(a) Radial stress distributions,
(b) Tangential stress distributions.

ろでは、無次元熱応力 $\sigma_r^*(\xi, \eta_i)$, $\sigma_\theta^*(\xi, \eta_i)$ はどちらも減少するが、円板の中心部近傍は比較的一様な引張り応力を示している。物性値に温度依存性がないとした場合と、これを考慮した場合の計算結果を比較すると、 $\sigma_r^*(\xi, \eta_i)$, $\sigma_\theta^*(\xi, \eta_i)$ とともに、物性値 λ_T, κ_T に温度依存性がある場合には、それを考慮しない場合と比較すると、中心近傍の引張り応力域は広くなる傾向にあった。

熱衝撃試験の結果でも、試験片は中心部近傍を起点として破壊しており、破壊の有無に関しては、この最大熱応力のみを考えればよいので、 $\xi = 0$ の熱応力を相関式として数式化することにした。

3.2 熱応力の相関式

熱応力の数値計算にあたっては、温度係数である A, B 及び加熱条件を記述する Q_i, η_i がパラメーターとなるので、相関式の精度を高めるためには、これらの熱衝撃試験に実用的な範囲を定める必要がある。いくつかのファインセラミックスの温度係数を調査し^{1), 11)~14)}、熱衝撃試験に適用可能な供給熱量の範囲から Q_i, η_i を求めた結果、計算に必要な A, B, Q_i, η_i の範囲は $-1.5 < A \leq 0$, $-2 < B < 0$, $Q_i < 1$, $\eta_i < 1$ とした。ここで、 A, B の範囲が負であることは、熱伝導率及び熱拡散率が温度上昇とともに減少することを示している。これら温度係数の実測値は、温度依存性が極めて大きいアルミナ数種については $A = -0.8 \sim$

Fig. 3. Fitted functions of correlative equation and the profile of thermal stress history.

-1.0 , $B = -1.3 \sim -1.6$ ($25 \sim 400^\circ\text{C}$) となり、温度依存性が極めて小さいマイカセラミックスについては $A = -0.03$, $B = -0.4$ ($25 \sim 400^\circ\text{C}$) であったので、この範囲で計算すれば、特殊な材料を除いて多くのファインセラミックスをカバーできると考えた。したがって、この範囲で合計72通りの A, B, Q_i の組み合わせについて数値計算を実行した。

図2で示した二つの材料、すなわち、物性値に温度依存性がない材料、及び、物性値の温度依存性が著しいアルミナについて、円板中心部 $\xi = 0$ の熱応力履歴を示すと図3のようになる。熱伝導率の温度依存性が比較的大きいファインセラミックスのほとんどはアルミナに類似した挙動を示すことが分かっている¹⁾。図3から、物性値に温度依存性がない材料の熱応力履歴は $\sigma^*(0, \eta_i) = a(1 - e^{b\eta_i})$ の形の関数で近似できることが分かる。熱伝導率に温度依存性がある場合にはフーリエ数の増加とともに熱応力が比較的単調に増加するので、補正項として $c\eta_i$ を加えることにより熱応力が正確に表せることが分かった。したがって、熱応力履歴の近似関数として(9)式を用いて、最小自乗法により相関式中のパラメーター a, b, c を決定した。

$$\sigma^*(0, \eta_i) = a(1 - e^{b\eta_i}) + c\eta_i \quad (9)$$

更に、求めたパラメーター a, b, c は A, B, Q_i に係わる変数として記述できるので、これを次元解析と同様の手法で、表1中の式を用いて、 a, b, c について定数項 C 及び A, B, Q_i に関するパラメーター u, v, w を求めた。このようにして求めた熱応力の相関式を表1に示す。

上式を用いて熱応力を算出する場合には、次のような手順で算出する。まず、材料の熱伝導率 λ_T 及び熱拡散率 κ_T の各温度における実測値を(4), (5)式で最小自乗法により近似して温度係数 A, B を決定する。つぎに実験時に試験片に供給する電力量から薄膜ヒーターの単位面積当たりの供給熱量を求め、無次元熱流束 Q_i を算出する。この A, B, Q_i を用いて表1からパラメーター a, b, c を求めれば、(9)式により任意のフーリエ数における無次元熱応力が求められるので、物性値であるヤング率 E , 熱膨張率 α , 及び最初に定義した温度差 $\theta_f - \theta_i$ の値を代入すれば、任意の時刻における熱応力を算出できる。

Table 1. Correlative Equations and Fitted Parameters of Thermal Stress in Constant Heat Flux Heated Disk

	Fitted equations
Thermal Stress as a function of Fourier's number	$\sigma^*(0, \eta_i) = a(1 - e^{-B\eta_i}) + c\eta_i$
Parameter a	$a = C Q_i^u (-A+1)^v (-B Q_i + 1)^w$
Parameter b	$b = C Q_i^u (-A+1)^v (-B Q_i + 1)^w$
Parameter c	$c = C Q_i^u (-A)^v (-B/A+1)^w - 0.01 Q_i$
	Constant in above equations
	C u v w
Parameter a	0.1387 1.0359 0.1051 -0.4516
Parameter b	9.9687 -0.0218 -0.1236 0.2153
Parameter c	0.2041 1.4868 0.6106 -0.6885

3.3 熱応力の過渡的变化に及ぼす物性値の温度依存性の影響

3.2節で求めた相関式を利用して、典型的な3種類のセラミックスについて熱応力の過渡的变化を示すと図4のようになる。(a)は熱伝導率、熱拡散率に温度依存性がない単純な材料を、(b)は熱拡散率のみに温度依存性があるマイカセラミックスなどの材料を、(c)は熱伝導率及び熱拡散率に温度依存性があるアルミナなどの材料を示している。

曲線(a)で示される単純な材料では、フーリエ数 η_i の増加に伴い熱応力は増加するが、 $\eta_i > 0.3$ では熱応力は定常値を示す。これに熱拡散率の温度依存性 ($B < 0$) が加わると曲線(b)のように $\eta_i > 0.3$ では曲線(a)と同様に定常値となるが、熱応力の大きさは相対的に減少する。この熱応力の減少分は熱拡散率の温度依存性の大きさに対応して図4中の $a_0 \rightarrow a_1$ で表される。

このような材料では、 $\eta_i > 0.3$ で熱応力が定常となった後に破壊した場合には、サブクリティカルクラックグロースに係わることも考えられるので、その検討が必要である。

Fig. 4. Thermal stress history in case of the typical three ceramics.

- (a) Material properties are constant,
- (b) Thermal diffusivity is changeable,
- (c) Thermal diffusivity and thermal conductivity are changeable.

る。逆に考えるとこの領域で実験を行えば、熱疲労に関する評価も可能である¹⁵⁾。

つぎに熱伝導率に温度依存性があり、 $A < 0$ の場合には曲線(c)で示されるように $\eta_i > 0.3$ の定常値はなくなり、時間経過とともに熱応力は増加し続けることになる。この熱応力の増加分は熱伝導率の温度依存性の大きさに対応して図4中の $a_2 \rightarrow a_2 + c\eta_i$ で表される。

なお、 $A > 0$ となるファインセラミックスとしてムライト、BNなどが確認されているが¹⁾、これらのAの値はほぼ0であり、熱伝導率の測定誤差を考慮すると無視できる範囲と判断したので本報では割愛した。

これらのことから多くのファインセラミックスでは、曲線(c)で示されるように、熱拡散率の温度依存性は熱応力を低下させる方向に働き、熱伝導率の温度依存性は逆に熱応力を増加させる方向に働く。その影響度はフーリエ数により異なっており、フーリエ数が0.3以下の小さい範囲では熱拡散率の温度依存性が大きく影響し、この値より大きい範囲では熱伝導率の温度依存性が大きく影響することが分かる。

3.4 熱衝撃試験結果の保証について

セラミックスの熱破壊時の破壊応力については、3点曲げ強度や引張り強度など常温での破壊試験で算出した破壊応力とは必ずしも一致しない¹⁶⁾。これは一般に、その応力分布や有効体積、歪み速度などが実験方法によって大きく異なること¹⁷⁾、また、破壊の起点が異なること¹⁸⁾などのためである。また、一般に良く用いられる水中急冷を用いた熱衝撃試験法では、熱伝導率や熱拡散率の温度依存性よりも材料と水との熱伝達係数の温度依存性が著しく大きく、実験方法によりその影響を著しく受けやすいため^{19)~21)}、材料が破壊した時に作用した熱応力の大きさを精度良く推定することは困難である。

円板状試験片を一定熱流束加熱する熱衝撃試験法では、試験片の温度分布や破壊までの時間を正確に測定できるなど、数多くの情報が得られるので、材料に作用した熱応力の分布やその大きさ、また歪み速度など、どのような状況下で材料が破壊したかを容易に推定できる長所がある。

前報¹⁾では、円板の温度分布から熱応力を推定し、材料の熱破壊強度を算出したが、本報の相関式を用いれば、熱伝導率や熱拡散率に温度依存性がある材料についても破壊時の最大熱応力が精度良く算出できるので、実験で得られた熱破壊強度と比較することにより、実験の有効性を評価し、データの信頼性が確保できる。また、熱衝撃試験における材料の破壊強度について更に正確な評価ができると考えられる。

3.5 相関式の活用法について

円板を一定熱流束で加熱する熱衝撃試験においては、供給熱流束を適切に設定し、加熱開始後、数秒から数十秒で試験片を破壊させる必要がある。供給熱流束が小さすぎれば試験片は破壊せず、大きすぎれば試験片は極めて短時間のうちに破壊してしまうため温度測定が困難となるからで

ある。これらは試験する材料の材質（物性値）や試験片の大きさ等にも依存する。したがってあらかじめ表1に示した熱応力の相関式を利用して、適正な試験条件を設定することが望ましい。

一例として、アルミナ及びマイカセラミックスについて、単位面積当たりの供給熱流束を一定とした条件について、試験片の半径が異なる場合の熱応力 σ の時間変化を推定した結果を図5(a), (b)に示す。図5(a), (b)は、表1の相関式にアルミナ及びマイカセラミックスの温度係数 A, B を代入してフーリエ数 η_i に対する無次元熱応力 σ^* の変化を求め、これらの無次元数にそれぞれの材料の物性値を代入して有次元化して作図したものである。

また、図5の右軸には熱衝撃抵抗パラメーター $R (= \sigma / E\alpha)$ を示した。ここで材料の破壊応力における R の値は、熱衝撃破壊抵抗係数 $R_c = \sigma_F / E\alpha$ を示しており、Hasselmanが示した第一次熱衝撃抵抗係数 $R_c = (1 - \nu) \sigma_F / E\alpha^{22}$ と同意であるが、円板であるためポアソン比は含まれない。

本試験法においては、熱破壊強度 σ_F は材料の引張り強度とほぼ等価であると考えられるので¹⁾、 σ_F に引張り強度を適用すると、図5(a)で示したアルミナの引張り強度は280 MPa ($R_c = 98^\circ\text{C}$)であるので、供給熱流束が $q = 10^6$

W/m²の場合には、試験片は20~40 s後に破壊し、試験片半径が大きくなるほど破壊までの時間は短くなることが分かる。供給熱流束を $q = 2 \times 10^6$ W/m²まで増やすと試験片半径の影響はほとんどなく、ほぼ一定の時間で破壊する。このような条件では破壊までの時間は5 s以下となるので、接合部の球径の小さい熱電対を用いるなど、応答性の早い測定系が必要である。

これに対して図5(b)で示したマイカセラミックスの場合には、引張り強度は80 MPa ($R_c = 136^\circ\text{C}$)であるので、供給熱流束が $q = 10^6$ W/m²の場合でも、試験片は5 s以下で破壊してしまう。供給熱流束を $q = 2 \times 10^6$ W/m²まで低く設定すれば試験片は20 s前後で破壊するので実験が容易になる。また、破壊時間に及ぼす試験片寸法の影響はアルミナと異なっており、試験片の半径が大きくなるほど破壊までの時間は長くなる傾向にあることが分かる。

試験片の寸法（直径、厚み）を先に定めて、任意の時刻で試験片を破壊させる実験条件を設定する場合には、供給熱流束 q をパラメーターとして図5と同様に作図すればよい。図から設定したい時刻で破壊応力に達する供給熱流束 q の値を見積もれば、この q の値と試験片の外周の面積からヒーターへの供給電力が求められる。ただし、材料強度のばらつきから、試験片は設定した時刻の前後で破壊することになる。以上示したように、上式の熱応力の相関式を利用すれば、実験前に試験片寸法や供給熱流束などの実験条件を比較的容易に設定することができる。なお、実際に実験をする場合には、試験片の寸法を変えて実験し、データがよく一致することを確認めれば、より信頼性が高い結果を得ることができる。

また、試験片が破壊するまでの時間については次のように考えることができる。破壊するまでの時間が同じ場合でも材料の熱拡散率 κ_i の大きさにより、フーリエ数 η_i の値は大きく異なる。たとえば破壊までの時間を40 sとすると、アルミナでは熱拡散率 κ_i が約0.1 cm²/sであるので、破壊時のフーリエ数 η_i は0.6となる。図3から、 η_i が大きい場合には、(9)式は $\sigma^*(0, \eta_i) = a + c\eta_i$ に近似できるので、加熱開始後、破壊するまでの時間を(10)式によって求めることができる。ここで $\sigma_F^* = \sigma_F / E\alpha$ ($\theta_f - \theta_i$)は無次元化した材料の熱破壊強度を示している。なお、前出のように本試験法においては、熱破壊強度 σ_F は材料の引張り強度とほぼ等価である。

(10)式から、材料の熱破壊強度が大きいほど破壊までの時間は長くなること、また、熱伝導率の温度係数 A が大きい材料ではパラメーター c が増加するため破壊までの時間は顕著に短くなることが分かる。

$$\eta_i = \frac{1}{c} (\sigma_F^* - a) \quad (10)$$

つぎに、熱拡散率が小さい材料では、フーリエ数 η_i が小さい範囲で破壊することになる。例えばマイカセラミックスでは熱拡散率 κ_i は約0.008 cm²/sであるので、破壊までの時間が40 sのとき、フーリエ数 η_i は0.05となる。 η_i が小さい場合には、(9)式は $\sigma^*(0, \eta_i) = a(1 - e^{-b\eta_i})$ に近似

Fig. 5. The effect of radius size of specimen and supplied carolies on thermal stress. Time to fracture can be estimated from fracture strength of materials.

(a) Alumina, (b) Mica ceramic.

できるので、加熱開始後破壊するまでの時間は(11)式で示される。この領域では、熱拡散率の温度依存性により破壊までの時間は長くなる。

$$\eta_i = \frac{1}{b} \ln(1 - \frac{\sigma_F^*}{a}) \quad (11)$$

また、これらの中間の材料については相関式から熱応力の時間変化を図4と同様にプロットし、任意の σ_F^* におけるフーリエ数 η_i を求めれば破壊するまでの時間を推定することができる。

熱疲労を考慮すると、熱破壊強度は応力負荷速度の影響を受けることが予想されるので、応力負荷速度が算出できると有用である。(9)式を微分すると(12)式となるので、任意の時刻における応力負荷速度を算出することができる。熱伝導率に温度依存性がない場合には $c=0$ となるので、 η が増大すると $d\sigma^*/d\eta_i \rightarrow 0$ となり、静疲労と同じになる。また、熱伝導率に温度依存性がある場合には、 $c>0$ であり、 η_i が増大すると $d\sigma^*/d\eta_i \rightarrow c$ となるので、試験片寸法や供給熱流束などの実験条件が同じ場合、室温での熱伝導率や熱拡散率が同じ材料でも、熱伝導率の温度依存性が大きい材料ほど応力負荷速度が大きくなることが分かる。

$$\frac{d\sigma^*}{d\eta_i} = -abe^{bm_i} + c \quad (12)$$

以上示したように、表1に示した熱応力の相関式を利用すれば、実験において材料が破壊するまでの時間や、破壊時の応力負荷速度などを推定することが可能となるので、試験片寸法や供給熱流束の大きさなど、あらかじめ適切な実験条件を設定することができる。

4. 結 論

(1) 一定熱流束で加熱される円板に発生する熱応力を熱伝導率及び熱拡散率の温度依存性、供給熱流束、フーリエ数との相関式として整理することにより、熱伝導率や熱拡散率の温度依存性が、発生する熱応力に与える影響について定量化することができた。

(2) 一定熱流束で加熱される円板において、熱拡散率のみに温度依存性がある材料では、一定時間経過後の熱応力は定常値を示すが、温度依存性がない材料よりも定常値は小さくなる。また、熱伝導率に温度依存性がある材料では、熱応力は定常値とならなくなる。

(3) この相関式を利用することで、任意の時間における熱応力が推定できるため、測定した物性値の可否や熱衝撃試験時のデータの可否などが正確に検討でき、実験の有効性を評価できると考えられる。

(4) 相関式から、材料が破壊するまでの時間や応力負荷速度などが容易に推定できる。また、試験片寸法や供給熱流束など、適切な実験条件をあらかじめ設定することが容易になった。

Nomenclature

A : Coefficient of temperature dependence in thermal conduc-

tivity [—]

B : Coefficient of temperature dependence in thermal diffusivity [—]

C_p : Specific heat [J/kg·K]

E : Elastic modulus [GPa]

q : Supplied calories per unit area [W/m²]

Q : Nondimensional heat flux, $Q=qr_0/\lambda_T(\theta_i-\theta_0)$ [—]

R : Thermal shock resistance parameter, $R=\sigma/E\alpha$ [K]

R_c : First thermal shock resistance parameter, $R_c=\sigma_F/E\alpha$ [K]

r_0 : Radius of the disks [m]

T : Nondimensional temperature, $T=(\theta-\theta_0)/(\theta_i-\theta_0)$ [—]

t : Time [s]

r : Distance from the center of disk [m]

α : Thermal expansion coefficient [K⁻¹]

η : Fourier's number, $\kappa_T t/r_0^2$ [—]

θ : Temperature [K]

κ_T : Thermal diffusivity, $\kappa_T=\lambda_T/\rho C_p$ [m²/s]

λ_T : Thermal conductivity [W/m·K]

$\lambda^*(T)$: Temperature dependence function of thermal conductivity, $\lambda^*(T)=e^{AT}$ [—]

$\kappa^*(T)$: Temperature dependence function of thermal diffusivity, $\kappa^*(T)=e^{BT}$ [—]

ξ : Nondimensional distance, r/r_0 [—]

ρ : Density [kg/m³]

σ^* : Nondimensional thermal stress, $\sigma^*=\sigma/E\alpha(\theta_i-\theta_0)$ [—]

σ : Thermal stress [MPa]

subscript

i, f: Initial or final condition

r, θ : Radial or tangential direction

F: Fracture

Appendix 円板の加熱・冷却に関する熱伝導方程式

その外周を一定熱流束で加熱・冷却される円板の熱伝導方程式、初期条件、境界条件は(A1)～(A3)式で示される

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\kappa_T \frac{\partial \theta}{\partial r} \right] + \frac{\kappa_T}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (A1)$$

$$t=0 \text{ で } \theta=\theta_i \quad (A2)$$

$$\left. \begin{array}{l} r=0 \text{ で } \partial\theta/\partial r=0 \\ r=r_0 \text{ で } \partial\theta/\partial r=q/\lambda_T \end{array} \right\} \quad (A3)$$

熱伝導率 λ_T 及び熱拡散率 κ_T には温度依存性があるため、 θ , t , κ_T , λ_T を温度の関数として取り扱う。ここで、 λ_T 及び κ_T は(A4), (A5)式で示すように、指数関数に従うとする。

$$\lambda^*(T) = \lambda_T/\lambda_i = e^{AT} \quad (A4)$$

$$\kappa^*(T) = \kappa_T/\kappa_i = e^{BT} \quad (A5)$$

つぎに、(A1)～(A3)式を無次元温度 $T=(\theta-\theta_0)/(\theta_i-\theta_0)$ 、無次元長さ $\xi=r/r_0$ 、フーリエ数 $\eta_i=\kappa_i t/r_0^2$ 、無次元熱流束 $Q_i=qr/\lambda_i(\theta_i-\theta_0)$ を用いて無次元化すると、

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\kappa^*(T) \frac{\partial T}{\partial \xi} \right] + \frac{\kappa^*(T)}{\xi} \frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial T}{\partial \eta_i} \quad (A6)$$

$$\eta_i=0 \text{ で } T=0 \quad (A7)$$

$$\xi=0 \text{ で } \partial T/\partial \xi=0$$

$$\xi=1 \text{ で } \partial T/\partial \xi = \frac{Q_i}{\lambda^*(T)} \quad (A8)$$

(A6)式は偏微分方程式に温度の関数が含まれているので、解くことが困難である。そこで、(A9)式を用いて(A6)～(A8)式を変数変換する。

$$F = \int_0^T \kappa_T dT \quad (A9)$$

(A9)式から、 $\partial F = \kappa^* \partial T$ より、(A6)～(A8)式は(A10)～(A12)式となる。

$$\kappa^*(T) \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial F}{\partial \xi} \right\} = \frac{\partial F}{\partial \eta_i} \quad (A10)$$

$$\eta_i=0 \text{ で } F=0 \quad (A11)$$

$$\xi=0 \text{ で } \partial F/\partial \xi=0$$

$$\xi=1 \text{ で } \partial F/\partial \xi = Q_i \frac{\kappa^*(T)}{\lambda^*(T)} \quad (A12)$$

文 献

- 1) 水谷安伸, 西川直宏, 高津 學, *J. Ceram. Soc. Japan*, **102**, 868-74 (1994).
- 2) 竹内洋一郎, “熱応力”, 日新出版 (1971) p. 274.
- 3) 小泉 堯, 谷脇 力, 日本機械学会論文集 (第1部), **31**, 9-15 (1965).
- 4) D. P. H. Hasselman and G. E. Youngblood, *J. Am. Ceram. Soc.*, **61**, 49-52 (1978).
- 5) K. Satyamurthy, J. P. Singh, D. P. H. Hasselman and M. P. Kamat, *J. Am. Ceram. Soc.*, **63**, 363-67 (1980).
- 6) B. K. Ganguly, K. R. McKinney and D. P. H. Hasselman, *J. Am. Ceram. Soc.*, **58**, 455-56 (1975).
- 7) 高津 學, 西川直宏, 水谷安伸, 化学工学論文集, **19**, 633-38 (1993).
- 8) 大野 豊, 磯野和夫, “数値計算ハンドブック”, オーム社 (1990) p. 337.
- 9) 例えば, 若松 盈, 高津 學, 無機材料工学演習, 日刊工業新聞社 (1980) p. 145.
- 10) 中村哲朗, “セラミックスと熱”, 技報堂出版 (1985) p. 31.
- 11) A. Goldsmith, T. E. Waterman and H. J. Hirschhorn, “Handbook of Thermophysical Properties of Solid Materials, Vol. III”, The Macmillan Co., New York (1961).
- 12) W. D. Kingery, *J. Am. Ceram. Soc.*, **38**, 3-15 (1955).
- 13) T. B. Jackson, *J. Am. Ceram. Soc.*, **73**, 2511-14 (1990).
- 14) 日本熱物性学会編, “熱物性ハンドブック”, 養賢堂 (1990) p. 250.
- 15) 高津 學, 材料, **30**, 607-10 (1981).
- 16) 水谷安伸, 西川直宏, 高津 學, 材料, 投稿中.
- 17) S. S. Manson and R. W. Smith, *J. Am. Ceram. Soc.*, **38**, 18-27 (1955).
- 18) A. F. Emery and A. S. Kobayashi, *J. Am. Ceram. Soc.*, **63**, 410-15 (1980).
- 19) P. F. Becher, *J. Am. Ceram. Soc.*, **64**, C17-18 (1981).
- 20) J. P. Singh and D. P. H. Hasselman, *J. Am. Ceram. Soc.*, **66**, C194-95 (1983).
- 21) P. F. Becher, D. Lewis, K. R. Carman and A. C. Gonzalez, *Am. Ceram. Soc. Bull.*, **59**, 542-48 (1980).
- 22) D. P. H. Hasselman, *Am. Ceram. Soc. Bull.*, **49**, 1033-37 (1970).