電磁気学こぼれ話

—超伝導応用のための電磁気学の問題 第2話—

松下 照男[†], 船木 和夫^{*}Topics and Tidbits in Electromagnetism for
Applications of Superconductivity: Part 2Teruo MATSUSHITA[†] and Kazuo FUNAKI^{*}

Synopsis: This article focuses on Poynting's vector which is defined by a vector product of electric and magnetic fields and plays an important role in considering a flow of electromagnetic energy between power supplies and various types of electromagnetic devices in electrical, electronical and information networks. Poynting's vector is introduced from a law of energy conservation and its surface integral on an arbitrary domain is equal to the electromagnetic power inside it. This relation can be applied to any system in which there is an interest in the energy flow. Validity of the speculation that Poynting's vector directly gives the energy flow is examined in various cases. It is pointed out that Poynting's vector is not equal to the energy flow in some cases. Also discussed is the condition under which the equality holds.

Keywords: Poynting's vector, electromagnetic-field energy flow, AC loss in superconductors

1. はじめに

本稿は本誌 2003 年 7 月号に掲載の「電磁気学こぼれ話—超伝導応用のための電磁気学の問題 第1話—」¹⁾の続編としてまとめている。お気付きの方も多いと思うが著者が第1話と違っている。第1話著者の入江富士男氏は7月号発刊直後に他界されご本人は出版物としては「第1話」と対面されてはいない。この続編は、同氏が生前に構想・概要をメモ書きとして残しておられたものを、同氏を同じく師とする著者の二人が受け継ぎ、可能な限り意に沿おうと努力しながら、互いに見解が異なりそうなところ（例えば、現象の解釈、記述方法など）をなんとか折りあわせて第2話とさせていただいたものである。このような経緯から、第2話の構想・概要のオリジナルは第1話の著者にあ

り、第2話に不手際があればそれは全て第2話の著者の責である。

本稿ではポインティングベクトルを取り上げている。第1話でも取り上げられている起電力や電圧・電界に加えて電流・磁界を登場させるとポインティングベクトルが導入できる。大学・高専などの電磁気学の講義ではずいぶん後の方で導入されるので場合によっては表舞台から隠れがちになるが、電源から電気電子・通信情報設備への電磁エネルギーの流れを考えるとときには大事な役目を果たすであろうし、また、このことを利用してエネルギーの移送や損失などの評価が可能になる。さらに、ポインティングベクトルを光速の2乗で割ったものが電磁界の運動量密度に等しい、という点も指摘しておきたい。このことから、電磁運動量を含む運動量の総和の保存などが議論できる。このうち、本稿では電磁エネルギーに焦点を合わせているが、特に、超伝導体では常伝導金属におけるジュール損失とは異なる損失が発生するので、損失測定などにおいてはポインティングベクトルのことを正確に理解することが大事であろう。このような訳で、超伝導工学の分野では超伝導体の電磁氣的振舞いを理解し利用するときにポインティングベクトルは重要な役割を果たすことになる。ここでは第1話著者の入江氏が構想・概要の中で指摘していたポインティングベクトルの基本的考え方に基づいて、エネルギーの流

Received January 7, 2004

九州工業大学情報工学部電子情報工学科

820-8502 飯塚市川津 680-4

Department of Computer Science and Electronics,

Faculty of Computer Science and Systems Engineering,

Kyushu Institute of Technology, 680-4 Kawazu,

Iizuka 820-8502, Japan

^{*}九州大学超伝導システム科学研究センター

812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1

^{*}Research Institute of Superconductor Science and Systems,

Kyushu University, 6-10-1 Hakozaki, Higashi-ku,

Fukuoka 812-8581, Japan

[†]E-mail:matusita@cse.kyutech.ac.jp

れとしてのポテンシャルベクトルの利用の仕方や利用するに当って注意を要する点、電源の取扱い方などをまとめることにした。また、著者らの独断でいくつかの適用例も追加して示した。

2. 電磁エネルギーの流れとポインティングベクトル

まず、突然ではあるが、電界 $\mathbf{E}$ と磁界 $\mathbf{H}$ のベクトル積 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ を導入しよう。次にこの量の発散を考えると、よく知られたベクトル公式を使って次式のように展開できる。

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} \quad (1)$$

右辺の電界と磁界の回転をマクスウェルの方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3)$$

により変形し、(1) 式の両辺を任意の閉領域 V について体積分して整理すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} -\int_A (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{A} &= \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV \\ &+ \int_V \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dV + \int_V \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{J}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{B}$ はそれぞれ電流密度、電束密度、磁束密度であり、誘電率 ε と透磁率 μ を用いると $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ である。また、(4) 式を得る時、数学のガウスの定理を用いている。左辺の面積分の領域 A は、領域 V の表面（一般には複数の閉曲面の組）であり、面素 $d\mathbf{A}$ の向きは領域 V からみて外向きを正方向にとる約束である。

(4) 式の右辺各項についてその意味を考えてみよう。まず、右辺の第2項と第3項は、よく知られているように単位時間当りに領域 V で変化する電界と磁界のエネルギーである。この2項の被積分項の和を時間積分すると

$$\begin{aligned} u &= \int \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dt + \int \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dt \\ &= \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \end{aligned} \quad (5)$$

となり、電界と磁界のエネルギー密度の変化分になっている。次に、(4) 式の右辺第1項は、電流の担い手である電荷に対してなされる単位時間当りの力学的仕事である。このことは、

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = n(q\mathbf{E}) \cdot \mathbf{v} \quad (6)$$

と書き換えるとよくわかる。 n 、 q 、 $\mathbf{v}$ はそれぞれ電荷の数密度、電気量、速度である。考えている電荷が真空中にあ

る場合には、電荷は加速されていき右辺の第1項は単位時間当りに電荷が受け取る運動エネルギーとみなせる。また、考えている電荷が抵抗体を流れる電流を担っている場合には、この量は熱となって散逸される。オームの法則 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ が成り立っている抵抗体では、発熱パワー密度は $\mathbf{J}^2/\sigma$ である。さらに、混合状態にある第2種超伝導体に流れる電流の場合には、当初は電流を担っている電荷が加速されることになるが、これにより電流密度が臨界レベルを超えると磁束フローが生じ、(4) 式の右辺第1項はそれに見合う発熱を与える項とみなすことができる。ただし、正確には後で (23) 式にも示すように、超伝導電子の運動エネルギーへの寄与分は、その領域が表面から磁界の侵入深さ λ 程度に限られるので、薄膜を除く通常の超伝導機器など、表面電流を無視した臨界状態モデルが成立する場合においては無視できる。後の [例8] にその具体例を示す。

このように考えてくると、(4) 式の右辺は単位時間当りに領域 V につぎ込まれたエネルギーの総和を表していることがわかる。さらに、(4) 式にエネルギー保存則を適用すると、その左辺は単位時間当りに領域 V の境界 A から流れ込む電磁エネルギーとなり、符号まで考慮して

$$\int_A (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{A} \quad (7)$$

は、境界 A を通過する全電磁エネルギー（領域 V からみて外向きが正方向）と考えてよいことになる。ここで、(7) 式の被積分項

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (8)$$

をポインティングベクトルという。この量をそのまま単位面積当り単位時間当り通過する電磁エネルギーと言ってよいかどうかは、少し注意を要する。このことについては、後で詳しく示すことにする。ここでは、もう少し具体的な例により (4) 式を説明しておこう。

Fig. 1 に電源に接続されたマグネットシステムを示す。マグネットの中には測定用試料が置かれている。このマグネットシステムに (4) 式を適用して電磁エネルギーの収支

Fig. 1 Magnet system with a power supply, which includes a specimen for measurement.

を考える場合、対象の V は Fig. 1 では陰影をつけた領域であり、その境界 A は電源を取囲む閉曲面 $A1$ と全体を取囲む閉曲面 $A2$ の和となる。他に電磁氣的に相互作用するシステムがないか、またはその効果がほとんど無視できる場合には、閉曲面 $A2$ については十分遠くにとることができるので、(4) 式左辺の面積分において $A2$ からの寄与分は無視できる。その結果、(4) 式は次式ようになる。

$$-\int_{A1} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{A} = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV + \int_V \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dV + \int_V \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV \quad (9)$$

ここで、領域 V は閉曲面 $A1$ で囲まれた電源を含む領域を除く全空間となる。この時、(9) 式の左辺は電源からマグネットシステムおよび周りの空間へ送られる単位時間当りの全電磁エネルギーである。通常は、電流密度 $\mathbf{J}$ はマグネットの巻線内と試料内(電磁誘導による)に局在するので、右辺第1項はこの部分での損失を与える。もし、電源が交流電源であり全系の電磁氣的諸量が周期的変化をするのであれば、(9) 式の両辺をその1周期にわたり時間積分すると左辺の積分より領域 V 内での全損失が評価できる。この全損失には、右辺第1項による巻線・導線と試料内の発熱、第2項と第3項による誘電体及び磁性体のヒステリシス損失が含まれる。もしも誘電体や磁性体のヒステリシス損失が無視できる場合には、巻線・導線と試料内の損失が評価できることになる。また、マグネットの巻線や試料が超伝導体の場合に発生する交流損失も右辺第1項による損失として評価できる。

対象を試料にのみ絞る場合には、Fig. 1 において、領域 V は試料を取囲む閉曲面 $A3$ の内部であり、境界 A は $A3$ そのものとなる。この場合、系内のエネルギー収支を与える関係式(9)式において左辺面積分の領域 $A1$ を $A3$ に置き換えれば同様の議論が試料に対して行える。

このような考え方を使って超伝導線の交流損失を評価するために、実際にコイル内で超伝導線が置かれている電磁氣的環境(例えば、交流磁界と交流電流の同時掃引など)を模擬しながら、超伝導線あるいは試料コイルの周りのポインティングベクトルを直接測定する方法が提案されている²⁻⁴⁾。また、外部交流磁界下の交流損失評価法として広く用いられているピックアップコイル法では、磁化法とも呼ばれているように、コイルの部分で磁界が一様であるという条件下で超伝導線内のしゃへい電流によるマクロな磁化を測定してそのヒステリシス曲線から損失評価できる。これについても別の考え方をすると、ピックアップコイルの端子電圧を使って、ピックアップコイルを置いた円筒側面上のポインティングベクトルを測定して(9)式を1周期積分することにより損失を評価していることが示される。実際、この方がより一般的な考え方であるとして、ピック

アップコイル法による交流損失の測定法の標準化作業は後者の考え方で進められた⁵⁾。

さて、これまで対象とする系から電源を除いて議論してきた。一般に、電源は電磁氣的現象として記述されるとは限らないからである。特殊な場合として、電源中の非電磁氣的外力による界を $\mathbf{E}_e$ として等価的に表すことができるとして、対象の系 V に電源まで含めて議論してみよう。(ここでは、 $\mathbf{E}_e$ を起電力電界と呼ぼう¹⁾。ただし、静電界とは異なって非保存な界である。また、電池の負極から正極まで $\mathbf{E}_e$ を線積分すると起電力に等しい。)このとき、Fig. 1では、 V は領域 $A2$ 内の全領域であり、(4) 式と同様の手順をとると

$$\int_{V(\text{battery})} \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{J} dV = \int_{V(\text{otherwise})} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV + \int_V \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dV + \int_V \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV \quad (10)$$

が得られる。ここで、 $V(\text{battery})$ と $V(\text{otherwise})$ は積分領域を電池内および電池の外に限ることを示している。この後例示するように $\mathbf{E}_e \cdot \mathbf{J} \geq 0$ であるから上式の左辺は全体として正で、電源内で発生する単位時間当りの電磁エネルギーを表している。(10) 式と(4) 式を比較して分かるように、電源を等価的に系内に導入するかどうかということは、電源で発生する電磁エネルギーを直接評価するのか、あるいは流出してくるエネルギー流を電源を取囲むある閉曲面で評価するかの違いであり、どちらの立場をとっても基本的には同じである。ただし、電源内の現象が電磁氣的に扱いづらい場合には(4) 式の立場で進めることになる。

電源の性質を起電力電界として等価的に表す一例として、Fig. 2 に乾電池と抵抗体の直列接続回路を示す。ただし、回路構成後十分時間が経過して定常状態が実現しており、乾電池の内部抵抗や導線の抵抗は無視できるとする。定常電流を維持するために電源は起電力により電荷を供給して抵抗体内には静電界 $\mathbf{E}$ を発生させ、抵抗体内ではこの電界により電荷は駆動されて例えばオームの法則に沿って図のように電流密度 $\mathbf{J}$ の電流が流れている。つま

Fig. 2 Series circuit of dry battery and resistor.

り、 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ だけ発熱している。一方、電源内でも電極の正負の電荷によりやはり静電界 $\mathbf{E}$ が発生しているが、これに逆らって抵抗体に電流を流す（その分の電荷を負極から正極にくみ上げる）ものが外力の起電力電界 $\mathbf{E}_e$ （破線の矢印）である。この場合 $\mathbf{E}$ と $\mathbf{J}$ は逆向きであるので、 $\mathbf{E}_e = -\mathbf{E}$ を考慮して電池内では単位時間当たり $\mathbf{E}_e \cdot \mathbf{J}$ のエネルギーが生成されているといえる。結局、定常状態であることを考慮すると、(10) 式は

$$\int_{V(\text{battery})} \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{J} dV = \int_{V(\text{resistor})} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV \quad (11)$$

となり、電池で生成された電磁エネルギーはそっくり抵抗体で消費されるという至極あたり前の結果を得るだけになる。ここで、 $V(\text{resistor})$ は積分領域を抵抗体内に限ることを示している。そのエネルギーの流れは電池を囲む閉曲面 $A1$ 上でも抵抗体を囲む閉曲面 $A3$ 上でもポインティングベクトルを面積分して評価することができる。円筒形状の抵抗体の損失を 4 端子法により通電電流と円筒表面に沿わせた電圧リードの端子電圧の積から求めることがよくある。この場合も、円筒状試料の周りの電磁気的環境がよい近似で軸対称とみなせると仮定して、その側面から抵抗体に流れ込んでいる電磁エネルギー流をその表面で面積分してその総量を評価していることと同じことであることを示すことができる（超伝導体でも同様）。通電時の抵抗体への電磁エネルギーの侵入の経路やその測定法との関係などの詳細については、以下に示すいろいろな事例を参考に考えていただくことにしよう。

3. ポインティングベクトルの諸例

以上の議論により、ポインティングベクトルがエネルギーの流れを表しているように考えられる。多くの著書にもそのような記述があるが、それが本当であるか、いくつかの例をみてみよう。

3.1 エネルギーの流れを表す場合の例

[例 1] ここで、Fig. 3 のように終端を短絡した長さ L の平行導体板に電流 I を流した場合のことを調べてみることにする。導体板の単位長さ当たりの抵抗を R' とすると、この電流を流すためには、平行導体板に $V = 2R'LI$ の電圧をかける必要がある。平行導体板の中 w に比べて間隔 d が十分に狭ければ、電界は導体板の間に集中し、上の導体板から下の導体板の方向に向く。その強さは、電源側の端からの距離を x として $E = (L - x)V/Ld$ で与えられる。一方、電流による磁界の強さ H は、外部にも漏れるが、ほぼ平行導体板の間に集中し、その強さは $H = I/w$ で長さ方向に一樣であり、紙面に垂直で、裏向きである。したがってポインティングベクトルは電源から平行導体板の終端の方向へ向いており、その大きさは

$$S = \frac{VI}{wd} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (12)$$

Fig. 3 Long parallel slab conductors connected at the terminal.

となる。すなわち S はその位置より先に送られる単位面積当たりの電力を表しており、そして図のように $x = x_1$ と $x = x_2 (> x_1)$ の 2 つの面で区切られる領域を考えると、この領域に入るポインティングベクトルは

$$\Delta S = \frac{2R'I^2}{wd}(x_2 - x_1) \quad (13)$$

となって、この領域での消費電力を与える。これはポインティングベクトルがエネルギーの流れを表した例である。

超伝導体に同様に一定の電流が流れる場合、電界がゼロとなるためポインティングベクトルはゼロとなる。消費される電力もゼロであり、したがって問題はない。

[例 2] これ以外にポインティングベクトルがエネルギーの流れと対応した例を見てみよう。よく知られた例としては電磁波が挙げられる。電界が y 軸成分 E_y を、磁界が z 軸成分 H_z をもち、真空中を x 軸方向に光速 c で進む平面電磁波は

$$E_y(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \quad (14a)$$

$$H_z(x, t) = \left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2} E_0 \cos(\omega t - kx) \quad (14b)$$

で与えられる。ただし、 ω は角周波数、 $k = \omega/c$ は波数である。この場合の空間の電磁界のエネルギー密度は

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_y^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H_z^2 = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) \quad (15)$$

で与えられることが知られているが、ポインティングベクトルは x 軸方向を向き、その大きさは

$$S_x = \left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2} E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) = cu \quad (16)$$

である。ただし $c = 1/(\epsilon_0 \mu_0)^{1/2}$ を用いた。このように、ポインティングベクトルは単位面積を単位時間に通過するエネルギーを表している。

[例 3] 次に、コイルを励磁する場合について考えてみよう。長い、単位長さ当たりの巻数が n のソレノイドコイルを考え、簡単のため平均半径を r とし、厚みを無視する。このコイルに電流 I を流して励磁する。電流が i のとき、コイルの内表面における磁束密度は $B = \mu_0 ni$ であり、

コイルの1巻きを貫く磁束は $\phi = \pi r^2 \mu_0 n i$ である。したがって、電流増加により誘導される電界は、電流と反対の方向に向き、その大きさは

$$E = \frac{1}{2\pi r} \cdot \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2} \mu_0 n r \frac{di}{dt} \quad (17)$$

となる。これより、コイルの内表面におけるポインティングベクトルは

$$S = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 r i \frac{di}{dt} \quad (18)$$

となり、その方向はコイルの内側の空間に向いている (Fig. 4 参照)。したがって、コイルの単位長さのポインティングベクトル $2\pi r S$ を電流がゼロから I になるまで積分すると

$$\begin{aligned} U &= \int 2\pi r S dt = \int_0^I \mu_0 \pi r^2 n^2 i di \\ &= \frac{1}{2} \pi r^2 \mu_0 n^2 I^2 = \frac{1}{2} L' I^2 \end{aligned} \quad (19)$$

となり、コイルの単位長さ当たりの蓄積エネルギーとなる。ただし、 $L' = \pi r^2 \mu_0 n^2$ は単位長さ当たりの自己インダクタンスである。

[例4] 次に、電荷に対する力学的仕事に関与する例を取り扱ってみよう。簡単のため、半無限 ($x \geq 0$) の超伝導体の表面に平行に z 軸方向に磁界を加えた場合を考えよう。外部磁界 H_0 が下部臨界磁界 H_{c1} より小さいとすると、内部の磁束密度の分布は、 λ を磁界の侵入深さとして

$$B(x) = \mu_0 H_0 \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \quad (20)$$

となる。したがって、これによる電流は y 軸方向に

$$J(x) = -\frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\partial B(x)}{\partial x} = \frac{H_0}{\lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \quad (21)$$

のように流れ、 H_0 の時間変化により生じる電界は、同じく y 軸方向に

$$E(x) = \lambda \mu_0 \frac{\partial H_0}{\partial t} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \quad (22)$$

Fig. 4 Directions of vectors in a plane normal to the center axis of a solenoid.

となる。よって、外部磁界の変化により単位表面積の超伝導体内の電荷に与える仕事率は

$$\int_0^\infty J(x) E(x) dx = \frac{\lambda \mu_0 H_0}{2} \cdot \frac{\partial H_0}{\partial t} \quad (23)$$

で与えられる。一方、同じく単位表面積の超伝導体内の磁界のエネルギーの変化は

$$\int_0^\infty \mu_0 H(x) \cdot \frac{\partial H(x)}{\partial t} dx = \frac{\lambda \mu_0 H_0}{2} \cdot \frac{\partial H_0}{\partial t} \quad (24)$$

で与えられる。よって、この両者の和は $\lambda \mu_0 H_0 \partial H_0 / \partial t$ となり、表面におけるポインティングベクトル

$$E(0)H(0) = \lambda \mu_0 H_0 \frac{\partial H_0}{\partial t} \quad (25)$$

に等しい。すなわち、この場合、ポインティングベクトルによるエネルギーの流れは超伝導体内の電荷に与える力学的仕事 (運動エネルギー) と磁界のエネルギーに等分される。なお、高周波で使用する超伝導デバイスなどにおいて二流体モデルが成立する場合には、電流に常伝導電流が加わり、ポインティングベクトルにオーミックな損失パワーも含まれる⁶⁾。

以上の4つの例で示したように、ポインティングベクトルはエネルギーの消費、輸送、蓄積に関係したエネルギーの流れに対応している。

3.2 エネルギーの流れに対応しない場合

[例5] しかしながら、実際にはそのようなエネルギーの流れに対応しないポインティングベクトルもある。その例として、Fig. 3の平行導体板の終端を開放した場合について考えてみよう。この場合は電流は流れず、平行導体板の間に磁界は生じない。そこで別の源である永久磁石により、Fig. 5のようにこの空間に一樣な磁界 (強さ H_0) を与えたとする。このとき電圧降下がないので、平行導体板の間の電界の強さは一定で $E = V/d$ となる。よって、この場合のポインティングベクトルは平行導体板の初めから終端まで一定の大きさ

$$S = \frac{V H_0}{d} \quad (26)$$

をもち、その方向は電源から平行導体板の終端の方向に向いている。したがって、ポインティングベクトルは平行導体板の間の空間を突き抜けている。さらに正確に言えば、このような静電磁界の場合のポインティングベクトルは全空間で還流しており、任意の閉曲面を A として

$$\int_A (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (27)$$

であることが証明できる。すなわち、(4)式において電束密度 $\mathbf{D}$ および磁束密度 $\mathbf{B}$ の時間変化がなく、電流密度 $\mathbf{J}$ がゼロであることから理解できよう。今の例の場合、ポインティングベクトルは導体板の外の空間を電源の方向に流れ

Fig. 5 Long parallel slab conductors not connected at the terminal. The same magnetic field as in Fig. 3 is applied in the region between the two slabs by permanent magnets.

戻っている。このような静電磁界の場合にポインティングベクトルがエネルギーの流れを表すと言っても意味がない⁷⁾。実際に(26)式のポインティングベクトル(を $w d$ 倍したもの)は電力とは関係ない。なお、ここではある領域をとったときにベクトルの面積分がゼロで、対応する量は入った分だけ出ていっている状態をその領域で「還流する」と表現しているが、数学的には発散がないということの意味する。

なお、Fig. 3 の例において閉曲面を **Fig. 6(a)** の平行六面体のようにした場合を考えてみよう。Fig. 3 の議論では閉曲面の左側からポインティングベクトルに対応した電力が流入し、右側からその一部が流出することになっており、その差の分が抵抗で消費される電力となっていた。しかし、この閉曲面の中には抵抗が含まれていないことから上の議論が正しくないように見える。お分かりのことと思うが、Fig. 3 の議論は近似的なものでしかない。正しくは、導体内においても電圧降下があるので、等電位面は Fig. 6(b) のようになり、電界の向きは平行導体板には垂直でない。したがってポインティングベクトルも平行導体板には平行でなく、等電位面内にあり、Fig. 6(a) の上下の面から残りの部分が抜け出している。すなわち、この閉曲面の内部ではポインティングベクトルは還流している。この上下の面からポインティングベクトルに対応して導体に入る電力が導体の内部で消費される電力を与えるが、これは各自で確かめられたい(導体内ではポインティングベクトルは導体に沿う成分をもたないことに注意)。

ここまでポインティングベクトルがエネルギーの流れに対応した場合と対応しない静電磁界の場合を見てきたが、次に、範囲を広げ、その中間の静的成分を含む電磁界の例を見てみよう。ただし静的電磁界の供給源が変動する電磁界もしくは電流の供給源とは独立であるものとする。

【例6】 まず、Fig. 3 の例の場合に永久磁石による磁界(強さ H_0) を重畳したとする。位置 x の面におけるポイン

Fig. 6 (a) Assumed closed surface. (b) Equipotential surface, electric field and Poynting's vector.

ティングベクトルは

$$S = \frac{V}{d} \left[\frac{I}{w} \left(1 - \frac{L}{x} \right) + H_0 \right] \quad (28)$$

となり、実質のエネルギーの流れ、すなわち単位面積を通過する電力には永久磁石による磁界 H_0 を含まない、電流による磁界だけが関与する。

【例7】 もう一つの例として、平面電磁波に直流電界を重畳した場合を考える。(14)式で与えられる電磁界に対して y 軸方向に一定の直流電界 E_a を重畳した場合のことを考えてみると

$$S_x = \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} [E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) + E_0 E_a \cos(\omega t - kx)] \quad (29)$$

となり、第1項が電磁波として伝はんするエネルギーの流れで(16)式に等しく、直流電界の重畳により変化はない。一方、第2項はエネルギーの流れと見なしても差し支えないが、意味のない項である。実際に1周期にわたって平均するか、広い空間にわたって平均すればゼロとなる。

こうした実質のエネルギーの流れとポインティングベクトルの差はどこから生じたのであろうか。元来、ポインティングベクトルの面積分を時間積分したものが(5)式におけるようなエネルギーの変化分(すなわち蓄積エネルギーの変化分)と(6)式に対応した散逸エネルギーの和に等しいという関係からスタートしたもので、そこからポインティングベクトルがエネルギーの流れを与えるという解釈が生まれた。しかしながら、本来はエネルギーの流れを表すベクトルを求めるという問題は、数学的には(4)式の右边が与えられたときに左辺の $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ のところにあるべき量を求めるという問題である。エネルギーの流れは電磁

界のエネルギーの変化, または散逸がなければゼロとなるべきものである。しかし, 静電磁界ではあっても電磁界が存在すればポインティングベクトルはゼロではなく, 明らかに両者の間に違いが生じている。数学的にはこの違いはベクトル $\mathbf{K}$ を用いて

$$\mathbf{S}_0 = \text{rot} \mathbf{K} \quad (30)$$

と表される量 $\mathbf{S}_0$ で与えられる。したがって, 一般的にポインティングベクトルにはこのような不確定さがつきまとうのであって, そのためにエネルギーの流れとの違いが生じることがある。

以上をまとめると, ポインティングベクトルをエネルギーの流れと考えていいのは, (4) 式から明らかのように

- (1) 電界 $\mathbf{E}$ の時間変化
- (2) 磁界 $\mathbf{H}$ の時間変化
- (3) 電荷に働く力学的仕事

があった場合に限られる。したがって, 静電磁界は含まれない。この結果を拡張してポインティングベクトルにこれ以外の静電磁界による成分が加わる場合でも問題はないが, 「エネルギーの流れ」の意味が失われる。

3.3 ポインティングベクトルの有用性

以上のように注意してポインティングベクトルを取り扱えば, それからエネルギーの流れを求めることができる。しかし, 重要なことはそうした解釈によらなくても, (4) 式の関係はあらゆる場合において正しく, 2 節で述べたように, 目的とした領域において電界 $\mathbf{E}$ と磁界 $\mathbf{H}$ で定義されたポインティングベクトルを用いて, その内部に流入するエネルギーを求めることができることである。その一つの例として, 超伝導体試料に交流磁界がかかった場合の交流損失について示そう。

[例 8] 十分広い, 厚さ $2d$ の超伝導平板 ($0 \leq x \leq 2d$) に平行に交流磁界を印加した場合を考える。超伝導平板の臨界電流密度を J_c として, 交流磁界振幅 H_m が中心到達磁界 $H_p = J_c d$ 以下であるとする。磁界の方向を z 軸とすると, y - z 面内では一様で, x 軸方向にのみ変化すると仮定できる。定常状態を取り扱い, 超伝導平板の表面磁界 H_0 が最大値 H_m から減少した場合を考える。このとき, 対称性より, 平板の半分の領域 $0 \leq x \leq d$ のみを考えればよく, 超伝導平板内の磁束密度の分布は Fig. 7 のようになり, $0 \leq x \leq x_0$ の領域では

$$B(x) = \mu_0 [H_0(t) + J_c x] \quad (31)$$

と表される。分布の折れ曲がり点 x_0 は

$$x_0 = \frac{H_m - H_0}{2J_c} \quad (32)$$

で与えられる。 H_0 の変化により $0 \leq x \leq x_0$ の領域の磁束密度が変化し, これより電界 (y 軸方向) が

$$E(x) = - \int_{x_0}^x \frac{\partial B}{\partial t} dx = \mu_0 \frac{\partial H_0(t)}{\partial t} (x_0 - x) \quad (33)$$

Fig. 7 Magnetic flux distribution in half of a superconducting slab when an external magnetic field is reduced from H_m .

のように生じる。したがって, 表面におけるポインティングベクトルは

$$S = E(0)H(0) = \frac{\mu_0}{2J_c} (H_m - H_0) H_0 \frac{\partial H_0}{\partial t} \quad (34)$$

の大きさを, x 軸の正方向 (超伝導平板の内側) に向いている。これを半周期 (H_0 は H_m から $-H_m$ へ変化) にわたって時間積分し

$$\begin{aligned} \int S dt &= \frac{\mu_0}{2J_c} \int_{H_m}^{-H_m} (H_m - H_0) H_0 dH_0 \\ &= \frac{\mu_0 H_m^3}{3J_c} \end{aligned} \quad (35)$$

を得る。残りの半周期も同様となり, これから 1 周期の間に超伝導平板の片面の単位面積から入るエネルギーはこの 2 倍の $2\mu_0 H_m^3/3J_c$ となる。したがって, 交流損失エネルギー密度は

$$W = \frac{2\mu_0 H_m^3}{3J_c d} = \frac{2\mu_0 H_m^3}{3H_p} \quad (36)$$

となり, よく知られた理論結果に一致する。また, 当然のことながら, (4) 式の右辺の第 1 項により損失を計算してみても (36) 式に一致する。なお, 得られた結果が損失であるという結論は, ここで取り扱っているのが周期的な場合であり, かつ, 分布の対称性より各 1/2 周期の最初と最後で蓄積エネルギー (磁気エネルギー) が変わらないことから導かれるものである。直流磁界が重畳されて分布が非対称な場合の損失は 1 周期にわたって計算する必要がある。また, 超伝導円柱に交流電流を流した場合の損失をポインティングベクトルから計算した例⁸⁾もある。

このように超伝導体試料表面のポインティングベクトルを 1 周期にわたって測定することによって超伝導体内の損失エネルギーを求めることが可能で, 実際にそうした実験が行われていることは前節で述べた。

4. まとめ

本稿ではポインティングベクトルについて説明を行い、それがエネルギーの流れについての情報を与えることを示した。ただし、ポインティングベクトルそのものがエネルギーの流れを与えうるか、という点については、いくつかの例を通して議論した。具体的には、エネルギーが抵抗体や超伝導体において消費される場合、電磁波のように輸送される場合、そしてコイルにおけるように蓄積される場合など、対応する電磁界が静的なものでなければ、確かにポインティングベクトルはエネルギーの流れを表していることが示された。しかしながら、電界および磁界の両方、もしくはその一方が静的な場合には、ポインティングベクトルがエネルギーの流れに完全に一致していないことを示した。なお、電界により電流が流れる場合は、定常状態ではあっても真の静的状態ではないので、注意すべきである。

このように、すべての場合においてポインティングベクトルがエネルギーの流れを表しているわけではないが、これはポインティングベクトルに問題があるというよりは(4)式に対する行き過ぎた解釈に問題があるとするべきであろう。すなわち、ポインティングベクトルがエネルギーの流れに対応していない静的な電磁界の場合においても、(4)式そのものは正しい記述をしているのである。その意味では、(4)式におけるようにポインティングベクトルの面積分をとる限りにおいては何の問題もないと言える。

そうした点を心得ていれば、ポインティングベクトルは極めて有用な量である。例えば、[例8]で示したように、超伝導体における交流損失を計算するにあたっては(4)式の右辺第1項を体積分する必要がなく、表面における電磁界の値さえわかればよいという便利さがある。さらに超伝導マグネットの一部分の線材の損失のように、流れる電流による自己磁界と周囲からの磁界が重畳したような場合でも、全損失をまとめて計算できる。実験においても、そうした状況を模擬して交流電流と交流磁界を同時に与える場合において、2つの源による損失を1つの測定システムで測定できる。したがって、こうした測定法は複雑な被測定系などの場合に威力を発するものと考えられる。

最後に、本講座を執筆するに当たり、恩師である入江氏の超伝導に関与した電磁気学についての深い洞察にあらためて接することができ、また、いただいた命題に関する個々の事例を追っていくことによりポインティングベクトルについての理解を得ることができたことは著者の喜びとするところであり、入江氏に深く感謝致します。

参考文献

- 1) F. Irie: "Topics and tidbits in electromagnetism for applications of superconductivity: Part 1," J. Cryo. Soc. Jpn. **38** (2003) 331-338 (in Japanese)
入江富士男: 「電磁気学こぼれ話 - 超伝導応用のための電磁気学の問題 第1話」, 低温工学 **38** (2003) 331-338
- 2) T. Ezaki, et al.: "System for coil simulation measurements of losses and instabilities in superconducting wires," Cryogenics **19** (1979) 731-735
- 3) K. Funaki, et al.: "A simple method for measurement of AC losses in superconducting wires under configuration of a double-layer non-inductive coil," Adv. in Cryog. Eng. **43** (1998) 341-348
- 4) F. Sumiyoshi, et al.: "AC loss measurement of high temperature superconducting tapes by the Poynting vector method," J. Cryo. Soc. Jpn. **35** (2000) 575-582 (in Japanese)
住吉文夫ら: 「ポインティングベクトル法による高温超伝導テープ線材の交流損失測定」, 低温工学 **35** (2000) 575-582
- 5) IEC 61788-8 First edition 2003-04 INTERNATIONAL STANDARD, Superconductivity-Part 8: AC loss measurements-Total AC loss measurement of Cu/Nb-Ti composite superconducting wires exposed to a transverse alternating magnetic field by a pickup coil method
- 6) T. P. Orlando and K. A. Delin: "Foundations of Applied Superconductivity," Addison-Wesley (1991) p. 112
- 7) 小谷正雄: 「電磁気学」, 岩波書店
- 8) 松下照男: 「磁束ピンニングと電磁現象」, 産業図書, 東京 (1994) p. 88

松下 照男

1948年3月29日生まれ。1972年3月九州大学大学院工学研究科修士課程修了。現在、九州工業大学情報工学部電子情報工学科教授。主に、超伝導体における磁束ピンニング機構と電磁現象および超伝導線材の応用に関する研究に従事。低温工学協会、電気学会、応用物理学会、日本物理学会、英国物理学会 (Fellow/Chartered Physicist) 会員。工学博士。

船木 和夫

1948年9月22日生まれ。1973年3月九州大学大学院工学研究科修士課程修了。現在、九州大学超伝導システム科学研究センター長。主に、超伝導体や線材・導体の電磁現象、酸化物超伝導の交流応用、超伝導電力機器の基礎研究の研究に従事。低温工学協会、電気学会、応用物理学会会員。工学博士。