強制振動による短い蓄熱器の安定な温度勾配

富永 昭

Stable Temperature Gradients of a Short Regenerator Induced by Forced Fluid Oscillations

Akira TOMINAGA

Synopsis: Discussions based on the first and second laws of thermodynamics confine the temperature gradient in a regenerator within some region. Experiments, however, show that forced fluid oscillations induce stable temperature distributions in regenerators. This fact suggests that it is possible to discuss stable temperature distribution by employing the law of minimum entropy production rate in addition to the first and second laws. In order to discuss stable temperature distribution analytically, a short regenerator where the local entropy production rate is homogeneous is supposed. Minimizing the entropy production rate of the short regenerator gives a thermodynamically stable temperature gradient, which depends on both oscillation mode and amplitude. Necessary conditions for realizing a stable temperature gradient in a short regenerator are also discussed.

Keywords: thermoacoustics, stable temperature gradient, law of minimum entropy production rate, second law of thermodynamics

1. はじめに

熱音響理論¹⁾と熱力学²⁾の第一法則と第二法則とを使って、熱音響現象を熱力学的に分類し、熱音響熱機関の必要条件を議論した³⁾。その結果、蓄熱器が熱音響熱機関として動作するために可能な温度勾配や位相差の範囲が限定された。しかしこの議論ではエントロピー生成最小の法則を使っていない。

エントロピー生成最小の法則も使うと、蓄熱器が熱音響熱機関として動作するために可能な温度勾配や位相差の範囲はより狭くなるだろう。またエントロピー生成最小の法則を使うことで、熱力学的に安定な熱音響現象が議論できるはずだ。しかし、エントロピー生成最小の法則をともに使うと解析的な議論が困難であり、数値計算に頼らざるを得ない。現実の有限長の蓄熱器では、蓄熱器全体に対してエントロピー生成最小の法則を使うべきであるが、局所的エントロピー生成が一樣ではないので議論が複雑になる。

局所的エントロピー生成が近似的に一樣と見なせるように、非常に短い蓄熱器を想定すると、解析的な議論が可能になるだろう。

本論文では、このような短い蓄熱器を想定し、エントロピー生成最小の法則を採用することで、強制振動による熱力学的に安定な温度勾配を議論する。

2. これまでのまとめ

熱音響現象を熱力学的に分類し、熱音響熱機関の必要条件を議論した際の議論³⁾を復習しておこう。記号は参考文献³⁾と共通である。

示量性状態量と移動量と生成量とは一組の概念であり、熱力学の基本法則は生成量に関わる経験則である。熱力学第一法則は局所的エネルギー生成の値が零であるという経験則であり、熱力学第二法則は局所的エントロピー生成が負になることは無いという経験則である。熱力学の第一法則と第二法則とは局所的にも成立している。熱力学系はエントロピー生成最小の状態が安定であり、例えば平衡状態では局所的エントロピー生成が零なので、熱力学第二法則に抵触することのない安定状態である。定常状態では局所的エントロピー生成が有限だが、エントロピー生成が最小の定常状態が安定な定常状態である。

平衡系では移動量と生成量が零であり、その代わりに示強性状態量が出現する。馴染みの平衡系の熱力学では状態量の間の関係を議論するので、移動量と生成量を忘れがちになる。しかし、熱音響現象のような非平衡系を議論する際には移動量と生成量が重要である。

熱力学²⁾によれば定常状態と周期的定常状態では、熱力学第一法則により、局所的エントロピー生成 Σ と仕事源 $W \equiv \text{div } \vec{I}$ とエントロピー流 $\vec{S}$ との間には

$$\Sigma = -\frac{W}{T_m} - \frac{\vec{S} \cdot \nabla T_m}{T_m}$$

の関係がある。熱音響現象は周期的定常状態なので、この関係を使うことができる。

Received August 20, 2004

筑波大学大学院数理物質科学研究科

〒305-8571 つくば市天王台1-1-1

Graduate School of Pure and Applied Science, University of Tsukuba,

1-1-1 Tennohdai, Tsukuba 305-8571, Japan

E-mail: tominaga@sakura.cc.tsukuba.ac.jp

熱力学第二法則 ($\Sigma \geq 0$) により

$$W + \tilde{S} \nabla T_m \leq 0$$

である。原動機ではその定義により

$$W > 0$$

なので、

$$\tilde{S} \nabla T_m \leq -W < 0$$

が必要である。ヒートポンプではその定義により

$$\tilde{S} \nabla T_m > 0$$

なので、

$$W \leq -\tilde{S} \nabla T_m < 0$$

が必要である。ドリームパイプでは

$$\begin{cases} W \leq 0 \\ \tilde{S} \nabla T_m \leq 0 \end{cases}$$

が必要である。

熱音響現象の理解は二つの階層構造からなる。上位の階層は熱力学的理解であり、下位の階層は流体力学的理解である。流体力学は局所平衡の仮定のもとに成り立つので、流体力学的理解は平衡系の熱力学にその基盤がある。二つの階層をつなぐための一つの提案が熱音響理論である。

熱音響理論¹⁾に依れば、仕事流 $\tilde{I}$ 、エントロピー流 $\tilde{S}$ 、仕事源 $W \equiv \text{div } \tilde{I}$ は

$$I = \sin \theta a_s \frac{1}{2} p_m \hat{A}^2$$

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \tilde{S}_\theta + \tilde{S}_D + \tilde{S}_\kappa \\ &= \left(a_\theta - \frac{\nabla T_m}{\Theta_D} \right) \frac{1}{T_m} a_s \frac{1}{2} p_m \hat{A}^2 + \tilde{S}_\kappa \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W &= W_\theta + W_v + W_p \\ &= \left(b_\theta \beta \nabla T_m - \Gamma \frac{\omega}{a_s} \right) a_s \frac{1}{2} p_m \hat{A}^2 \\ &= (\nabla T_m - \Theta_W) b_\theta \beta a_s \frac{1}{2} p_m \hat{A}^2 \end{aligned}$$

である。ここで

$$\begin{cases} \hat{A} \equiv \sqrt{\frac{\hat{p}}{p_m} \frac{\langle \hat{u} \rangle_r}{a_s}} \geq 0 \\ Z \equiv \frac{1}{p_m a_s} \frac{\hat{p}}{\langle \hat{u} \rangle_r} \geq 0 \end{cases}$$

はそれぞれ振幅とインピーダンスを規格化したものであり無次元量である。以下では規格化された振幅 $\hat{A}$ を振幅と呼び、規格化されたインピーダンス Z をインピーダンスと呼ぶことにする。インピーダンスは振幅に依らない。

$$\begin{cases} \Theta_D \equiv \frac{\omega Z a_s}{a_D c_p} > 0 \\ \Theta_W \equiv \frac{\Gamma}{b_\theta \beta} \frac{\omega}{a_s} \end{cases} \quad (1)$$

は、温度勾配の次元をもつパラメーターであり、振幅に依らない。 Θ_W の符号は $b_\theta \beta$ の符号と同じであるが $\Theta_W \neq 0$ である。

$$\Gamma \equiv \frac{b_v}{Z} + b_p Z (\gamma - 1) > 0$$

は振幅に依らない正の無次元量である。 Θ_D と Θ_W とは振動モード (角周波数 ω と位相差 θ とインピーダンス Z) に依存する。 Γ はインピーダンスに依存するが、相加平均は相乗平均よりも大きいので

$$\Gamma_{\min} \equiv 2 \sqrt{(\gamma - 1) b_v b_p}$$

より小さくなることはない。

$$\begin{cases} a_\theta \equiv -\text{Re} \{F_S g\} \sin \theta - \text{Im} \{F_S g\} \cos \theta \\ \quad = -|F_S g| \sin(\theta + \arg \{F_S g\}) \\ a_D \equiv -\text{Im} \{g_D\} \text{Re} \left\{ \frac{1}{1 - \chi_v} \right\} > 0 \end{cases} \quad (2)$$

と

$$\begin{cases} b_\theta \equiv \text{Re} \{F_S h\} \sin \theta - \text{Im} \{F_S h\} \cos \theta \\ \quad = |F_S h| \sin(\theta - \arg \{F_S h\}) \\ b_v \equiv -\text{Im} \left\{ \frac{1}{1 - \chi_v} \right\} > 0 \\ b_p \equiv -\text{Im} \{F_S \chi_\alpha\} > 0 \end{cases} \quad (3)$$

とは式を短くするために導入した無次元パラメーターであり、 a_θ と b_θ とは位相差 θ に依存する。

単純熱伝導によるエントロピー流

$$\tilde{S}_\kappa \equiv -\frac{\kappa}{T_m} \nabla T_m$$

は振幅に依存しない。

従って、局所エントロピー生成 Σ は

$$\Sigma = \Sigma_\theta + \Sigma_v + \Sigma_p + \Sigma_D + \Sigma_\kappa$$

$$\begin{cases} \Sigma_\theta \equiv -\frac{\tilde{S}_\theta \nabla T_m + W_\theta}{T_m} \\ \quad = -(a_\theta + b_\theta \beta T_m) \frac{\nabla T_m}{T_m^2} a_s \frac{1}{2} p_m \hat{A}^2 \\ \Sigma_v + \Sigma_p \equiv -\frac{W_v + W_p}{T_m} \\ \quad = \Gamma \frac{\omega}{T_m} \frac{1}{2} p_m \hat{A}^2 \geq 0 \\ \Sigma_D \equiv -\frac{\tilde{S}_D \nabla T_m}{T_m} \\ \quad = \frac{1}{\Theta_D} \left(\frac{\nabla T_m}{T_m} \right)^2 a_s \frac{1}{2} p_m \hat{A}^2 \geq 0 \\ \Sigma_\kappa \equiv -\frac{\tilde{S}_\kappa \nabla T_m}{T_m} \\ \quad = \kappa \left(\frac{\nabla T_m}{T_m} \right)^2 \geq 0 \end{cases}$$

である。熱音響理論だけでは Σ_θ の符号が定まらないので、熱力学第二法則 ($\Sigma \geq 0$) に抵触する場合もある。

Fig. 1 Classification of thermoacoustic phenomena in the $W - \nabla T_m$ plane as a result of negative $\tilde{S}$.

熱音響現象では $\tilde{S} < 0$ となるように座標軸の正方向を選ぶことで、熱音響現象が $W - \nabla T_m$ 平面で **Fig. 1** のように分類された。原動機は第1象限 ($W > 0$ かつ $\nabla T_m > 0$) であり、ヒートポンプは第3象限 ($W < 0$ かつ $\nabla T_m < 0$) であり、ドリームパイプは第2象限 ($W \leq 0$ かつ $\nabla T_m \geq 0$) である。第4象限 ($W \geq 0$ かつ $\nabla T_m \leq 0$) に対応する熱音響現象は、熱力学第二法則に抵触するので、存在しない。

この分類を使うと、熱音響熱機関（原動機とヒートポンプの総称）では

$$b_\theta \beta T_m > 0 \quad (4)$$

が必要であり、さらに、ヒートポンプでは

$$a_\theta < 0 \quad (5)$$

も必要である。つまり、熱音響熱機関では位相差 θ の可能な範囲が制限される。

∇T_m の可能な範囲については、ドリームパイプでは

$$\begin{cases} \nabla T_m \geq 0 & \text{for } \Theta_W < 0 \\ 0 \leq \nabla T_m \leq \Theta_W & \text{for } \Theta_W > 0 \end{cases} \quad (6)$$

であり、原動機では

$$\max \{ \Theta_W, a_\theta \Theta_D \} < \nabla T_m < \Theta_\kappa$$

であり、ヒートポンプでは

$$a_\theta \Theta_A < \nabla T_m < 0 \quad (7)$$

である。ここで

$$\Theta_\kappa \equiv -\frac{T_m \tilde{S}}{\kappa} > 0$$

と

Fig. 2 Amplitude dependence of Θ_A

$$\Theta_A \equiv \frac{a_s \frac{1}{2} p_m \hat{A}^2}{\kappa + \frac{1}{\Theta_D} a_s \frac{1}{2} p_m \hat{A}^2} < \Theta_D \quad (8)$$

は温度勾配の次元をもつ正のパラメーターである。 Θ_A の振幅依存性を **Fig. 2** に示した。 Θ_A は振幅の単調増加関数であるが振幅がどんなに大きくても Θ_D よりも小さい。

∇T_m の可能な範囲は振動モードに依存する。ドリームパイプでは振動モードで決まるが、原動機では振動モードだけでなくエントロピー流にも依存し、ヒートポンプでは振動モードだけでなく、振幅にも依存する。

下位の階層では任意に選ぶことが可能だった位相差 θ や温度勾配 ∇T_m が上位の階層により可能な範囲が制限されたことに注意して欲しい。

以上の議論からも判るように、エントロピー生成最小の法則はまだ使われていない。エントロピー生成最小の法則を使うと、位相差 θ や温度勾配 ∇T_m の可能な範囲がもっと狭くなるだろう。

以下では、エントロピー生成最小の法則を使って強制振動を議論する。

3. 強制振動による熱力学的に安定な温度勾配

強制振動による熱音響現象にはヒートポンプとドリームパイプとがある。強制振動では、振動モード（角周波数 ω と位相差 θ とインピーダンス Z ）と振幅 $\hat{A}$ が与えられている。このために熱音響理論を使うと仕事流 $\dot{I}$ が決まる。温度勾配 ∇T_m の可能な範囲については、ドリームパイプでは (6) であり、ヒートポンプでは (7) である。このことは熱力学の第一法則と第二法則の結果である。さらに ∇T_m が (6) や (7) の範囲内で与えられれば強制振動の場合のエントロピー流 $\tilde{S}$ の値も決まる。

強制振動の実験によれば安定な ∇T_m が自動的にきまる。このことは実験家にとっては当然の事実である。むしろ、強制振動の実験が可能なのは安定な ∇T_m が実現されるためである。安定な ∇T_m が実現されなかったら再現性のある実験が成り立たない。安定な ∇T_m が自動的にきまることはこれまでの熱音響理論に基づく議論では使われなかった条件を使えば ∇T_m が決まることを示唆している。ここではエン

トロピー生成最小の法則を採用して強制振動の場合の ∇T_m を議論したい。

局所的エントロピー生成 Σ は蓄熱器中で一様ではないので、 Σ が一様と見なせるように非常に短い蓄熱器を想定する。非常に短い蓄熱器を想定して Σ が一様と見なせるようにしたので、エントロピー生成最小の法則を適用することは Σ を最小にすることと同じである。 Σ が一様と見なせるように非常に短い蓄熱器を想定しても、振動モードと振幅と温度勾配 ∇T_m とは蓄熱器の中で一様とは限らない。このために、以下では、 Σ の表現に表れた振動モードと振幅と温度勾配 ∇T_m とをこの蓄熱器中の代表値と見なす。

強制振動の振動モードと振幅とを拘束条件として、 Σ が最小となるような ∇T_m と Σ の最小値とを議論しよう。

Σ の ∇T_m 依存性に着目すると、 Σ は $\Sigma_v + \Sigma_p$ と Σ_θ と $\Sigma_D + \Sigma_\kappa$ に分けることができる。

$$\Sigma_v + \Sigma_p = \Gamma \frac{\omega}{T_m} \frac{1}{2} p_m \hat{A}^2 \geq 0 \quad (9)$$

は仕事の散逸による局所的エントロピー生成であり、振動モードと振幅で決まり、 ∇T_m に依存しない。

$$\Sigma_\theta = -(a_\theta + b_\theta \beta T_m) \frac{\nabla T_m}{T_m^2} a_s \frac{1}{2} p_m \hat{A}^2 \quad (10)$$

は振動モードと振幅に依存するだけでなく、 ∇T_m に比例している。振幅に依存する実効熱伝導度

$$\kappa_A \equiv \kappa + \frac{1}{\Theta_D} a_s \frac{1}{2} p_m \hat{A}^2 > 0 \quad (11)$$

を使うと、

$$\begin{aligned} \Sigma_D + \Sigma_\kappa &= -\frac{(\tilde{\Sigma}_D + \tilde{\Sigma}_\kappa) \nabla T_m}{T_m} \\ &= \kappa_A \left(\frac{\nabla T_m}{T_m} \right)^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (12)$$

は実効熱伝導による局所的エントロピー生成であり、 ∇T_m の2乗に比例している。 κ_A は強制振動の振動モードと振幅で決まり、 ∇T_m に依らないからである。

従って、強制振動の Σ は ∇T_m の2次式であり、 ∇T_m の2乗に比例している $\Sigma_D + \Sigma_\kappa$ が正なので、強制振動の Σ はある ∇T_m で最小となる。

式を短くするために、温度勾配の次元をもつパラメーター

$$\Theta_\Sigma \equiv \frac{1}{2} (a_\theta + b_\theta \beta T_m) \Theta_A \quad (13)$$

を導入しよう。 Θ_Σ の符号は $a_\theta + b_\theta \beta T_m$ の符号と同じである。 Θ_Σ は強制振動の振動モードと振幅で決まる。

Θ_Σ を使うと(10)は

$$\Sigma_\theta = -2 \frac{\Theta_\Sigma}{\Theta_A} \frac{\nabla T_m}{T_m^2} a_s \frac{1}{2} p_m \hat{A}^2$$

となるが、(8)の Θ_A を代入して(11)を使うと

a)

b)

Fig. 3 Local entropy production rate Σ as a function of ∇T_m in the case of forced oscillation. a) $\Theta_\Sigma > 0$ and b) $\Theta_\Sigma < 0$.

$$\Sigma_\theta = -2 \frac{\kappa_A}{T_m^2} \Theta_\Sigma \nabla T_m \quad (14)$$

となる。局所的エントロピー生成 Σ のうちで ∇T_m に関わりのある部分は(12)と(14)の和

$$(\Sigma_D + \Sigma_\kappa) + \Sigma_\theta = \frac{\kappa_A}{T_m^2} (\nabla T_m - 2 \Theta_\Sigma) \nabla T_m$$

となり、 Σ は

$$\Sigma = \Sigma_v + \Sigma_p + \frac{\kappa_A}{T_m^2} (\nabla T_m - 2 \Theta_\Sigma) \nabla T_m$$

となる。従って、 Σ は $\nabla T_m = \Theta_\Sigma$ の時に最小値

$$\Sigma_{\min} \equiv \Sigma_v + \Sigma_p - \kappa_A \left(\frac{\Theta_\Sigma}{T_m} \right)^2 \quad (15)$$

をとる。この状況をFig.3に模式的に示した。 $\Sigma_{\min}$ も強制振動の振動モードと振幅で決まる。

$\Sigma_{\min} \geq 0$ の場合には、強制振動の場合の熱力学的に安定な温度勾配の値は Θ_Σ だけである。 ∇T_m が仮想的に Θ_Σ からずれると局所的エントロピー生成が増大するからである。

$\Sigma_{\min} < 0$ の場合には $\Sigma = 0$ となる ∇T_m が2つある。 $\Sigma = 0$ となる ∇T_m を Θ_1 、 Θ_2 とし、 $\Theta_1 < \Theta_2$ とする。 $\Theta_1 < \nabla T_m < \Theta_2$ では $\Sigma < 0$ となり熱力学第二法則 ($\Sigma \geq 0$) に抵触するの

で、 $\nabla T_m \leq \Theta_1$ あるいは $\nabla T_m \geq \Theta_2$ である。エントロピー生成最小の法則により、 $\nabla T_m \leq \Theta_1$ を初期条件とすると安定な温度勾配は Θ_1 であり、 $\nabla T_m \geq \Theta_2$ を初期条件とすると安定な温度勾配は Θ_2 となる。つまり $\Sigma_{\min} < 0$ の場合には初期条件により安定な温度勾配が異なる。初期条件により安定な温度勾配が異なることは非現実的なので $\Sigma_{\min} \geq 0$ であろう。また、 $\Sigma_{\min} \geq 0$ は熱力学第二法則の要請でもある。

強制振動にはドリームパイプとヒートポンプとがあるが、ドリームパイプ ($\nabla T_m \geq 0$) では $\Theta_\Sigma \geq 0$ が必要であり、Fig. 3のa)に対応する。ヒートポンプ ($\nabla T_m < 0$) では $\Theta_\Sigma < 0$ が必要であり、Fig. 3のb)に対応する。非常に短い蓄熱器がドリームパイプになるかヒートポンプになるかは Θ_Σ の符号で決まる。

(13)によれば、 Θ_Σ の符号は $a_\theta + b_\theta \beta T_m$ の符号と同じなので、ドリームパイプ ($\Theta_\Sigma \geq 0$) では

$$a_\theta + b_\theta \beta T_m \geq 0 \quad (18)$$

が必要であり、ヒートポンプ ($\Theta_\Sigma < 0$) では

$$a_\theta + b_\theta \beta T_m < 0 \quad (19)$$

が必要である。いずれも非常に短い蓄熱器を想定してエントロピー生成最小の法則を局所的に適用した結果であり、強制振動の振動モードを制限する。ヒートポンプは熱音響熱機関なので(4)が必要だった。従って、(19)はヒートポンプの必要条件(5)よりも強い条件である。

非常に短い蓄熱器がドリームパイプになるかヒートポンプになるかは $a_\theta + b_\theta \beta T_m$ の符号で決まる。例えば、 $F_S = 1$ で理想気体 ($\beta T_m = 1$) の場合を考えよう。この場合には(2)と(3)とから良い近似で

$$a_\theta + b_\theta \beta T_m \approx -(\text{Im}\{g\} + \text{Im}\{h\}) \cos \theta$$

である。 $\text{Im}\{g\}$ と $\text{Im}\{h\}$ とは負なので、 $a_\theta + b_\theta \beta T_m$ の符号は $\cos \theta$ の符号と同じである。従って、ドリームパイプでは

$$\cos \theta > 0$$

が必要であり、ヒートポンプでは

$$\cos \theta < 0$$

が必要である。つまり、非常に短い蓄熱器がドリームパイプになるかヒートポンプになるかは、この場合には、強制振動の位相差 θ で決まる。

ドリームパイプでは ∇T_m の可能な範囲が(6)なので、 $\Theta_W > 0$ の場合には、 $\Theta_\Sigma \geq 0$ だけでなく、

$$\Theta_\Sigma \leq \Theta_W$$

も必要である。この必要条件は(13)を使うと

$$0 \leq \frac{a_\theta + b_\theta \beta T_m}{2} \leq \frac{\Theta_W}{\Theta_A} \quad (20)$$

となるので、振動モードと振幅の組み合わせを制限する。

ヒートポンプは熱音響熱機関なので(4)が必要だった。このためにヒートポンプでは(13)から

$$\Theta_\Sigma > \frac{1}{2} a_\theta \Theta_A$$

である。つまり、ヒートポンプの安定な温度勾配 Θ_Σ の範囲は

$$\frac{1}{2} a_\theta \Theta_A < \Theta_\Sigma < 0$$

に制限される。これは、ヒートポンプの温度勾配の可能な範囲(7)よりも狭いし、振動モードと振幅の組み合わせを制限する。

強制振動で熱力学的に安定な温度勾配が実現されている時には $\nabla T_m = \Theta_\Sigma$ なので(14)により

$$\Sigma_\theta = -2 \frac{\kappa_A}{T_m^2} \Theta_\Sigma^2 \leq 0$$

である。等号は $\Theta_\Sigma = 0$ を意味する。(13)を使うと

$$\Sigma_\theta = -\frac{1}{2} (a_\theta + b_\theta \beta T_m)^2 \frac{\kappa_A}{T_m^2} \Theta_A^2 \leq 0$$

となる。等号は $a_\theta + b_\theta \beta T_m = 0$ を意味する。いずれにしても強制振動で熱力学的に安定な温度勾配が実現されている時には $\Sigma_\theta \leq 0$ である。

4. 安定な温度勾配が存在するための必要条件

最後に、熱力学第二法則の要請を調べよう。

$\Sigma_{\min}$ は $\nabla T_m = \Theta_\Sigma$ の時の Σ の値であるが、 $\nabla T_m = \Theta_\Sigma$ の時には(12)から

$$\Sigma_D + \Sigma_K = \kappa_A \left(\frac{\Theta_\Sigma}{T_m} \right)^2$$

なので、(15)から

$$\Sigma_{\min} = (\Sigma_V + \Sigma_P) - (\Sigma_D + \Sigma_K) \quad (16)$$

である。従って、熱力学第二法則 ($\Sigma_{\min} \geq 0$) を満足するためには $\nabla T_m = \Theta_\Sigma$ の時に

$$\Sigma_V + \Sigma_P \geq \Sigma_D + \Sigma_K$$

でなければならない。すなわち「仕事」の散逸による局所的エントロピー生成 $\Sigma_V + \Sigma_P$ は実効熱伝導による局所的エントロピー生成 $\Sigma_D + \Sigma_K$ 以上でなければならない。同じことだが強制振動で安定な温度勾配が実現されるためには「仕事」の散逸による局所的エントロピー生成 $\Sigma_V + \Sigma_P$ が充分大きいことが必要である。

熱力学第二法則の要請をもう少し詳細に議論してみよう。(16)に(13)と(9)とを代入すると

$$\begin{aligned} \Sigma_{\min} &= \Gamma \frac{\omega}{T_m} \frac{1}{2} p_m \hat{A}^2 - \frac{1}{\kappa_A} \left[\frac{\frac{1}{2} (a_\theta + b_\theta \beta T_m) a_S \frac{1}{2} p_m \hat{A}^2}{T_m} \right]^2 \\ &= \left[\Gamma \frac{\omega}{a_S} - \left(\frac{a_\theta + b_\theta \beta T_m}{2} \right)^2 \frac{a_S \frac{1}{2} p_m \hat{A}^2}{\kappa_A T_m} \right] \frac{a_S \frac{1}{2} p_m \hat{A}^2}{T_m} \end{aligned}$$

となるので、熱力学第二法則 ($\Sigma_{\min} \geq 0$) は

$$\frac{1}{\Gamma} \left(\frac{a_{\theta} + b_{\theta} \beta T_m}{2} \right)^2 \leq \frac{\kappa_A T_m \frac{\omega}{a_S}}{a_S \frac{1}{2} p_m \hat{A}^2}$$

と同じである。これは(11)と(1)の第一式とを使うと

$$\frac{1}{\Gamma} \left(\frac{a_{\theta} + b_{\theta} \beta T_m}{2} \right)^2 \leq \frac{a_D}{Z} \frac{C_p T_m}{a_S^2} + \frac{\kappa T_m \frac{\omega}{a_S}}{a_S \frac{1}{2} p_m \hat{A}^2} \quad (17)$$

となる。

こういうわけで、強制振動の振動モードと振幅は(17)を満足する必要がある。強制振動の振動モードが

$$\frac{1}{\Gamma} \left(\frac{a_{\theta} + b_{\theta} \beta T_m}{2} \right)^2 \leq \frac{a_D}{Z} \frac{C_p T_m}{a_S^2}$$

を満足している場合には、(17)が振幅の大小にかかわらず満足されている。しかし、強制振動の振動モードが

$$\frac{1}{\Gamma} \left(\frac{a_{\theta} + b_{\theta} \beta T_m}{2} \right)^2 > \frac{a_D}{Z} \frac{C_p T_m}{a_S^2}$$

の場合には、

$$a_S \frac{1}{2} p_m \hat{A}^2 \leq \frac{\kappa T_m \frac{\omega}{a_S}}{\frac{1}{\Gamma} \left(\frac{a_{\theta} + b_{\theta} \beta T_m}{2} \right)^2 - \frac{a_D}{Z} \frac{C_p T_m}{a_S^2}}$$

も必要である。つまり、この場合には、強制振動の振幅に上限があり、振幅の上限は振動モードに依存する。

5. まとめ

局所的エントロピー生成が一樣となるように非常に短い蓄熱器を想定し、強制振動の振動モードと振幅とを束縛条件として、熱力学的に安定な温度勾配の値をきめることができた。温度勾配の値は流体力学的議論では任意の境界条件の一つであり、熱力学第一法則と第二法則とを使った議論では温度勾配の可能な範囲が指定されただけだったが、強制振動の振動モードと振幅とを束縛条件としてエントロピー生成最小の法則を使うことで熱力学的に安定な温度勾配の値が一意的に決まった。熱力学的に安定な温度勾配の値は

$$\Theta_{\Sigma} \equiv \frac{1}{2} (a_{\theta} + b_{\theta} \beta T_m) \Theta_A \quad (13)$$

に等しい。

熱力学的に安定な温度勾配 Θ_{Σ} が熱力学第二法則を満足するためには、

$$\frac{1}{\Gamma} \left(\frac{a_{\theta} + b_{\theta} \beta T_m}{2} \right)^2 \leq \frac{a_D}{Z} \frac{C_p T_m}{a_S^2} + \frac{\kappa T_m \frac{\omega}{a_S}}{a_S \frac{1}{2} p_m \hat{A}^2} \quad (17)$$

が必要である。これは強制振動の振動モード（角周波数 ω と位相差 θ とインピーダンス Z ）と振幅 $\hat{A}$ とを制限する。

熱力学的に安定な温度勾配 Θ_{Σ} は強制振動の振動モードと振幅に依存する。非常に短い蓄熱器がドリームパイプ ($\Theta_{\Sigma} \geq 0$) になるかヒートポンプ ($\Theta_{\Sigma} < 0$) になるかは $a_{\theta} + b_{\theta} \beta T_m$ の符号で決まる。ドリームパイプでは

$$a_{\theta} + b_{\theta} \beta T_m \geq 0 \quad (18)$$

が必要であり、ヒートポンプでは

$$a_{\theta} + b_{\theta} \beta T_m < 0 \quad (19)$$

が必要である。いずれも振動モードを制限する。

すなわち非常に短い蓄熱器を想定すると任意の強制振動に対して安定な温度勾配が存在するのではない。限られた範囲の振動モードと振幅の組み合わせに対してだけ安定な温度勾配が存在し、安定な温度勾配の値は(13)で定義された Θ_{Σ} に等しい。

参 考 文 献

- 1) A. Tominaga: "Local entropy production rate of thermoacoustic phenomena," J. Cryo. Soc. Jpn. **39** (2004) 54-59 (in Japanese)
富永 昭: 「熱音響現象の局所的エントロピー生成」、低温工学 **39** (2004) 54-59
- 2) A. Tominaga: "Implicit concepts of thermodynamics", J. Cryo. Soc. Jpn. **38** (2003) 363-370 (in Japanese); "Fundamentals of Thermodynamics-learning from the history", Uchida Rokakuho Publishing Co., Tokyo (2003) (in Japanese)
富永 昭: 「熱力学に潜在している基本概念」、低温工学 **38** (2003) 363-370; 「誕生と変遷にまなぶ熱力学の基礎」、内田老鶴圃、東京 (2003)
- 3) A. Tominaga: "Thermodynamical classification of thermoacoustic phenomena and necessary conditions for thermoacoustic heat-engines", J. Cryo. Soc. Jpn. **39** (2004) 148-154 (in Japanese)
富永 昭: 「熱音響現象の分類と熱音響熱機関の必要条件」、低温工学 **39** (2004) 148-154

富 永 昭

1942年3月6日生。1966年東京大学卒。理学博士。筑波大学大学院数理物質科学研究科助教授。低温物理現象と熱音響現象を研究対象としてきたが、1990年以降は熱音響現象の研究に専念し、1998年頃から熱力学も研究対象とするようになった。2002年度から教育研究科も担当することになり、科学と教育の狭間で苦しんでいる。