基礎講座

クライオクーラ [3]

— 極低温冷凍機の基礎 —

松原 洋一

Cryocooler [3]

— Fundamental Review of Cryogenic Refrigerators —

Yoichi MATSUBARA

Synopsis: Part III of this study covers the basic characteristics of a Stirling cooler based on a simplified Stirling cycle. Two different types of Stirling coolers — one with a piston and displacer, and the other with two-pistons — are described by a simplified isothermal model using Schmidt equations. Examples of calculation results are given to explain the optimum phase difference between the piston movement and the pressure wave of the working gas. The regenerator, as one of the critical components of cryocoolers, is analyzed in detail. Numerical investigations have been conducted to study the regenerator efficiency in terms of the geometry, materials selection, pressure ratio, and the phase between mass flow and pressure in the regenerator. Improvement in regenerator performance is discussed as related to minimization of the enthalpy flow within the regenerator.

Keywords: cryocooler, regenerator, Gifford-McMahon cycle, Stirling cycle, pulse tube

(前回までのあらまし)

第1回¹³⁾、第2回¹⁴⁾は、生産台数が最も多いという観点から GM 冷凍機を取り上げ、その基本構造や動作原理を述べると共に、効率を低減させる要因を分類し、効率改善の方法等を取り上げてきた。今回は GM 冷凍機とはやや異なる応用分野で多く利用されているスターリング冷凍機を取り上げる。なお、図、表、式の番号は前回から継続した値を用い、要所で参照することを了解していただきたい。

(お詫びと修正：第1回¹³⁾掲載式の訂正をお願いします)

$$m_c C_P T_a + m_0 C_V T_0 = (m_c + m_0) C_V T_f \quad (1)$$

$$T_f = T_0 \left/ \left[\left(1 - \frac{P_L}{P_H} \right) \frac{C_V}{C_P} \frac{T_0}{T_a} + \frac{P_L}{P_H} \right] \right. \quad (4)$$

$$W_{B1} = \sum_{j=1}^{jj} \dot{m}_{1j} R T_a \log(P_H/P_{1j}) \quad /jj=240.2 \text{ [W]} \quad (19)$$

$$W_{B2} = \sum_{j=1}^{jj} \dot{m}_{2j} R T_a \log(P_j/P_L) \quad /jj=592.1 \text{ [W]} \quad (20)$$

Received December 21, 2006

高エネルギー加速器研究機構

〒305-0801 茨城県つくば市大穂 1-1

High Energy Accelerator Research Organization (KEK),

1-1 Oho, Tsukuba, Ibaraki 305-0801, Japan

E-mail: cryo@nifty.com

$$W_{iso} = \sum_{j=1}^{jj} \dot{m}_{1j} R T_a \log(P_H/P_L) \quad /jj=1579.2 \text{ [W]} \quad (21)$$

(26)式の2行上；温度差 $\Delta T=2(T_g-T_s)$ を仮定すれば、

$$\langle H_r \rangle = \sum_{j=1}^{jj} \dot{m}_{rj} C_P (T_a - T_e) / jj = 57 \text{ [W]} \quad (33)$$

3. スターリング冷凍機

スターリング冷凍機は1816年に Robert Stirling によって発明された熱機関が元になっており、1950年代にオランダで最初の実用的なクライオクーラが開発され¹⁵⁾、以後小型の空気液化機等に使用されてきた。また赤外線検知器冷却用としては、入力数ワットで80Kでの冷凍能力数百ミリワットクラスの手のひらに乗るような超小型のものまで開発されている。一方、大型の機種としては70Kで20kWの冷凍能力を持ち、軸馬力に対する冷凍能力の%カルノーで42%の高効率を達成している¹⁶⁾。残念ながら現在この機種は生産されていない。

スターリング冷凍機は GM 冷凍機と違って、基本的には圧縮機と膨張機とが一体になっているので、その一体化の構成方法によって幾つかの異なる形式がある。

Fig. 32 Schematics of a Stirling cooler (Displacer model).

- ① Heat exchanger at T_e , cooling temperature
- ② Regenerator
- ③ Heat exchanger at T_a , room temperature

Fig. 32 は現在最も普及している形式であり、液体窒素温度で数百ワットクラスの冷凍能力を持つ機種がある。油潤滑方式のクランク機構を採用しているため、クランク機構およびその駆動モーターを下に、低温端を上配置する構成となっている。スターリング冷凍機の駆動モーターは、GM 冷凍機の圧縮機内にあるモーターに相当するものであり、Fig. 1 の GM 冷凍機の上にあるディスプレーサ、弁駆動モーターとはその機能が全く異なるものである。

Fig. 32 の右の曲線は、クランク軸を時計回りに回転させたときのディスプレーサおよびピストンの変位を時間軸で示したもので、ピストンの動きがディスプレーサより位相角 ϕ の遅れを持たせてある。ディスプレーサの外周には、冷却温度 T_e での吸熱用熱交換器①、蓄冷器②および室温 T_a での放熱用熱交換器③が配置され、ディスプレーサの移動に応じて作業気体が移動する流路になっている。

ディスプレーサがほぼ上死点にあるとき、ピストンは上昇し、ほとんどの作業気体は V_a (ディスプレーサ下端とピストン面によって構成される空間) 内で圧縮される。そのため、このピストンは一般に圧縮ピストンと呼ばれている。次にディスプレーサが下降するときピストンは上死点に向かうため、 V_a で圧縮された気体は熱交換器③で放熱し V_e (ディスプレーサ上部の空間) に移動する。続いてピストンも下降し始めるので V_e が増大すると共に V_e 内の気体も膨張し温度低下する。引き続きピストンが下死点にあるときディスプレーサは上昇し V_e 内の低温の気体は熱交換器①で吸熱して V_a に移動し、1 サイクルが完成する。つまり、ディスプレーサによって、作業気体が圧縮・膨張する空間をうまく分離することができた。その結果、サイクルを繰り返すことにより V_a 、 V_e 間の温度差を増大させることが可能となる。

ここで重要な役割を果たすのが蓄冷器②で、熱交換器①

③間を移動する気体の温度を蓄冷器内でそれぞれの温度に近づけることにより、熱損失を最小にする役割を果たしている。

3.1 シュミット (Schmidt) 解析

スターリングサイクルの動作原理を最も簡単に表現する方法としてシュミットによる等温モデルが良く知られている¹⁷⁾。ディスプレーサの低温端可変容積 V_e を、

$$V_e = \frac{1}{2} V_{e0} (1 + \cos \omega t) \quad (76)$$

で表せば、室温部の容積 V_a は、圧縮ピストンの可変容積 V_1 とディスプレーサ下部の可変容積 V_2 の和で表せるから、両者が位相差 ϕ で調和振動していると仮定すれば、

$$V_2 = \frac{1}{2} V_{e0} (1 - \cos \omega t) \quad (77)$$

$$V_1 = \frac{1}{2} V_{10} [1 + \cos(\omega t - \phi)] \quad (78)$$

となる。ここで V_{e0} は V_e の最大値、 V_{10} は V_1 の最大値、 ω は角周波数である。図から明らかなように V_a の最大値は V_1 と V_2 との最大値の和より小さくすることが可能である。 $w = V_{10}/V_{e0}$ とおけば、

$$V_a = V_1 + V_2 = \sqrt{1 + 2w \cos(\phi) + w^2} \cos(\omega t - \theta_x) \quad (79)$$

となるから、 V_a の最小値がゼロになる条件を求めればよい。ただし、

$$\tan \theta_x = \frac{w \sin \phi}{1 + w \cos \phi} \quad (80)$$

である。 $V_a - V_x$ を条件を満足する V_a とすれば、

$$V_x = 0.5 V_{e0} (1 + w - \sqrt{1 + 2w \cos \phi + w^2}) \quad (81)$$

という関係が得られる。

等温モデルの場合、 V_a 、 V_e 内の気体温度がそれぞれ T_a 、 T_e で一定であると仮定する。したがって V_a 、 V_e の壁面も熱交換器①②と同様に熱交換の役割をする。蓄冷器は気体容積 V_s を持ち、その平均温度を T_s とする。そこで理想気体を仮定すれば、系内の全質量 m_T の圧力変動は、

$$P = m_T R \left/ \left(\frac{(V_a + V_{hxa})}{T_a} + \frac{V_s}{T_s} + \frac{(V_e + V_{hxe})}{T_e} \right) \right. \quad (82)$$

であらわせる。ただし、系内に圧力損失は無く、圧力は時間のみ関数として扱う。そこで、

$$t_x = \frac{T_a}{T_e}, \quad s_x = \frac{T_a}{V_{e0}} \left(\frac{V_{hxa}}{T_a} + \frac{V_s}{T_s} + \frac{V_{hxe}}{T_e} \right) \quad (83), (84)$$

で無次元化すると、

$$P = P_0 \frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{1 + \delta \cos(\omega t - \theta)} \quad (85)$$

の関係が得られる。ただし、

$$\delta = \frac{\sqrt{(t_x - 1)^2 + 2w(t_x - 1)\cos\phi + w^2}}{1 + w + t_x + s_x} \quad (86)$$

$$\tan\theta = \frac{w\sin\phi}{(t_x - 1) + w\cos\phi} \quad (87)$$

である。 P_0 は系内平均圧力で、

$$P_0 = \frac{1}{2\pi} \oint Pd(\omega t) = \sqrt{P_{\max} P_{\min}} \quad (88)$$

$$\frac{P_{\max}}{P_{\min}} = \frac{1 + \delta}{1 - \delta} \quad (89)$$

の関係にある。ここで $P_{\max}$ 、 $P_{\min}$ はそれぞれ振動圧力の最大、最小値である。

ディスプレイサモデル(Fig. 32)における各部の寸法がTable 3で与えられる冷凍機について検討してみる。運転条件は $T_a : 300[\text{K}]$ 、 $T_e : 65[\text{K}]$ 、 $P_0 : 2[\text{MPa}]$ 、 $f : 50[\text{Hz}]$ とする。位相角 ϕ を変えてPV波形をプロットしてみるとFig. 33のようになる。ここでいずれの波形も時計回りになるように書き直してあるので、仕事は V_a 側から蓄冷器に流入し、 V_e 側から取り出され、ディスプレイサを介して再び V_a 側に戻されている。これらのPV仕事を求めると、ディスプレイサ低温端で気体がディスプレイサに与える仕事は、

Table 3 Dimensions of each component of Model 6

要素	寸法
圧縮ピストン断面積、ストローク	50 cm ² , 3 cm
ディスプレイサ断面積、ストローク	25 cm ² , 2 cm
熱交換器①有効断面積、長さ	19 cm ² , 2.5 cm
蓄冷器直径、長さ	6 cm, 6 cm
蓄冷材メッシュ線径、ポロシティ	0.003 cm, 0.67
熱交換器②有効断面積、長さ	19 cm ² , 2.5 cm

Fig. 33 PV diagrams as a function of phase difference.

$$W_e = \frac{\omega}{2\pi} \oint PdV_e = \frac{\omega}{2} P_0 V_0 \frac{\delta}{1 + \sqrt{1 - \delta^2}} \sin\theta \quad (90)$$

と求まる。一方、圧縮ピストンを駆動するのに必要な仕事、つまり気体に与える仕事を正として求めるならば、

$$W_{in} = -\frac{\omega}{2\pi} \oint PdV_1 = -\frac{\omega}{2} P_0 w V_0 \frac{\delta}{1 + \sqrt{1 - \delta^2}} \sin(\theta - \phi) \quad (91)$$

となる。そこで蓄冷器に流入する仕事 W_a は圧縮ピストンから加えられる仕事とディスプレイサから戻ってくる仕事との和、すなわち、 $W_a = W_{in} + W_e$ となるはずであるから、その比を求めてみると、

$$\frac{W_a}{W_e} = \frac{-w\sin(\theta - \phi)}{\sin(\theta)} + 1 = -w \left(\cos\phi - \frac{\sin\phi}{\tan\theta} \right) + 1 = \frac{T_a}{T_e} \quad (92)$$

となり、Fig. 33のPV面積比は位相に関係なく温度比に等しくなっている。つまり、

$$\frac{W_e}{W_{in}} = \frac{T_e}{T_a - T_e} \quad (93)$$

となることからFig. 32のようなディスプレイサ型スターリング冷凍機の理想的な効率 η はカルノー効率に一致していることがわかる。しかし実際には%カルノーで50%にも満たないので、その原因がどこにあるのかを明らかにする必要がある。

まず、蓄冷器を通過する仕事流を考えてみると、Fig. 34のように位相差100度付近で最大となるが、Fig. 33から明らかなように、蓄冷器内での気体の変位、つまり振動振幅はあまり位相差に依存せず、ほぼ一定である。このことは蓄冷器内のエンタルピー流も位相差に強く依存していないことを示唆している。したがって、冷凍量が低温端での仕事流と蓄冷器内のエンタルピー流の差に比例することを考慮すれば、位相差100度付近を設定することが最も効率の良い冷凍機を実現させるように思われる。

スターリング冷凍機には、Fig. 32の構造以外にFig. 35に示すようなディスプレイサを用いない方式がある。ディスプレイサの代わりに膨張ピストンを用い、膨張仕事はク

Fig. 34 Variation of work flow as a function of phase difference.

Fig. 35 Schematics of Stirling cooler (two-piston type).

①, ② and ③ are the same as those of Fig. 32

リンク機構を介して圧縮ピストンに必要な仕事の一部として回収されている。したがって作業気体の仕事の流れは、Fig. 33 の V_a での仕事 W_a が直接圧縮ピストンから与えられ、 V_e での仕事 W_e が膨張ピストンに与えられており、流体系の仕事の還流が無いことが特徴である。一般には蓄冷器が膨張ピストンに内蔵され、小型化が図られている。

この方式のシュミット解析による仕事の算出は以下のよう求められる。圧縮、膨張ピストンのそれぞれの可変空間 V_a 、 V_e を、

$$V_e = \frac{1}{2} V_0 (1 + \cos \omega t) \quad (94)$$

$$V_a = \frac{1}{2} w V_0 [1 + \cos(\omega t - \phi)] \quad (95)$$

とおけば、変動圧力は、(86)、(87)式の δ 、 θ を以下のように置き換えれば、

Fig. 36 PV diagram as a function of phase difference (two-piston type).

$$\delta_2 = \frac{\sqrt{t_x^2 + 2wt_x \cos \phi + w^2}}{w + t_x + s_x} \quad (96)$$

$$\tan \theta_2 = \frac{w \sin \phi}{t_x + w \cos \phi} \quad (97)$$

$$P = P_0 \frac{\sqrt{1 - \delta_2^2}}{1 + \delta_2 \cos(\omega t - \theta_2)} \quad (98)$$

で与えられる。ここで、(88)、(89)、(90)式の δ 、 θ も(96)、(97)式を用いればよい。(91)式は、

$$W_a = -\frac{\omega}{2\pi} \oint P dV_a = -\frac{\omega}{2} P_0 w V_0 \frac{\delta_2}{1 + \sqrt{1 - \delta_2^2}} \sin(\theta_2 - \phi) \quad (99)$$

に置き換わる。具体例として、ディスプレイサ型の V_1 を V_a に置き換え、その他の条件を Table 3 と同様にして PV 波形をプロットしてみると、Fig. 36 のようになり、ディスプレイサ型とほぼ同じ傾向にあることがわかる。

一方、入出力比は

$$\frac{W_e}{W_a} = \frac{1}{t_x} = \frac{T_e}{T_a} \quad (100)$$

となり、カルノー効率に達していない。しかしクランクを介して膨張仕事は完全に回収される場合でクランク軸を回転させるのに必要な動力を W_{in} とするならば、(93)式と同じ関係が得られ、その%カルノーはカルノー効率に等しくなる。

そこで、ディスプレイサ型と同様に両ピストンの位相差の影響をプロットしてみると、Fig. 37 のようになり、最大冷凍量を得るためには最大膨張仕事の得られる位相差、この場合には約 90 度、を選定する必要があることを示している。

一方、スターリング冷凍機の効率を明らかにさせるためには、まず蓄冷器の特性をさらに正確に把握しておく必要がある。すでに第 1 回の(33)式で、熱伝達表面積が有限であることによって発生する蓄冷器内でのエンタルピー流は求められているが、さらに蓄冷材の比熱が有限であることや蓄冷器内の気体流路が効率に与える影響なども調べる。

Fig. 37 Variation of work flow as a function of phase difference in case of two-piston cooler.

3.2 蓄冷材特性評価式の導入

蓄冷器を通過する気体の一次元非定常流に対して、以下の各式を適用する。

1) 連続の式

密度 ρ の流体が断面積 A の流路を流速 v で通過するとき、質量保存則は、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) + \frac{\rho v}{A} \frac{dA}{dx} = 0 \quad (101)$$

と書ける。あるいは流速を質量流速 $\dot{m} = \rho v A$ で表せば、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A) + \frac{\partial \dot{m}}{\partial x} = 0 \quad (102)$$

になる。

2) 運動方程式

非定常流のオイラー (Euler) の式は、

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} + f_r \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{v}{|v|} = 0 \quad (103)$$

で表せる。ここで f_r は流路抵抗係数で、流路形状に応じて別途与えられる。

3) 気体のエネルギー方程式

蓄冷器を通過する気体は、エネルギー保存則により、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} v \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) + q + \frac{\partial}{\partial x} (Pv) = 0 \quad (104)$$

の関係にある。 u は気体の内部エネルギー、 q は蓄冷材から単位体積当たりの気体に伝達される熱量である。

式(101)、(103)を用いて整理すれば、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} v(\rho u) + q + P \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (105)$$

となり、さらにエンタルピーの定義式 $\rho h = \rho u + P$ を用いれば、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\dot{m}}{A} h \right) + q = \frac{\dot{m}}{\rho A} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (106)$$

となる。

4) 熱伝達の式

気体と蓄冷材との間の熱伝達は式(25)から単純に、

$$q = \frac{\alpha P_w}{A} (T_s - T) \quad (107)$$

で表せる。

5) 蓄冷材のエネルギー式

蓄冷材の温度変化は、流れに垂直な断面積が A_s の蓄冷材に対して、流れ方向の熱伝導と径方向の温度分布を無視すれば、

$$q = -C_s \rho_s \frac{A_s}{A} \frac{\partial T_s}{\partial t} \quad (108)$$

の関係にある。 C_s 、 ρ_s はそれぞれ蓄冷材の比熱と密度である。

以上の式をまとめて数値積分すれば気体と蓄冷材の温度

が時間と位置の関数として求まる。境界条件に関しては後述することにして、まず以下の無次元数を導入する。

$$\Lambda = \frac{\alpha P_w L}{\dot{m}_m C_p} \quad (109)$$

$$\Gamma = \frac{\dot{m}_m C_p \tau_0}{V_s \rho_s C_s} \quad (110)$$

$$\Phi = \frac{V_g \rho_m C_v}{V_s \rho_s C_s} \quad (111)$$

ここで、 τ_0 は一サイクルの半周期、 $\dot{m}_m$ は半周期で平均された質量流速を用いる。ただし蓄冷器内での質量流速は位置の関数でもあるので、無次元数を固定するには特定の位置、例えば、蓄冷器の低温端あるいは高温端等の境界面の値で代表させることが必要となる。 ρ_m は蓄冷器両端から流入する気体温度の平均値に対する気体密度を用いる。 Λ はすでに定義した(28)式と同じであるが、 Γ と Φ はここで新しく導入された無次元数で、それぞれ蓄冷材の熱伝達表面積、熱容量、蓄冷器内気体容積の相対的な大きさを表している。ただしここでは熱容量に関する無次元数 Γ を逆数で定義しており、文献によって異なるので注意していただきたい。

はじめに圧力損失を無視した場合に (102) と (106)~(108) 式をまとめると、

$$\frac{\Phi}{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \tau} (\rho_n T) + \frac{\partial}{\partial X} (\dot{m}_n T) + q_n = 0 \quad (112)$$

$$q_n = \Lambda (T - T_s) = \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial T_s}{\partial \tau} \quad (113)$$

$$\frac{\Phi}{\Gamma} \gamma \frac{\partial \rho_n}{\partial \tau} + \frac{\partial \dot{m}_n}{\partial X} = 0 \quad (114)$$

を得る。ただし γ は気体の比熱比で、 $\rho, \dot{m}, \tau, x$ は以下の無次元数に定義しなおす。

$$\rho_n = \frac{\rho}{\rho_m}, \quad \dot{m}_n = \frac{\dot{m}}{\dot{m}_m}, \quad \tau = \frac{t}{\tau_0}, \quad X = \frac{x}{L} \quad (115) \sim (118)$$

$$q_n = \frac{V_g}{\dot{m} C_p} q \quad (119)$$

ただし、ここで新たに定義した q_n は温度[K]の単位を持ち、関数 Φ/Γ は蓄冷器内に停留している気体と流動している気体との割合を示している。

式(112)~(114)を特定境界条件の元で解けば、気体の温度、密度、質量流速および蓄冷材の温度が位置と時間の関数として求められ、そこから各位置での仕事流、エンタルピー流などが計算される。

次に蓄冷器内の無効容積を無視すれば、 Φ がゼロになるから必要な条件式は、

$$\frac{\partial T}{\partial X} = \Lambda (T_s - T) \quad (120)$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial \tau} = \Pi (T - T_s) \quad (121)$$

Fig. 38 Inefficiency of the regenerator (Hausen model).

の2式になる。ただし新たな無次元数 Π は $\Pi = \Lambda \cdot \Gamma$ で再定義されており、(120)、(121)式はハウゼン (Hausen) の式としてよく知られている¹⁸⁾。

ハウゼンの式は、一定流入温度と一定質量流速のもとで数値的に解くことができるが、非効率に関しては近似的な解析解が W.F. Schalkwijk によって $\Gamma < 1$ and $\Pi \gg 2$ の範囲という条件下で次式のように得られている¹⁹⁾。

$$I_e = \frac{2}{\Lambda - \Omega + 2} \quad (122)$$

$$\Omega = \Pi + 2 - 2.35\sqrt{\Pi} \quad (123)$$

Fig. 38 にハウゼンモデルの計算結果を示す。熱容量が無限大ならば Π がゼロとなり(122)式では誤差が増大するが、それでも(32)式の程度であり Λ の大きい範囲ではさほど気にならない。

実際に特定の効率を持つ蓄冷器を設計しようとするとき、 Λ と Γ の最適な組み合わせを必要とする。ラデボウ (R. Radebaugh) によれば、非効率の最小値を与える条件として、

$$\frac{d(\Lambda/\Gamma)}{d(1/\Gamma)} = 0 \quad (124)$$

が成立する状態を推奨している²⁰⁾。目的とする非効率が 0.4 ~ 1.2 % の範囲にある場合、 Γ の最適値はおおよそ 0.5 程度である。そこで式(31)に対応する式として、

$$I_e = 2.31\Lambda^{-0.935} \quad (125)$$

の関係を得る。

具体的計算例として Table 3 の蓄冷器を用いた Fig. 35 のピストン方式を取り上げる。蓄冷器を通過する質量流速は蓄冷器両端の PV 線図から計算でき、位相差が 90 度の場合には Fig. 39 のようになる。(横軸は 1 サイクルの時間軸であるが 4 度ピッチの 90 分割とし、後の計算プログラムの入力データに用いる。)

次におよその熱伝達係数 α を求める簡単な方法として、流れが層流の場合にはヌッセルト (Nusselt) 数がほぼ一

Fig. 39 Mass flow rate at both ends of the regenerator.

定であるという関係を用いる。例えば水力直径が D_h の円管ならば、

$$Nu = \frac{\alpha D_h}{\lambda_g} = 3.66 \quad (126)$$

が与えられ、細隙を通過する流体に関しては $Nu=7.54$ が与えられている²¹⁾。一般に蓄冷材の充填率を評価するときに、蓄冷材が充填されていない空間割合として間隙率 (porosity) $Porosity$ を用いる場合が多い。そこで線径 d_w のメッシュを積層した場合の水力直径を、

$$D_h = 4 \frac{A_g}{P_w} = \left(\frac{Porosity}{1 - Porosity} \right) d_w \quad (127)$$

で求める。ヘリウムの熱伝導率は、

$$\lambda_g = 0.0028T^{0.7} \text{ [W/m} \cdot \text{K]} \quad (128)$$

で近似する。例えば Model 6 の蓄冷器で平均温度におけるヘリウムの熱伝導率を $\lambda \approx 10^{-3}$ [W/cm² · K] とし、 $Nu=7.54$ とすれば $\alpha \approx 1.24$ [W/cm² · K] になるので、平均流量を Fig. 39 から $\dot{m}_m \approx 50$ [g/s] とすれば、 $\Lambda \approx 356$ を得る。一方、 Γ のほうは蓄冷材の比熱の減少を考慮しても 0.1 以下となり蓄冷材の熱容量は充分にあることが示唆されている。以上により(122)式からは非効率が約 0.56% になるので、(23)式によれば蓄冷器内のエンタルピー流は 342 watt 近くになることが予測される。低温端での仕事流は 922 watt なので実質冷凍量が 580 watt に低下することが示されている。

3.3 蓄冷器内気体容積の影響

蓄冷器内気体容積の影響を知るためには、まず数値解析を用いて(112)~(114)式あるいは(106)~(108)式を解き、温度、流量、圧力を位置と時間の関数として求め、次式により仕事流とエンタルピー流を求める。

$$\langle W \rangle = \sum_{j=1}^{jj} \dot{m}_j R T_{av} \log \left(\frac{P_j}{P_0} \right) / jj \quad (129)$$

$$\langle H \rangle = \sum_{j=1}^{jj} (\dot{m}_j C_p T_j) / jj \quad (130)$$

Fig. 40 は境界条件として Fig. 39 の低温端での質量流速

Fig. 40 Energy flows within the regenerator.

と圧力振動とを用いた場合の計算結果である。Fig. 39 の横軸は、この入力用データポイント数 (90) とあわせてある。

細線は圧力損失の無い場合の仕事流で、シュミットモデルによる蓄冷器両端での PV 仕事をよく再現している。太線は圧力損失として、

$$\frac{dP}{dx} = f_r \frac{\mu}{\rho} \frac{\dot{m}}{d_e^2 A} \quad (131)$$

の式を用いた場合の結果で、圧力損失を無視した場合 (細線) と比較した。発達した層流の場合 $f_r=32$ であるが、実際には蓄冷材として 200 mesh 程度の金網を積層したものを使用した場合、より大きな圧力損失が観測されているので、 f_r 値に実験とよく一致する値を採用する場合もある。Fig. 40 では積層金網における振動流実験から得られた田中の式²²⁾をさらに単純化して $f_r=87.5$ を用いて計算した結果である。圧力損失の影響は主に入力仕事の増大という形で現れており、エンタルピー流の増大にはあまり影響していない。

Fig. 40 の例では低温端の質量流速と圧力変動として Fig. 39 の値を用いている。また、Model 6 をピストン型とした場合に特定されているので、より一般的な蓄冷器の機能を知るために、低温端での入力条件を線形化して、

$$P = P_0 + P_a \sin(\omega t) \quad (132)$$

$$\dot{m} = \dot{m}_p \sin(\omega t - \phi) \quad (133)$$

を用いてパラメトリックな計算を試みる。 $P_0=2.0$ [MPa], $P_a=0.4$ [MPa], $\dot{m}_p=80$ [g/s], $\phi=-20$ 度とし、その他は、Table 3 の蓄冷器寸法を採用する。

Fig. 41 は蓄冷材の熱容量がエンタルピー流に与える影響を計算したもので、必要以上に熱容量を増やすことが意味の無いことを示している。これは(110)式で定義された Γ がゼロに漸近するとき、Fig. 39 で I_e がほとんど変わらなくなることから理解できる。

蓄冷器容積を一定にして、長さや直径の比を変えた場合の結果が Fig. 42 である。細線は圧力損失を無視した場合

Fig. 41 Effect of the material heat capacity.

Fig. 42 Effect of aspect ratio of the regenerator.

で、蓄冷器の寸法比はエンタルピー流にも、入力仕事量にも影響を与えないが、 $f_r=32$ で圧力損失を考慮した場合 (太線) の結果は、蓄冷器を細長くすることによってエンタルピー流が増大し (低温端での仕事流が一定なので冷凍量が減少する)、同時に必要入力仕事も増大するという結果を示している。一方長さが短く、直径の大きい蓄冷器は、軸方向の熱伝導損失が無視できなくなり、さらに径方向に安定した流速分布を保たせるのが困難になる。したがって蓄冷器の最適直径、長さ比は、熱損失と圧力損失との兼ね合いで決定されることになる。

3.4 圧力振幅の影響

Model 6 で圧縮比のみを変更してみると、Fig. 43 のよう

Fig. 43 Effect of pressure ratio.

Fig. 44 Simplified calculation model of a Stirling cycle.
(Data are obtained from Fig. 45 at the phase of 50degrees)

Fig. 45 Effect of phase difference between two pistons.

Fig. 46 Effect of the pressure drop on PV diagrams.

になり、低圧縮比では蓄冷器内のエンタルピー流が増大し、著しく効率が低下することが示されている。この例では圧縮比 1.5 以上が望ましいが、あまり高圧縮比にする必要も無いという結果になっている。

3.5 簡易的な仕事流解析

以上の計算例を介して蓄冷器の機能を概略理解した上で、GM 冷凍機の場合と同様な仕事流解析を試みる。具体例として Fig. 44 のように蓄冷器の流路抵抗を蓄冷器中央に集中させ、全系を二つの圧力領域に分割する。

蓄冷器を通過する流量は(9)式と同じで、

$$\frac{dm_r}{dt} = C_r (P_1^2 - P_2^2) \quad (134)$$

を用いるが、ここでは(131)式で $f_r=87.5$ とし、かつ気体の密度に P_1 、 P_2 の平均値を用いれば、

$$C_r = \frac{d_h^2 A_g}{175 \mu R T_r L} \quad (135)$$

を得る。さらに蓄冷器の非効率 I_e に(31)式を用い、(33)式でエンタルピー流を求める。境界条件として(94)、(95)式

を用い、(95)式の ϕ をパラメータとして Runge-Kutta で解いた結果を Fig. 45 に示す。

W_a 、 W_e の最大値はシュミットの結果と同様に 90 度付近で得られているが、その割合 W_a/W_e は圧力損失のために温度比より小さくなっている。エンタルピー流は位相差の増大と共に増大しており、その結果、最大冷凍量を与える位相差は 90 度以下になり、%カルノーの向上にはさらに低い位相差が望ましいという結果を示している。ただし Fig. 45 に示した%カルノーの値は圧縮ピストンの可変空間における PV 仕事 W_a に対する値なので、実際にはさらに低い値となる。なお Fig. 44 に記入した数値は%カルノーが最大となる位相差 50 度の場合で、冷凍量は最大値の 7 割程度に減少している。

圧力損失の影響は Fig. 36 の PV 仕事に対応する図が Fig. 46 のような形で現れている。ただしここでは圧力損失を蓄冷器の平均温度で集中的に発生するものとしているが、実際には Fig. 40 に見られるように主に蓄冷器の高温部分で発生しているので、(131)式で使用する温度を $(3T_a + T_e)/4$ として計算すると細線で示すようにさらに影響が大きくなる。

以上の結果は、外見が同じ構造の冷凍機でも、冷凍能力の大きさが要求される場合と、高効率が必要とされる場合とで、それぞれに適した位相差を選定する必要があることを示している。

(以下、第 4 回に続く)

参考文献

- [1]~[4] は第 1 回 (文献 13), [5]~[12] は第 2 回 (文献 14) 参照
- 13) 松原洋一:「クライオクーラ [1] 一極低温冷凍機の基礎」, 低温工学 41 (2006) 351-358
- 14) 松原洋一:「クライオクーラ [2] 一極低温冷凍機の基礎」, 低温工学 41 (2006) 420-427
- 15) J.W.L. Kohler: "Refrigeration below -100°C," Adv. Cryo. Eng., K-2, 5 (1959) 518-525
- 16) C.M. Hargreaves: "The Philip Stirling Engine," Elsevier, Amsterdam, The Netherlands (1991)
- 17) 例えば,「低温工学概論」, 東京電機大学出版局, 東京 (1999) 147-149
- 18) M. Jakob: "Heat Transfer," Vol. 2, John Wiley & Sons, New York, USA (1957) 275
- 19) W.F. Schalkwijk: "A simplified regenerator theory," Trans. ASME, J. Eng. Power 81 (1959) 142-150
- 20) R. Radebaugh and B. Louie: "A simple step to the optimization of regenerator geometry," NBS Special Publications 698, U.S. Department of Commerce (1985) 177
- 21) 例えば,「伝熱学」機械工学基礎講座, 理工学社, 東京 (1982) 142
- 22) M. Tanaka, et al.: "Flow and heat transfer characteristics of Stirling engine regenerator in oscillating flow," JSME Int. J., Series 2, 33 (1990) 283

この基礎講座の内容に関する疑問、質問等を受け付けています。編集部 (teion@capj.or.jp) までご一報ください。