共鳴管とループ管で構成される 熱音響エンジンの発振温度比の数値計算

永田 翔平*, 上田 祐樹*†

Numerical Studies of the Onset Temperature Ratio for Spontaneous Gas Oscillation in a Thermoacoustic Engine with a Looped Tube and Resonator

Shohei NAGATA* and Yuki UEDA*†

Synopsis: The onset temperature ratio for spontaneous gas oscillation occurring in a thermoacoustic engine with a looped tube and resonator was calculated. The calculated result was compared with actual measurement and a quantitative agreement between them was obtained. Further, the effect of changing the shape of the thermoacoustic engine on the onset temperature ratio was numerically investigated. As a result, the optimum shape to realize a low onset-temperature ratio was determined.

Keywords: thermoacoustic engine, onset temperature ratio, acoustic field

1. はじめに

管内に狭い流路の束（以後これを蓄熱器と呼ぶ）を設置し、蓄熱器両端の温度比をある臨界値以上になると、管内の流体がひとりでに振動を始める。熱音響エンジンはこの自励振動現象を応用したエネルギー変換機である。熱音響エンジンは外燃機関であるため、廃熱や太陽エネルギーの有効利用の手段として注目を集めている。

熱音響エンジンは以下の3タイプが考案されている。

(a)直管タイプ(b)ループ管タイプ(c)ループ管に共鳴管を組み合わせたタイプ。(a)直管タイプでは定在波音波¹⁾が、(b)ループ管タイプと(c)ループ管に共鳴管を組み合わせたタイプでは進行波音波^{2,3)}が励起される。3つのタイプの中で(c)ループ管に共鳴管を組み合わせたタイプの熱音響エンジンが最も高い効率を実現しており、その値はカルノー効率の41%である⁴⁾。

熱音響エンジンの稼動には、ある臨界値以上の温度比を持つ2つの熱源が必要である。この臨界温度比を熱音響エンジンの発振温度比と呼ぶことにする。熱音響エンジンを利用した応用装置を設計するとき、発振温度比を知ることが重要である。これまで、直管タイプとループ管タイプの

熱音響エンジンに対して、それぞれ自励振動の安定性解析が行われ、発振温度比が計算により得られている。さらに、計算結果と実験結果の比較も行われている⁵⁻⁷⁾。しかし、ループ管に共鳴管を組み合わせたタイプの熱音響エンジンの発振温度比を数値計算的に明らかにした研究はない。また、このタイプのエンジンの装置形状が発振温度比に与える影響を定量的に調べた研究はない。

本研究ではループ管に共鳴管を組み合わせたタイプの熱音響エンジンの内部で起こる自励振動の安定性解析を行い、発振温度比を数値計算した。また、計算で得られた結果を既に報告されている実験結果と比較した。さらに、ループ管と共鳴管を組み合わせたタイプの熱音響エンジンの装置形状が発振温度比に与える影響を調べた。装置形状のパラメータとして管全長に占めるループ管長さの割合と蓄熱器設置位置を用いた。

2. 計算手法

Fig. 1(a)に計算対象とした熱音響エンジンの概略図を示す。エンジンは共鳴管とループ管で構成されている。共鳴管とループ管の内径を $2r_{tube}$ と記述し、それらの長さをそれぞれ L_r と L_l と記述する。ループ管の中には長さ L_{hx} の熱交換器に挟まれた長さ L_{regg} の蓄熱器が挿入されている。蓄熱器は断面が円の穴が無数に開いた構造体とし、その円の内径を $2r$ とする。高温側熱交換器下流に thermal buffer tube を設け、その長さを L_{tb} とした。蓄熱器設置位置のパラメータとして、共鳴管とループ管の接合点の対角の位置

Received August 31, 2008

* 東京農工大学 生物システム応用科学府
〒184-0012 東京都小金井市中町 2-24-16
Tokyo University of Agriculture and Technology, BASE
2-24-16 Nakacho, Koganei-shi, Tokyo, Japan

† E-mail: uedayuki@cc.tuat.ac.jp

Fig. 1 (a) A schematic illustration of a thermoacoustic engine with a looped tube and resonator. A position connecting the looped tube with the resonator is set as $x = 0$ and the positive direction of x is taken counter-clockwise in the looped tube and towards the right in the resonator. (b) The straightened looped-tube that shows the definition of the regenerator position X_{rege} .

から蓄熱器の中心までの距離 X_{rege} を用いた。Fig. 1(a) のように x 軸をとると、蓄熱器の中心は $x = L_l/2 + X_{rege}$ となる (Fig. 1(b) 参照)。

線形近似、長波長近似および理想気体近似を用いると、運動量の式と連続の式は行列の形式で

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} P \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-i\omega\rho_m}{A(1-\chi_v)} \\ \frac{-i\omega A[1+(\gamma-1)\chi_\alpha]}{\gamma P_m} & \frac{\chi_\alpha - \chi_v}{(1-\chi_v)(1-\sigma)} \frac{1}{T_m} \frac{dT_m}{dx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ U \end{pmatrix} \quad (1)$$

と書ける^{7,8)}。ここで A は管の断面積、 P は圧力の変動成分 (以後、単純に圧力と記述する)、 U は体積流速、 ω は角周波数であり、 P_m 、 ρ_m 、 γ 、 σ はそれぞれ管内に封入された気体の平均圧力、平均密度、比熱比、プラントル数である。また T_m は管壁の温度である。 χ_α と χ_v は $\omega\tau$ に依存する複素関数 (参考文献⁸⁾ の p. 114, 式(7.11) 参照) である； τ は流路長 r と熱拡散係数 α を用いて $\tau = r^2 / (2\alpha)$ とかける温度緩和時間である。平均圧力 P_m 以外は T_m つまり x の関数である。

温度分布 $T_m(x)$ が既知であれば、式(1)を数値積分できる。そこで、 $T_m(x)$ の分布を以下のように定めた。

- T_m は低温熱交換器では室温 $T_C = 291$ K で一定であり、高温熱交換器では高温 T_H で一定である。
- T_m は蓄熱器では線形的に室温 T_C から高温 T_H まで増加し、thermal buffer tube では指数関数的に T_H から減少する。
- T_m は蓄熱器、2つの熱交換器、thermal buffer tube 以外の位置では T_C で一定である。

定めた温度分布を用いて、ループ管内を反時計回りに式(1)を数値積分することで

$$M_{loop} \begin{pmatrix} P(0) \\ U^+(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(L_l) \\ U(L_l) \end{pmatrix} \quad (2)$$

が得られる⁷⁾。ここで $U^+(0)$ は $x = 0$ かつループ管内での体積流速である。 $U(L_l)$ は $x = L_l$ での体積流速、 $P(0)$ は $x = 0$ での圧力、 $P(L_l)$ は $x = L_l$ での圧力である。 $x = 0$ と $x = L_l$ は同じ場所なので、 $P(0)$ と $P(L_l)$ の関係は

$$P(0) = P(L_l) \quad (3)$$

となる。一方、共鳴管内では温度勾配がないので、式(1)は解析的に解け、その解は

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(-L_r) \\ U(-L_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(0) \\ U^-(0) \end{pmatrix}$$

$$b_{11} = \cos[kL_r]$$

$$b_{12} = \frac{-i\omega\rho_m \sin[kL_r]}{Ak(1-\chi_v)} \quad (4)$$

$$b_{21} = \frac{Ak(1-\chi_v) \sin[kL_r]}{i\omega\rho_m}$$

$$b_{22} = \cos[kL_r]$$

と書ける。 $U(-L_r)$ と $P(-L_r)$ は共鳴管開端部 ($x = -L_r$) における体積流速と圧力であり、 $U(0)$ は $x = 0$ かつ共鳴管内の体積流速である。 b_{ij} は共鳴管内の変換行列の各要素であり、式(4)中で用いられている k は複素数の波数

$$k = \frac{\omega}{a} \sqrt{\frac{1+(\gamma-1)\chi_\alpha}{1-\chi_v}} \quad (5)$$

である。ここで a は断熱音速である。 $U(0)$ 、 $U^+(0)$ 、 $U(L_l)$ は質量保存則より

$$U^-(0) + U(L_l) = U^+(0) \quad (6)$$

の関係にある。式(3)と式(6)の関係より式(2)は、

$$M_{loop} \begin{pmatrix} P(L_l) \\ U^-(0) + U(L_l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(L_l) \\ U(L_l) \end{pmatrix} \quad (7)$$

となる。ここで $U(0)$ と $P(L_l)$ の関係を導く。式(4)を展開すると、

$$\begin{aligned} P(L_l) &= b_{11}P(-L_r) + b_{12}U(-L_r) \\ U^-(0) &= b_{21}P(-L_r) + b_{22}U(-L_r) \end{aligned} \quad (8)$$

が得られる．式(8)の $U(0)$ と $P(L_l)$ より

$$U^-(0) = \frac{b_{21}P(-L_r) + b_{22}U(-L_r)}{b_{11}P(-L_r) + b_{12}U(-L_r)} \cdot P(L_l) \quad (9)$$

が得られる．式(9)より，式(7)は

$$\begin{pmatrix} P(L_l) \\ U(L_l) \end{pmatrix} = M_{loop} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{b_{21}P(-L_r) + b_{22}U(-L_r)}{b_{11}P(-L_r) + b_{12}U(-L_r)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(L_l) \\ U(L_l) \end{pmatrix} \quad (10)$$

と書きなおせる．共鳴管の開端での圧力 $P(-L_r)$ をゼロとすると，式(10)は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P(L_l) \\ U(L_l) \end{pmatrix} &= M_{total} \begin{pmatrix} P(L_l) \\ U(L_l) \end{pmatrix} \\ M_{total} &\equiv M_{loop} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{b_{22}U(-L_r)}{b_{12}U(-L_r)} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

と簡単になる． $P(L_l)$, $U(L_l)$ がゼロ以外の値で式(11)が満足される条件が存在すれば，その条件での振動は成長も減衰もしない．したがって，

$$(m_{11} - 1)(m_{22} - 1) - m_{12}m_{21} = 0 \quad (12)$$

が振動の安定限界条件つまり発振条件を与える．ここで m_{ij} は M_{total} の i 行 j 列目の要素である．本研究では式(12)を満たす蓄熱器内の流路長 r ，高温熱交換器の温度 T_H ，実数の ω の組み合わせを計算した．また，得られた r , T_H , ω を用いて $x = 0$ での音響インピーダンス $P(L_l) / U(L_l)$ を計算し，計算された $P(L_l) / U(L_l)$ と式(1)を利用することで装置内の圧力・流速場を計算した．

3. 数値計算結果と実験結果の比較

3.1 装置形状

第2章で示した数値計算手法を，発振温度比および内部の音場がすでに実験的に明らかになっている熱音響エンジン⁽³⁾に適用した．参考文献³⁾に記述されている装置形状を以下に記す．装置の形状は Fig. 1 と同様にループ管，共鳴管，蓄熱器そして2つの熱交換器で構成されている．共鳴管の長さ L_r は 1.04 m，ループ管長さ L_l は 1.18 m に固定されている．蓄熱器の長さ L_{rege} は 35 mm で蓄熱器両端に長さ $L_{ht}=10$ mm の熱交換器が設置されている．蓄熱器の位置を表すパラメータ X_{rege} の値は 0.13 m である．Thermal buffer tube の長さ L_{tb} は参考文献³⁾に記載されていない．そこで L_{tb} を L_l の 5% と仮定した．

実験で用いられた蓄熱器は積層されたステンレスメッシュシートであり，その線径 d_w は 0.12 mm，メッシュナン

Fig. 2 Graph of the angular frequency ω and T_H / T_C . The solid and dashed lines show the conditions that the real and imaginary parts of the left-hand side of Eq. (8) become zero, respectively.

バーは 60 番である．数値計算では蓄熱器を断面積が円の穴が軸方向に無数空いた構造物として扱うため，数値計算を行うためには積層されたステンレスメッシュシートの等価流路長 r_{eff} を知る必要がある．本研究では r_{eff} を見積もるための実験式⁹⁾

$$r_{eff} = \frac{1}{2} \sqrt{d_h \times d_w} \quad (13)$$

を用いた．ここで d_h は水力直径である．式(13)を用いると実験で用いられた蓄熱器の流路長は $r = 0.11$ と見積もれた．

3.2 安定限界条件

実験と同様の装置形状のパラメータを用いて，式(12)の左辺を T_H および ω の関数として計算した．Fig. 2 に式(12)の左辺の実数部と虚数部がそれぞれゼロになる T_H / T_C を ω の関数として示した．Fig. 2 から管の全長 $L_{total} = L_l + L_r$ が波長 λ の 4 分の 1 程度となる角周波数 $(2\pi a / (4L_{total})) = 2\pi \times 345/8.8 = 246 \text{ s}^{-1}$ 付近で実線と点線が交わっていることが分かる．交点では実数部と虚数部が共にゼロになるので，この交点での ω と T_H / T_C が自励振動の安定限界条件を与える．交点での ω と T_H / T_C はそれぞれ，253 s^{-1} と 1.66 であった．実験で得られた ω と T_H / T_C はそれぞれ 258 s^{-1} と 1.66 なので³⁾，第2章で示した手法で計算された稼働周波数と発振温度比はともに定量的に実験結果と一致している．

3.3 管内の音場の比較

3.2 節で得られた条件 ($\omega = 253 \text{ s}^{-1}$ と $T_H / T_C = 1.66$) 時の熱音響エンジン内の音場を計算した．計算された圧力の振幅 $\text{Abs}[P]$ ，流速の振幅 $\text{Abs}[U / A]$ ，圧力と流速の間の位相差 $\Phi = \text{Arg}[P / U]$ を線で，測定された値をそれぞれ symbol で Fig. 3 に示す．実験³⁾での音場の測定は $T_H / T_C = 1.66$ ではなく $T_H / T_C = 1.89$ の条件で行われている．しかし，熱音響エンジン内の音場は高温端の温度の値に大きくは依存しない．そのため，音場に対する数値計算の結果と実験結果は比較できると考えた．なお，計算では音響インピーダンスの分布が得られるだけで，圧力振幅や流速振幅の絶対値は

Fig. 3 Acoustic field in the looped tube and resonator. (a) The axial distributions of the amplitudes of pressure and velocity. (b) The axial distribution of Φ . The lines show the calculation results and the symbols show the experimental results.⁴⁾

決まらない。そこで、実験で得られた $x = 0$ での圧力振幅を用いて、絶対値を決定した。

Fig. 3(a)から分かるように、圧力振幅・流速振幅に関する実験値と計算値はエンジン内全域において定量的に一致している；実験値と計算値の差は圧力振幅に対して最大で 0.12 kPa、流速振幅に対して最大で 0.72 m/s であった。Fig. 3(b)から分かるように、圧力と流速の間の位相差に関しても、数値計算と実験結果は定量的に一致している；両者の差の最大値は 8.1 degree であった。

3.2 節で示した結果と本節の結果から、本研究で提案した数値計算方法は共鳴管とループ管を組み合わせた熱音響エンジンに適用できると結論した。

4. 装置形状が発振温度比に与える影響

4.1 装置形状のパラメータ

本章では装置形状が発振温度比に与える影響を調べ、発振温度比が小さくなる最適な装置形状を明らかにする。装置形状のパラメータとして、管の半径、蓄熱器長さ、全長、蓄熱器の設置位置等があげられる。本論文では、管の全長 L_{total} に対するループ管の長さの割合 L_l / L_{total} とループ管内における蓄熱器の位置 X_{rege} / L_l 、および蓄熱器の流路径 r の 3 つのパラメータに注目した。なお、 L_l / L_{total} 、 X_{rege} / L_l 、 r 以外の装置形状パラメータは第 3 章で用いた値を使用し、装置の全長 L_{total} は一定の値とした。

Fig. 4 Onset temperature ratio of the thermoacoustic engine. The multiplication sign X shows the minimum onset temperature $(T_H / T_C)_{min}$.

Fig. 5 Contour plot of the onset temperature ratio of the thermoacoustic engine.

4.2 安定限界曲線

第 3 章での装置形状と同じく、 L_l / L_{total} と X_{rege} / L_l をそれぞれ 0.53, 0.11 とし、蓄熱器の $\omega\tau$ つまり r を変化させながら、発振温度比 T_H / T_C を計算した。計算された T_H / T_C を $\omega\tau$ の関数として Fig. 4 に示す。この図からわかるように、 L_l / L_{total} と X_{rege} / L_l をそれぞれ固定すると、発振温度比 T_H / T_C が最少となる $\omega\tau$ が存在する。そこで、 L_l / L_{total} と X_{rege} / L_l がそれぞれある値をとる時の最少 T_H / T_C を $(T_H / T_C)_{min}$ と定義した。たとえば、Fig. 4 からわかるように、 $L_l / L_{total} = 0.53$ と $X_{rege} / L_l = 0.11$ の時の $(T_H / T_C)_{min}$ の値は 1.59 となる。なお、この場合の $(T_H / T_C)_{min}$ を実現する $\omega\tau$ の値(0.12)は直管タイプおよびループ管タイプの $(T_H / T_C)_{min}$ を実現する $\omega\tau$ の値(3程度^{2,5-7)})に比べて一桁小さい。

4.3 装置形状の最適化

様々な値の L_l / L_{total} と X_{rege} / L_l において r および ω を変化させ発振温度比を計算し、各々の L_l / L_{total} と X_{rege} / L_l に対して $(T_H / T_C)_{min}$ を得た。Fig. 5 に $(T_H / T_C)_{min}$ を L_l / L_{total} と X_{rege} / L_l の関数とした等高線プロットを示す。Thermal buffer tube がある為、蓄熱器をループ管と共鳴管の接合点に最も近づけた時の X_{rege} / L_l は 0.45 となる。

Fig. 5 から、共鳴管の長さループ管の長さが等しい $L_l / L_{total} = 0.5$ の時、発振温度比を最も小さくする最適な

X_{rege} / L_l の値が0.3程度であることが分かる。また、ループ管長さの割合 L_l / L_{total} を0.5から0.35まで小さくすると、最適な X_{rege} / L_l の値は0.3から0.45まで増加することが分かる。しかし、0.35からさらに L_l / L_{total} を小さくすると発振温度比 $(T_H / T_C)_{min}$ を最も小さくする X_{rege} / L_l の値が常に0.45であることが分かった。これはループ管の長さの割合が小さい $L_l / L_{total} < 0.35$ の時には、蓄熱器をできるだけ共鳴管とループ管の接合点に近づけると発振温度比を小さくできることを意味する。この結果は富永によって行われた定性的な議論¹⁰⁾の結論と一致する。 L_l / L_{total} と X_{rege} / L_l がそれぞれ0.30と0.45の時、 $(T_H / T_C)_{min}$ は最も小さくなり、その値は1.40であった。

ここでは L_{total} と X_{rege} の関係が $(T_H / T_C)_{min}$ に与える影響について考える。上で述べたように、 X_{rege} / L_l に最適値が存在する L_l / L_{total} の最小値は0.35であった。 $X_{rege} / L_l = 0.45$ かつ $L_l / L_{total} = 0.35$ の時、 X_{rege} / L_{total} は0.16となる。Fig. 5に $X_{rege} / L_{total} = 0.16$ を満足する X_{rege} / L_l を点線で結んだ。Fig. 5から分かるように、 $X_{rege} / L_{total} = 0.16$ を満足する点線は、ある $L_l / L_{total} (> 0.35)$ での最適な X_{rege} / L_l にほぼ等しい。また、 $X_{rege} / L_{total} = 0.16$ を満足する点線を $X_{rege} / L_l = 0.5$ まで外挿した時の L_l / L_{total} の値は0.32となり、この値は L_l / L_{total} の最適値(0.30)に近い。これまでの計算で得られた角周波数はほぼ一定であり、得られた角周波数と断熱音速から計算される波長 λ は常に $\lambda \sim 4L_{total}$ であった。これら事実から、ループ管と共鳴管で構成される熱音響エンジンの設計指針として、

- 全長の32%程度(波長の8%程度)をループ管の長さとし、
 - 蓄熱器をできるだけループ管と共鳴管の接合点に近い位置に置き、
 - 接合点に近い側を蓄熱器の高温端とする
- が得られる。また、ループ管の長さが決められており、その値が全長の32%以上(波長の8%以上)の場合は、次の条件を満足すれば、小さな発振温度比が実現できることが分かる。
- ループ管と共鳴管の接合点の対角の位置(今回の場合の $x = L_l / 2$ の位置)から管全長の16%程度(波長の4%程度)の位置に蓄熱器を設置し、
 - 接合点に近い側を蓄熱器の高温端にする。

5. 結言

ループ管に共鳴管を組み合わせたタイプの熱音響エンジンの発振温度比およびエンジン内の音場を自励振動の安定性解析を行うことで求めた。数値計算結果を実験結果と比較し、発振温度比、角振動数、管内の音場に関する計算結果が実験結果と定量的に一致していることを示した。さら

に、管の全長に占めるループ管長さの割合および蓄熱器の設置位置が発振温度比に与える影響を調べた。その結果、ループ管長さを波長の8%程度にし、ループ管と共鳴管の接合点にできるだけ近い位置に蓄熱器を設置することで発振温度比を小さくできることが判明した。

本研究の一部は科学研究費補助金(19860030)の助成および、文部科学省 若手研究者の自立的な研究環境整備促進プログラムの支援を受けたものである。

参 考 文 献

- 1) T. Yazaki and A. Tominaga: "Measurement of sound generation in thermoacoustic oscillations," Proc. R. Soc. London, Ser. A **454** (1998) 2113-2122
- 2) T. Yazaki, et al.: "Traveling wave thermoacoustic engine in a looped tube," Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 3128-3131
- 3) Y. Ueda, et al.: "Acoustic field in a thermoacoustic Stirling engine having a looped tube and resonator," Appl. Phys. Lett. **27** (2002) 5252-5254
- 4) S. Backhaus and G. W. Swift: "A thermoacoustic Stirling heat engine," Nature **339** (1999) 335; J. Acoust. Soc. Am. **107** (2000) 3148
- 5) W. P. Arnott, et al.: "Stability analysis of a helium filled thermoacoustic engine," J. Acoust. Soc. Am. **96** (1994) 370-375
- 6) A. Atchley and F. Kuo: "Stability curves for a thermoacoustic prime mover," J. Acoust. Soc. Am. **95** (1994) 1401-1404
- 7) Y. Ueda and C. Kato: "Stability analysis of thermally induced spontaneous gas oscillations in straight and looped tubes," J. Acoust. Soc. Am. **124** (2008) 851-858
- 8) 富永 昭:「熱音響工学の基礎」, 内田老鶴圃, 東京(1998) 130-136
- 9) Y. Ueda, T. Kato and C. Kato: "Experimental evaluation of the acoustic properties of stacked screen regenerators," J. Acoust. Soc. Am. (in press)
- 10) A. Tominaga: "Oscillation mode of gas in a looped tube with a branch," TEION KOGAKU, **36** (2001) 178-183
富永 昭:「枝管付きループ管の振動モード」, 低温工学 **36** (2001) 178-183

永田 翔平 1983年12月生。2008年東京農工大学機械システム工学科卒業。2008年同大学生物システム応用科学府博士前期課程(生物システム応用科学専攻)に在学中。

上田 祐樹 1977年7月生。2005年3月名古屋大学大学院博士(後期)課程修了。2005年4月 - 2006年9月日本学術復興会特別研究員(PD)として東京大学生産技術研究所にて研究に従事。2006年10月より、東京農工大学に特任准教授として勤務。熱音響現象の理解と応用を目指した研究に従事。低温工学協会、日本機械学会会員、日本物理学会員。博士(工学)。