遷移沸騰熱伝達問題

第三部 遷移沸騰熱伝達

Transition Boiling Heat Transfer Part III

V. V. Kostiyuk, N. N. Borisov and I. Berlin

Moscow Aviation Institute, Moscow USSR

(Received July 24, 1978)

玉 田 紀 治*・富 山 朔 太 郎* 訳

Synopsis :

At present, method of transient cooldown is widely used for studying boiling process. This method was successfully applied to studies of film boiling of cryogenic liquids.

The aim of the present work is to determine temperature of heat exchange surface while investigating heat transfer by the method of transient cooldown. For this purpose it is proposed to approximate temperature curve cooldown with the help of continued smooth function.

二次元座標系で表わした非定常逆熱伝達問題

今日、非定常逆熱伝達問題の解法は良く知られている。これら解法のうち、あるものは近似によるものだし、他のものは逆解法で得た解を境界条件として順解法に代入し、その解が再び逆解法の境界条件に一致する温度関数を与える点でより厳格である。特に、それが Buggraff 法³⁾によって得られた解であれば正しい。

文献2)には、そのような解が熱伝達問題順解法に対応する解から見つけられることが示されている。その上、Buggraff 法を使えば得られる解が比較的簡単な方法で記述できる利点がある。

本論文では、実際に興味深い二次元空間座標で表わした極低温液体の逆熱伝達問題の解法について、一般化一次元 Buggraff 法を使って求めている。

問題の提起

二次元非定常熱伝達の解析を無限長二重円筒を例として行なってみる。ただし、この円筒は一定の熱物理

特性をもつ二種類の材質でできており、その表面は理想的な熱接触が成立すると仮定する。実際に、この例は極低温流体が熱伝達率の低いコーティングを施したパイプラインを冷却する場合に応用できる。

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a_1} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

ここに $a_1 = a_0$ at $0 \leq r \leq r_1$

$a_1 = a_2$ at $r_1 \leq r \leq r_2$

$$\text{初期条件は } T(r, z, 0) = T_{\text{nay}}(r, z) \quad (2)$$

であり、連続円筒軸の境界条件は次の通りである。

$$\frac{\partial T}{\partial r}(0, z, \tau) = 0 \quad (3)$$

内部円筒と外部円筒の内表面に関する境界条件は次の通りである。

$$T(r_1, z, \tau) = T_1(z, \tau) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} -\lambda_0 \frac{\partial T}{\partial r}(r_1 - 0, z, \tau) &= -\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial r}(r_1 + 0, z, \tau) \\ &= q_1(z, \tau) \end{aligned} \quad (5)$$

ここに一般的には、 $T_1(z, \tau)$ は既知関数であり、 $q_1(z, \tau)$ は未知関数である。

*電子技術総合研究所高エネルギー研究室

境界条件は, $z \rightarrow \pm \infty$ で

$$\frac{\partial T}{\partial z}(r, \pm \infty, \tau) = 0 \quad (6)$$

である。この問題を解くにあたり, 温度分布 $T(r, z, \tau)$ 及び特に, 二重円筒の外側表面上の温度と熱流束の関係を決めておく必要がある。

$$T_2(z, \tau) = T(r_2, z, \tau) \quad (7)$$

$$q_2(z, \tau) = -\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial r}(r_2, z, \tau) \quad (8)$$

実際には, 関数(4)式を測定して求め, これを基に(7), (8)式を変形して解を求める。それゆえ, $T_2(z, \tau)$ と $q_2(z, \tau)$ を $T_1(z, \tau)$ によって表わす必要がある。

(1)~(8)式は領域が $0 \leq r \leq r_1$ では, 順解法により正しく求めるが, 領域が $r_1 \leq r \leq r_2$ では順解法では正しく解を求めることができず, 逆解法を行なう必要がある。しかし, 両領域においても Buggraff 法の二次元修正解法を使うのが適当である。

領域 $0 \leq r \leq r_1$ の解

解析を行なうにあたり, 次なる無次元変数を導入する。

$$R = \frac{r}{r_1}, \quad z = \frac{z}{r_1}, \quad t = \frac{a_1 \tau}{r_1^2}, \quad \theta = \frac{T - T_{\min}}{T_{\max} - T_{\min}} \quad (9)$$

ここに $T_{\max}$, $T_{\min}$ 等は特性温度 (初期, 最終温度とか, 中間温度) である。

方程式(1)式と境界条件(3), (4)式は次のようになる。

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial R} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial R}(0, z, t) = 0 \quad (11)$$

$$\theta(1, z, t) = \theta(z, t) \quad (12)$$

この解は次のような形で表わせる。

$$\theta(R, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{mn}(R) \frac{\partial^{m+n} \theta_1}{\partial z^m \partial t^n} \quad (13)$$

ここで $\varphi_{mn}(R)$ は決めるべき未知関数である。

解(13)式は自動的に条件(6), (2)式を満たす。しかし, $\tau \rightarrow 0$, $z \rightarrow \pm \infty$ では級数(13)式の一致性は低下するはずである。この現象は逆解法では普通である。(13)式を(10)式及び境界条件式(11), (12)式に代入して, 同じ微係数項で整理すると, 次を示す $\varphi_{mn}(R)$ 方程式の集合を得る。

$$\varphi''_{00} + \frac{1}{R} \varphi'_{00} = 0 \quad (14)$$

$$\varphi''_{10} + \frac{1}{R} \varphi'_{10} = 0 \quad (15)$$

$$\varphi''_{0n} + \frac{1}{R} \varphi'_{0n} = \varphi_{0, n-1} \quad (n \geq 1) \quad (16)$$

$$\varphi''_{1n} + \frac{1}{R} \varphi'_{1n} = \varphi_{1, n-1} \quad (n \geq 1) \quad (17)$$

$$\varphi''_{m0} + \frac{1}{R} \varphi'_{m0} = -\varphi_{m-2, 0} \quad (m \geq 2) \quad (18)$$

$$\varphi''_{mn} + \frac{1}{R} \varphi'_{mn} = \varphi_{m, n-1} - \varphi_{m-2, n} \quad (m \geq 2, n \geq 1) \quad (19)$$

境界条件は

$$\varphi_{00}(1) = 1 \quad (20)$$

$$\varphi_{mn}(1) = 0 \quad (21)$$

$$\varphi'_{mn}(0) = 0 \quad (22)$$

である。

こうして, m, n を増加させ(14)~(19)式を解くと, 次式を得る。

$$\varphi_{mn}(R) = \begin{cases} 0 & \text{at } m=2K-1 \\ (-1)^K \frac{(K+n)!}{K! n!} \varphi_{0K+n}(R) & \text{at } m=2K \end{cases} \quad (23)$$

第一関数 $\varphi_{0p}(R)$ の一般的な形は次のように表わせる。

$$\varphi_{0p}(R) = \frac{1}{(2^p P!)^2} \sum_{s=0}^p r_{ps} R^{2s} \quad (24)$$

(24)を(16)式に代入して, 同じ R の累乗項の係数を等しくすると, 次を示す式を得る。

$$r_{ps} = r_{p-1, s-1} \left(\frac{P}{S} \right)^2, \quad (1 \leq S \leq P) \quad (25)$$

(21)式の条件から,

$$r_{p0} = -\sum_{s=1}^p r_{ps} \quad (26)$$

となり, (20), (22)式を考慮して(14)式から

$$\varphi_{00}(R) = 1 \quad (27)$$

を得る。これより $r_{00}=1$ となる。

こうして, $S=1, 2, \dots, P$, $\bar{\theta}$ に対し P を連続的に増すと, 係数 r_{ps} は(25), (26)式から求まる。

(23), (24)式を考慮すると, $0 \leq R \leq 1$ の領域における温度は次のような形となる。

$$\theta(R, z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \sum_{s=0}^{K+n} r_{k+n, 2} R^{2s}}{K! n! (K+n)! 2^{2(K+n)}} \cdot \frac{\partial^{2K+2n} \theta_1}{\partial z^{2K} \partial t^{2n}} \quad (28)$$

$r=r_1$ における表面熱流束は

$$q_1(z, t) = -\lambda_0 \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=r_1} = -\lambda_0 (T_{\max} - T_{\min}) \cdot \frac{1}{r_1} \left(\frac{\partial \theta}{\partial R} \right)_{R=1} \quad (29)$$

また、有次元系で表わせば

$$q_1(z, \tau) = \frac{\lambda_0}{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{K! n!} G_{k+n} \frac{r_1^{2k+n}}{a_1^n} \cdot \frac{\partial^{2k+n} T_1}{\partial z^{2k} \partial \tau^n} \quad (30)$$

となる。ここで

$$G_p = \frac{1}{P! 2^{2p-1}} \sum_{s=0}^p s r_{ps} \quad (31)$$

である ($G_0=0$, $G_1=\frac{1}{2}$, $G_2=-\frac{1}{8}$, $G_3=\frac{1}{16}$...etc)。

領域 $r_1 \leq r \leq r_2$ の解

中空円筒 ($r_1 \leq r \leq r_2$) の境界条件 (5) 式は (30) 式で表わせる。解析にあたり、次の無次元変数を領域 $r_1 \leq r \leq r_2$ に導入する。

$$R = \frac{r}{r_1}, \quad z = \frac{z}{r_1}, \quad t = \frac{a_2 \tau}{r_1^2}, \quad \theta = \frac{T - T_{\min}}{T_{\max} - T_{\min}}, \quad Q = \frac{q r_1}{\lambda_2 (T_{\max} - T_{\min})} \quad (32)$$

方程式 (1) 式は (10) 式の形になり、境界条件は次のようになる。

$$\theta(1, z, t) = \theta_1(z, t) \quad (33)$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial R} \right)_{R=1} = \theta_1(z, t) \quad (34)$$

解は初期条件 (2) 式及び境界条件 (6) 式を自動的に満たす形として求められる。

$$\theta(R, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{mn}(R) \frac{\partial^{m+n} \theta_1}{\partial z^m \partial t^n} - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} g_{mn}(R) \frac{\partial^{m+n} Q}{\partial z^n \partial t^n} \quad (35)$$

$f_{mn}(R)$ 及び $g_{mn}(R)$ は求めるべき未知関数である。(35) 式を (10) 式に代入して微分項係数を等しく置くと $f_{mn}(R)$, $g_{mn}(R)$ の微分方程式の集合を得る。これは (14) ~ (19) 式に示した $\varphi_{mn}(R)$ と等価である。

(35) 式を境界条件 (33), (34) 式に代入して、同じ微分係数を等しく置くと次式を得る。

$$f_{00}(1) = 1 \quad (36)$$

$$f_{mn}(1) = 0; (m+n > 0) \quad (37)$$

$$f'_{mn}(1) = 0; (m \geq 0, n \geq 0) \quad (38)$$

$$g_{mn}(1) = 0; (m \geq 0, n \geq 0) \quad (39)$$

$$g'_{00}(1) = 1 \quad (40)$$

$$g'_{mn}(1) = 0 (m+n > 0) \quad (41)$$

(36) ~ (39) 式で示した $f_{mn}(R)$, $g_{mn}(R)$ に対して (14) ~ (19) 式の場合と同様な計算を行なうと、 $f_{mn}(R)$, $g_{mn}(R)$ に対しても、(23) 式が成立することがわかる。

これらの主関数 $f_{op}(R)$, $g_{op}(R)$ を計算すると、次のような一般形式になるはずである。

$$f_{op}(R) = \frac{1}{(2^p P!)^2} \sum_{s=0}^p (\varepsilon_{ps} R^{2s} + \zeta_{ps} R^{2s} \ln R) \quad (42)$$

$$g_{op}(R) = \frac{1}{(2^p P!)^2} \sum_{s=0}^p (\alpha_{ps} R^{2s} + \varphi_{ps} R^{2s} \ln R) \quad (43)$$

(16) 式の場合と同様に、(42) 式 $f_{op}(R)$ に代入して、両辺の同じ R 項係数を等しいとおくと、係数 ε_{ps} , ζ_{ps} に関して次のような式を得る。

$$\varepsilon_{ps} = \varepsilon_{p-1, s-1} \frac{P^2}{S^2} - \zeta_{p-1, s-1} \frac{P^2}{S^3} (1 \leq S \leq P) \quad (44)$$

$$\varepsilon_{p0} = - \sum_{s=1}^p \varepsilon_{ps} (P \geq 1) \quad (45)$$

$$\zeta_{ps} = \zeta_{p-1, s-1} \frac{P^2}{S^2} (1 \leq S \leq P) \quad (46)$$

$$\zeta_{p0} = \sum_{s=1}^p \zeta_{ps} - 2P^2 \sum_{s=1}^p \frac{\varepsilon_{p-1, s-1}}{S} (P \geq 1) \quad (47)$$

(36), (38) 式を考慮すると $f_{00}(R)$ に関して次式を得る。これは (14) 式の場合と同じである。

$$f_{00}(R) = 1 \quad (48)$$

(48) 式から $\varepsilon_{00}=1$, $\zeta_{00}=0$ となる。

こうして、係数 ε_{ps} , φ_{ps} は $S=1, 2, 3, \dots, P, 0$ の各値に対し P を増加させ (44) ~ (47) 式から求めることができる。また、(43) 式の係数 α_{ps} は (44) ~ (47) 式の ε を α , ζ , φ と変えてやれば等価であり、同様にして求めることができる。

(14) 式と同様に、(39), (40) 式を考慮すると $g_{00}(R)$ が求まる。

$$g_{00}(R) = \ln R \quad (49)$$

(49) 式から $\alpha_{00}=0$, $\varphi_{00}=1$ となり続く係数は (44) ~ (47) 式に示したと同様な式を使って求めることができる。

最終的な無次元系で表わした二重円筒の外層温度 (内表面温度、熱流束密度変化が既知の場合の中空円筒では外層温度) は次のように表わせる。

$$\theta(R, z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{K! n!} \frac{\sum_{s=0}^{n+k} (\varepsilon_{k+n, s} R^{2s} + \zeta_{k+n, s} R^{2s} \ln R)}{2^{2(k+n)} (n+K)!} \frac{\partial^{2k+n} \theta_1}{\partial z^{2k} \partial t^n} - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{K! n!} \frac{\sum_{s=0}^{n+k} (\alpha_{k+n, s} R^{2s} + \varphi_{k+n, s} R^{2s} \ln R)}{2^{2(k+n)} (K+n)!} \frac{\partial^{2k+n} Q_1}{\partial z^{2k} \partial t^n} \quad (50)$$

薄い外部層の場合

二重円筒の外部層が薄い場合には、(50)式は計算上都合の良い形ではない。なぜならば、(50)式を外部層が薄い場合に適用すると、大容積内の状態の微差を計算することになるからである。それゆえ、薄い中空円筒に対してはより都合の良い式を見つける必要がある(ここで $b=r_2-r_1 \ll r_1$)。

新しい座標として $x=r-r_1$ を導入する。これは壁厚さによる温度分布変化を特性づける。対応する無次元座標は

$$x = \frac{r}{r_1} = R - 1 \quad (51)$$

であり、 x は $0 \leq x \leq B$ の領域では $x \leq 1$ である。ここで B は b/τ_1 を示し、無次元壁厚を意味する。

この場合の温度分布は次のような形で表わせる。

$$\theta(x, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{mn}(x) \frac{\partial^{m+n} \theta_1}{\partial z^m \partial t^n} - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} g_{mn}(x) \frac{\partial^{m+n} Q_1}{\partial z^m \partial t^n} \quad (52)$$

(35), (52) を比較すると $f_{mn}(x)$, $g_{mn}(x)$ と $f_{mn}(R)$, $g_{mn}(R)$ とは同じ形であり、特に、(16)式と(23)式の形は全く同じになる。

その上、(48), (49)式から次式が成立する。

$$f_{00}(x) = 1 \quad (53)$$

$$g_{00}(x) = \ln(1+x) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{S} x^s \quad (54)$$

$R=1+x$ を (42), (43)式に代入して、 $\ln(1+x)$ を級数展開すると、 x の無限多項式が得られる。 $x \ll 1$ の場合には、 $f_{op}(x)$, $g_{op}(x)$ は次のようになる。

$$f_{op}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} h_{ps} x^s \quad (55)$$

$$g_{op}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} l_{ps} x^s \quad (56)$$

(53), (55)式から

$$h_{00}=1, h_{0s}=0 \quad (S \geq 1) \quad (57)$$

が得られ、(54), (56)式から

$$l_{00}=0; l_{0s}=(-1)^{s-1}/S \quad (S \geq 1) \quad (58)$$

が得られる。(55), (56)式を(16)式と同じ形の微分方程式に代入し、また境界条件(36)~(41)式に代入すると、次式を得る。ただし、 $R=1$ で $x=0$ であることを注意する必要がある。

$$h_{p0}=h_{p1}=h_{p2}=0 \quad (P \geq 1) \quad (59)$$

$$h_{ps} = \frac{h_{p-1, s-2} + h_{p-1, s-3} - (S-1)^2 h_{p, s-1}}{S(S-1)} \quad (60)$$

$$l_{0p}=l_{ps}=0 \quad (P \geq 1) \quad (61)$$

Table 1 Coefficients hps

p \ s	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{14}$	$\frac{1}{16}$
2	0	0	0	0	$\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{60}$	$\frac{1}{80}$	$-\frac{17}{1680}$	$\frac{23}{2688}$
3	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{720}$	$-\frac{1}{1680}$	$\frac{1}{2240}$
4	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{40320}$

Table 2 Coefficients lps

p \ s	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$
1	0	0	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{7}{120}$	$-\frac{11}{240}$	$\frac{4}{105}$
2	0	0	0	0	0	$\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{240}$	$\frac{1}{336}$
3	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{5040}$

$$l_{p2} = (l_{p-1, 0} - l_{p1})/2 \quad (62)$$

$$l_{ps} = \frac{l_{p-1, s-2} + l_{p-1, s-3} - (S-1)^2 l_{p, s-1}}{S(S-1)} \quad (S \geq 3) \quad (63)$$

これら係数 h_{ps} , l_{ps} の値を Table 1, 2 に示した。

表に示したデータを一般化する上で、(60), (63)式に示した式より便利な形がある。つまり(55), (56)式は次のような式で表わすことができる。

$$f_{op}(x) = \frac{x^2 P}{2P!} \left[1 - \frac{P}{2P+1} x + \frac{3}{4} \frac{P}{2P+1} x^2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{(5P+7)}{(2P+1)(2P+3)} x^3 + \frac{5}{32} \frac{P(7P+9)}{(2P+1)(2P+3)} x^4 \dots \right] \quad (64)$$

$$g_{op}(x) = \frac{x^{2P+1}}{(2P+1)!} \left[1 - \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \frac{3P+Y}{2P+3} x^2 - \frac{1}{8} \frac{5P+6}{2P+3} x^3 + \dots \right] \quad (65)$$

薄い中空円筒の無次元系で示した温度、あるいは二重円筒の薄い外層内のそれは次のようになる。

$$\theta(x, z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(K+n)!}{K! n!} f_{0, k+n}(x) \cdot \frac{\partial^{2k+n} \theta_1}{\partial z^{2k} \partial t^n} - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(K+n)!}{K! n!} g_{0, k+n}(x) \cdot \frac{\partial^{2k+n} Q_1}{\partial z^{2k} \partial t^n} \quad (66)$$

無次元系で示した外表面温度は次の通りである。

$$\theta_2(z, t) = \theta(B, z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{K! n!} \left(D_{k+n} \cdot \right.$$

$$\frac{\partial^{2k+n}\theta_1}{\partial z^{2k}\partial t^n} - H_{k+n} \frac{\partial^{2k+n}Q_1}{\partial z^{2k}\partial t^n} \quad (67)$$

ここで

$$D_p = \frac{P!}{(2P)!} B^{2p} \left[1 - \frac{P}{2P+1} B + \frac{3}{4} \frac{P}{2P+1} B^2 - \frac{1}{4} \frac{P(5P+7)}{(2P+1)(2P+3)} B^3 + \dots \right] \quad (68)$$

$$H_p = \frac{P!}{(2P+1)!} B^{2p+1} \left[1 - \frac{1}{2} B + \frac{1}{4} \frac{3P+4}{2P+3} B^2 - \frac{1}{8} \frac{5P+6}{2P+3} B^3 + \dots \right] \quad (69)$$

また、無次元系で表わした円筒外面の熱流束は次のようになる。

$$\theta_2(z, t) = -\frac{\partial \theta}{\partial R}(B, z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{K! n!} \cdot \left(E_{k+n} \frac{\partial^{2k+n}\theta_1}{\partial z^{2k}\partial t^n} - L_{k+n} \frac{\partial^{2k+n}Q_1}{\partial z^{2k}\partial t^n} \right) \quad (70)$$

ここに

$$E_0 = 0$$

$$E_p = (P!) f'_{\text{op}}(B) = \frac{P!}{(2P-1)!} B^{2p-1} \left(1 - \frac{1}{2} B + \frac{3}{4} \frac{P+1}{2P+1} B^2 - \frac{1}{8} \frac{5P+7}{2P+1} B^3 + \dots \right) \quad (71)$$

$$L_p = (P!) g'_{\text{op}}(B) = \frac{P!}{(2P)!} B^{2p} \left(1 - \frac{P+1}{2P+1} B + \frac{1}{4} \frac{3P+4}{2P+1} B^2 - \frac{1}{4} \frac{(P+2)(5P+6)}{(2P+1)(2P+3)} B^3 + \dots \right) \quad (72)$$

(66)～(72)式は中空円筒の場合にも適用できる。この場合には二物体間接触面で熱流束が温度によって記述できれば、(30)式を考慮すると変形が可能である。

(32)式を考慮して

$$Q_1(z, t) = \frac{q_1 r_1}{\lambda_2 (T_{\text{max}} - T_{\text{min}})} = \frac{1}{A} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+j}}{i! j!} \cdot G_{i+j} A^j \frac{\partial^{2i+j}\theta_1}{\partial z^{2i}\partial t^j} \quad (73)$$

ここに $A = \lambda_2 / \lambda_0$, $A = a_2 / a_0$

(73)式を(67), (70)式に代入すると次式を得る。

$$\theta_2(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{K! n!} \left[D_{k+n} \frac{\partial^{2k+n}\theta_1}{\partial z^{2k}\partial t^n} - \frac{H_{k+n}}{A} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+j}}{i! j!} G_{i+j} A^j \frac{\partial^{2k+n+2i+j}\theta_1}{\partial z^{2k+2n+2i+j}\partial t^{n+j}} \right] \quad (74)$$

$$\theta(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{K! n!} \left[E_{k+n} \frac{\partial^{2k+n}\theta_1}{\partial z^{2k}\partial t^n} - \frac{L_{k+n}}{A} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+j}}{i! j!} G_{i+j} A^j \frac{\partial^{2k+n+2i+j}\theta_1}{\partial z^{2k+2n+2i+j}\partial t^{n+j}} \right] \quad (75)$$

実際に計算する場合には、(74), (75)式を次のように表わした方が便利である。

$$\theta_2(z, t) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} M_{ps} \frac{\partial^{2P+s}\theta_1}{\partial z^{2P}\partial t^s} \quad (76)$$

$$\theta_2(z, t) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} N_{ps} \frac{\partial^{2P+s}\theta_1}{\partial z^{2P}\partial t^s} \quad (77)$$

ここに

$$M_{Ps} = (-1)^P \left[\frac{D_{P+s}}{P! S!} + \frac{1}{A} \sum_{l=0}^P \sum_{m=0}^S \frac{H_{P-1+s-m} G_{1+m} A^m}{l! m! (P-l)! (S-m)!} \right] \quad (78)$$

$$N_{Ps} = (-1)^{P+1} \left[\frac{E_{P+s}}{P! S!} + \frac{1}{A} \sum_{l=0}^P \sum_{m=0}^S \frac{L_{P-1+s-m} Q_{1+m} A^m}{l! m! (P-l)! (S-m)!} \right] \quad (79)$$

二重円筒の幾何学的構造とか材質の温度物理特性が既知であれば、係数 G は(31)式から、 D , H , E , L は(68)～(72)式から求まるので、 M_{ps} , N_{ps} を知ることができる。このように、係数 M_{ps} , N_{ps} を一度決めておけば、テストデータを求めると簡単な(76), (77)式を使って、 $\theta_1(z, t)$ を求めることができる。

同様に、三重あるいは多重円筒の場合にもこれまで述べた中空円筒からなる二重円筒計算法を適用することができる。この場合は(76), (77)式は次の円筒層の境界条件となる。実際に解く場合には、まず状態を次元形式で表現し、次に、(36)式以後で述べたような無次元形式に変換し、これら変換された変数を使って、次の円筒層温度分布を(50), (66)式により求めるのである。

円筒軸に沿って等温線が一定速度で移動している場合の温度分布

実験から関数 $T_1(z, T)$ を z , T の無限個の関係で示すことは不可能である。実際にはレコーダで測定できる有限個の $T_1(z)$ を知るだけである。従って、一般的には z 軸方向の微分計算は大きな誤差を生じさせてしまう。しかし、実際に重要である特殊な場合においては、温度分布にある規則性が存在する。この規則性がある場合には関数 $T_1(z)$ の情報不足はカバーされることになる。

実験データを正確に知る上で、最も都合の良い場合とは、曲線 $T_1(z_i, \tau)$ が時間軸に沿って等間隔に配置されている場合であり、同時刻において等距離 $\Delta z = z_{i+1} - z_i$ に等時間間隔 $\Delta \tau = \tau_{i+1} - \tau_i$ が対応している場合である。つまりこの場合には、 $T_1(z_i, \tau_i) = T_1 \cdot$

(z_{i+1}, τ_{i+1}) となる。

このことは温度 T_1 の各々の値が z 軸に沿って一定速度 V で移動していることを意味する。

$$V = \frac{z_{i+1} - z_i}{\tau_{i+1} - \tau_i} \quad (80)$$

この場合、(81)式の座標点上の温度は T_1 となる。

$$z = z_i + V(\tau - \tau_i) \quad (81)$$

そして、この温度は時刻 τ_i で観測される z_i 点のまた時刻 τ_{i+1} で観測される z_{i+1} 点の温度でもある。

微分要素 $dz = Vd\tau$ を使って座標軸に沿って微分すると、時間微分は次のようになる。

$$\left(\frac{\partial^{2P+s} T_1}{\partial z^{2P} \partial t^s} \right)_{z_i} = \frac{1}{V^{2P}} \frac{d^{2P+s} T_1(z_i)}{d\tau^{2P+s}} \quad (82)$$

これを(32)式で示した無次元座標系で表わすと、

$$\left(\frac{\partial^{2P+s} \theta_{1i}}{\partial z^{2P} \partial t^s} \right) = \frac{1}{V^{2P}} \frac{d^{2P+s} \theta_{1i}}{dt^{2P+s}} \quad (83)$$

となる。ここに、 V は Vr_1/a_2 であり、無次元座標系で表わした等温線移動速度である。

(83)式を(76)、(77)式に代入すると、次のような実験データに対応する計算式を得る。

$$\theta_2(z_i, t) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{M_{ps}}{V^{2P}} \frac{d^{2P+s} \theta_{1i}}{dt^{2P+s}} \quad (84)$$

$$Q_2(z_i, t) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{N_{ps}}{V^{2P}} \frac{d^{2P+s} \theta_{1i}}{dt^{2P+s}} \quad (85)$$

もしも、 $\theta_{1i}(t)$ の微分計算がわずらわしいのであれば、次のような合理的な公式を使えばよい。

$$\theta_2(z_i, t) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n \frac{d^n \theta_{1i}}{dt^n} \quad (86)$$

$$Q_2(z_i, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \frac{d^n \theta_{1i}}{dt^n} \quad (87)$$

ここで K_n , P_n は時間に依存しない係数である。

$$K_n = \sum_{i=0}^{\text{ent}(n/2)} \frac{M_{1, n-2i}}{V^{2i}} \quad (88)$$

$$P_n = \sum_{i=0}^{\text{ent}(n/2)} \frac{N_{1, n-2i}}{V^{2i}} \quad (89)$$

(86)、(87)式、あるいは同じような無限級数で表わ

される式を使う上で、その項数を簡単化のため制限してしまうことは計算結果に常に良くないということを目に入れておく必要がある。

今、 $t=t_j$ が考察点であるとするれば、 $t \ll t_j$, $t \gg t_j$ の領域については実験関数 $\theta_{1i}(t)$ を近似する必要がある。なぜならば、近似関数を導入することによって、二次微分あるいはより高次導関数を求める上で正確になるからである。

さらに言えば、 $\theta_{1i}(t)$ は近似パラメータで表わせるべきであり、(86)、(87)式の計算には通常の級数理論で求められるべきである。

謝 辞

著者はこの論文内容を支持して下さった安河内教授に感謝すると共に、論文出版の翻訳において援助して下さいた小笠原助教授及び Komakovski 氏に深く感謝する次第です。

参 考 文 献

- 1) A. G. Tyomkin : "Study of conductivity by inverse methods," Moscow, "Energiya" (1973)
- 2) V. K. Koshkin and E. K. Kalinin : "Unsteady heat transfer", Moscow, "Machinostroenie" (1973)
- 3) O. Buggraff : "Exact solution of inverse problem in heat transfer theory", "Teploperedacha" (1964) t. C.-86, No. 3 (Trans. ASME)
- 4) E. Sperrow and others : "Inverse problem of unsteady heat conductivity", "Prikladnaya mekhanika" (1964) t. E-86, No. 3 (Trans. ASME)
- 5) O. M. Alifanov : "Obtaining boundary heat conditions by solution of inverse problem of heat conductivity" Moscow, "Machinostroenie" (1965)