超伝導線のヒステリシス損失に及ぼす外部電流効果

蒲原 康二, 小笠原 武, 高橋 良和
久保田 洋二, 八十濱 和彦, 安河内 昂

日本大学理工学部 東京都千代田区神田駿河台1丁目8番地

(1980年4月17日受理)

Influence of the Transport Current on Hysteresis Losses in Superconducting Wires

Kouji KANBARA, Takeshi OGASAWARA, Yoshikazu TATAHASHI, Yoji KUBOTA,
Kazuhiko YASOHAMA and Kō YASUKŌCHI

Atomic Energy Research Institute, College of Science and Technology, Nihon University
1-8 Kanda-Surugadai, Chiyoda-ku, Tokyo, Japan

(Received April 17, 1980)

Synopsis:

The hysteresis loss in cylindrical non-ideal type II superconductors is investigated theoretically for the case where an alternating field is applied transverse to the conductor carrying a d. c. transport current. The cross-section of the shielded region in the superconductor is assumed to have an elliptical shape. In order to simulate the winding of superconducting magnets, the magnetic interaction between the turn under consideration and the surrounding turns is taken into account. The total hysteresis loss is analysed as a sum of the magnetization loss and the loss due to the dynamic resistance. The calculated losses for a wide range of the amplitude of the alternating field are given in graphs which clearly show how the transport current and the interaction among turns influence the hysteresis loss.

1. 序 論

非理想的第2種超伝導体が周期的に変化する磁場の中に置かれた場合、超伝導体はヒステリシス損失と呼ばれる電磁的エネルギー損失を示す。外部電流を担っていない超伝導体では、ヒステリシス損失は強磁性体の場合と同様に磁化曲線の囲む面積で表わされる。このヒステリシス損失は、明らかに超伝導体の形状、変動磁場振幅及び方向に依存する。

非理想的第2種超伝導体の外部電流を担っていない状態でのヒステリシス損失についての研究は数多く行なわれてきており、超伝導導線に使用される超伝導体の近似的形状とみなしうる無限長円柱に、軸と垂直方向に変動磁場を加えた場合についての研究も行なわれてきている。

単芯線の場合、外部変動磁場が非常に速く変化し

て、安定化のために超伝導体の周囲に存在する常伝導金属内の渦電流を無視できない場合を除いて、ヒステリシス損失のみが電磁的エネルギー損失である。

多芯線の場合には、電磁的エネルギー損失はヒステリシス損失に限らず、導線を構成している超伝導フィラメント間の結合電流によって生じる損失も存在するが、変動磁場が非常にゆっくり変化する場合には、各フィラメントは独立の超伝導体としてふるまうことになり、電磁的エネルギー損失は各フィラメントのヒステリシス損失の総和に一致する様になる。それゆえ、ヒステリシス損失を見積ることは、多芯線においても重要である。

さて、超伝導磁石に用いられる超伝導導線は、超伝導磁石自身が発生する磁場中で、励磁電流を担うという電磁的環境において使用される。従って、超伝導磁石に用いる超伝導導線の電磁的エネルギー損失に対す

る研究は、このような環境にある超伝導導線について行なう必要がある。しかしながら、励磁電流に相当する外部電流を担っている状態の超伝導導線に対する研究は数少ない。これは、多芯線に限らず、単芯線についても言えることである。

外部電流を担っていない状態にある円形断面超伝導体のヒステリシス損失についての研究には、従来、Morgan¹⁾ によるものがあり、最近の理論としては、Kato ら²⁾, Ashkin³⁾, Wilson ら⁴⁾, 及び Zenkevitch ら⁵⁾ によるものがある。

Kato らの理論は、臨界状態モデル⁶⁾と一定の臨界電流密度を採用し、被遮蔽領域内での経路積分を検討することによって、被遮蔽領域断面が近似的に円で記述されることを示し、ヒステリシス損失の式を算出している。また、さらによい近似として、楕円の被遮蔽領域が適当であることを示唆しているが、計算は行われていない。

Ashkin の理論は、一定の臨界電流密度を有する遮蔽電流領域の形状を、磁場変動が被遮蔽領域内に生じないように、数値計算を用いて決定し、それに基づいて、ヒステリシス損失を導いている。

Wilson らは、これから述べる本理論と同様に、一定の臨界電流密度と長径が超伝導体の直径と一致する楕円によって表わされる被遮蔽領域断面を考え、磁化曲線の面積から、ヒステリシス損失の式を導いている。ただし、外部磁場の変動量とそれに対応する遮蔽電流領域の厚さとの関係を表わす式が、本理論とは異なっている。

Zenkevitch らの理論は、遮蔽電流によって生じる磁化が半実験的な式を満足すると仮定し、その式に含まれる3つの定数を、遮蔽電流の微小発達極限における磁化とヒステリシス損失、及び最大発達極限における磁化によって決定している。この理論は、実験と非常によく一致を示しているが、外部電流が存在する場合について拡張するには、どの様に磁化の式を拡張するかという問題が存在する。

外部電流が存在する場合には、ヒステリシス損失は磁気履歴曲線の囲む面積のみによっては表わされなくなり、外部電流電源の負担する損失である有効抵抗損失が出現する。この有効抵抗は、臨界状態モデルで考えるとき、超伝導体内の電流分布を決定すれば、算出できる。したがって、外部電流が存在する場合を扱うには、臨界状態モデルで考えるのが適当であろう。

外部電流を担っている状態にある円形断面超伝導体

のヒステリシス損失についての理論は、いままでのところ、ほとんど存在しない。そして、著者らの知る限りでは、円形断面をそれに等価なスラブ断面に置き換えて扱う手法^{7),8),9)}が行なわれている。しかしながら、この手法は、スラブ化の手続きにおいて、人為的な処理を必要とする。なぜなら、捲線内での超伝導体間磁氣的相互作用の様相によって、等価のスラブ断面は変化するからである。その意味において、この手法には限界が存在する。

本稿では、円形断面をもつ無限長の超伝導体が、大きな一定の横磁場中に置かれ、外部直流電流を担っている状態にあるとき、比較的小さな外部変動横磁場によって誘起されるヒステリシス損失を臨界状態モデルで解析する理論について述べる。ただし、外部変動磁場とバイアス磁場の方向は平行であるとする。また、単芯線の場合、磁石内の超伝導線は、磁石を構成する他の導線の磁気能率がつくる磁場の影響を受けるが、この影響を Zenkevitch ら⁵⁾の方法によって取り入れる。多芯線の場合では、導線内の各フィラメント間の磁氣的相互作用を考慮する上で、この方法は有効であろう。

2. 超伝導体内の電流分布

2.1 楕円被遮蔽領域仮説

超伝導体に外部から変動磁場が作用するとき、超伝導体には、磁場変動から内部を遮蔽するように、遮蔽電流が表面及び表面付近に誘起される。いま、磁場変動から遮蔽されている内部領域を被遮蔽領域と呼ぶことにする。

変動磁場振幅が非常に小さい場合、被遮蔽領域は、超伝導体のほぼ全領域である。超伝導体の断面が円である場合、被遮蔽領域の断面も円である。変動磁場振幅が非常に大きく、超伝導体の全領域に遮蔽電流が誘起される場合には、被遮蔽領域は円断面の変動磁場方向に平行な軸上で消滅する。すなわち、被遮蔽領域の消滅寸前における断面は直径の長さの線分と見なし得る。

そこで、被遮蔽領域断面の両極限での関数形を統一的に記述する関数のうち、最も簡単な関数の一つに楕円が存在するのに気づく。それゆえ、被遮蔽領域の断面が楕円によって記述されると仮定することは合理的であろう。すなわち、直径 D の無限長円柱の被遮蔽領域断面は、変動磁場方向を長軸方向とする長径 D 、短径 $D-2W$ の楕円によって記述されると仮定する

Fig. 1 The assumed distribution of shielding currents. The dotted part is the shielded region with an elliptical shape.

Fig. 2 The magnetization process and the current distribution: $I_t=0$; $\Delta H_A < \Delta H_p$

Fig. 3 The magnetization process and the current distribution: $I_t=0$; $\Delta H_A > \Delta H_p$

(Fig. 1 参照)。

この仮定の妥当性については、Appendix において述べる。

2.2 磁化過程と電流分布

本稿では、大きな一定の横磁場中にあらかじめ置か

れた超伝導体が比較的小さな変動磁場を受けた場合について取り扱っているので、超伝導体の臨界電流密度 J_c は常に一定とする。

さて、楕円被遮蔽領域が仮定された場合の磁化過程と各磁化状態に対応する電流分布について説明する。

まず、超伝導体が外部電流を担っていない場合が、Fig. 2 及び 3 に示されている。電流分布図中の符号は電流の Z 方向成分の符号を表わしている。また、影の部分、は、磁化過程、中、磁場変動から一貫して遮蔽され続ける領域である。

実際に超伝導体を受けている変動磁場振幅 ΔH_A が、磁化の飽和を生じさせない程度の大きさである場合、すなわち、 ΔH_A が磁場変動が内部まで浸透する変動磁場振幅 ΔH_p より小さい場合では、Second run 以後の磁化過程と電流分布は Fig. 2 で表わされる。いま、 W_A は、磁化過程、中、で遮蔽電流が最も発達したときの遮蔽電流領域の厚さを表わしている。電流分布図の左肩の数字は、対応する磁化状態を表わしている。

Fig. 3 は、 ΔH_A が ΔH_p より大きい場合の Second run 以後の磁化過程と電流分布を表わしている。外部電流が存在しない場合、遮蔽電流領域は断面全体を覆うまで発達することができ、遮蔽電流領域の厚さは、超伝導体の半径まで成長する。

超伝導体が外部直流電流を担っている場合には、Fig. 4 及び 5 に表わされている磁化過程をたどる。変動磁場振幅が磁化の飽和を生じさせない程度の大きさである場合は、Fig. 4 に相当し、磁化の飽和が生じる場合は、Fig. 5 で表わされている。Fig. 4 において、電流分布図上の斜線部は、Fig. 2 の場合と同様に、磁化

Fig. 4 The magnetization process and the current distribution: $I_t \neq 0$; $\Delta H_A < \Delta H_p$

Fig. 5 The magnetization process and the current distribution: $I_T \neq 0$; $\Delta H_A > H_P$

過程中、変動磁場から一貫して遮蔽され続ける領域を示しており、この部分の電流分布は磁化過程を通じて不変である。そして、外部電流はこの部分によって担われている。このことは、外部電流のつくる磁場が、磁化過程を通じて不変であることをも意味している。また、 W_A は Fig. 2 と同様に、磁化過程で最も発達したときの遮蔽電流領域の厚さを表わしている。外部直流電流 I_c が存在する場合では、発達可能な遮蔽電流領域の最大の厚さ W_P は導体半径 $D/2$ より小さくなる。その理由は、磁化が飽和している状態においても、外部直流電流を担い続けていなければならないからであり、 W_P は容易にわかるように、次式で表わされる。

$$W_P = \frac{D}{2}(1-i), \quad i \equiv I_T/I_c$$

ここで、 D は超伝導体の直径であり、 I_c は臨界電流値である。

Fig. 5 の場合においても、外部電流のつくる磁場が磁化過程を通じて一定であることは、外部電流の分布が不変であることから、明らかである。

2.3 遮蔽磁場と磁気エネルギー

以上の様に、磁化過程での電流分布が定まると、各電流分布状態での遮蔽電流が内部に及ぼす磁場、すなわち、外部磁場の変動を打ち消して内部を遮蔽する磁場を、Biot-Savart の法則から算出することが可能となる。遮蔽電流は z 成分のみから成ると考えてよいので、各電流分布状態の遮蔽磁場 H_s は、断面の中心に注目して、次式により算出できる。

$$H_s = \frac{1}{2\pi} \iint_S dx dy J(x, y) \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (1)$$

ここで、 $J(x, y)$ は断面上の遮蔽電流の密度であり、

積分は断面全体について行なう。また、遮蔽電流密度の大きさは、 0 または $\pm 2J_c$ であることに注意しなければならない。被遮蔽領域が楕円で記述される場合、すなわち、楕円電流分布では、上式は解析的に積分することができる。

また、各電流分布状態において、超伝導体が遮蔽電流によって単位長さ当りに所有する磁気エネルギー M も、次式から算出することができる。ただし、変動磁場の加わる前の状態の磁気エネルギーを零としている。

$$M = \mu_0 \iint_S dx dy J(x, y) y \quad (2)$$

上式もまた、楕円電流分布を仮定すると、解析的に積分することができる。

3. 超伝導体間の磁氣的相互作用

超伝導体が実際に使用される場合、一本の超伝導体が孤立した状態で使用される場合はまれであって、2次元格子状に配列した状態で使用される場合がほとんどである。その場合、配列された各超伝導体は各々磁気エネルギーを所有しているので、格子内の超伝導体は、格子に属する他のすべての超伝導体の磁気エネルギーが及ぼす磁場の影響を受けることになる。

Zenkevitch ら³⁾は、最近、この影響を考察し、交流損失の計算に取り入れた。すなわち、超伝導体の格子が外部から及ぼされる変動磁場振幅 ΔH と超伝導体が実際に経験する変動磁場振幅 ΔH_A との間には、次の関係があることを示した。

Fig. 6 Two-dimensional array of superconducting wires and the geometrical factor, G .

Fig. 7 Typical examples of the geometrical factor $\bar{G}$. (a) The influence of the winding geometry on $\bar{G}$. (b) The dependence of $\bar{G}$ on the coil shape.

$$\Delta H_A - \Delta H = \bar{G} \Delta M \cdot \left(\frac{\pi}{4} D^2 \right)^{-1} \quad (3)$$

$$\Delta M = M(H_A^{\max}) - M(H_A^{\min}) \quad (4)$$

$$G \equiv \frac{1}{8} D^2 \sum \frac{2 \cos^2 \psi - 1}{r^2} \quad (5)$$

ここで、 G は彼らが導入した幾何学的因子であり、 Σ は格子全体についての和を表わす。また(3)式の $\bar{G}$ は、因子 G の算術平均である。

この方法は、格子内の各超伝導体が、各々の格子点に存在する2次元 dipole として、相互作用を行なっているとし、注目している超伝導体には、その格子点に、格子内のすべての等しい大きさの2次元 dipole のつくる磁場が、総和して作用すると考えているものである。

本稿でも、この方法を採用する。この方法の利点は、任意の捲線状態に適用できることであろう。ただし、この方法は、捲線内の超伝導体は等しい磁気能率を有すると近似しているため、そのための限界は存在するだろう。

このように、 $\bar{G}$ 因子によって、この相互作用の影響が決定されることになる。

参考のため、直径 $250 \mu\text{m}$ の超伝導体で、各辺 5 mm の正方形断面をもつ coil を巻いた場合の $\bar{G}$ 因子を Fig. 7(a) に示す。(a)は、変動磁場方向に密巻きし、層間距離を $500 \mu\text{m}$ とした場合である。(b)は、両方向に密巻きした場合である。(c)は、変動磁場方向に $500 \mu\text{m}$ の距離を置きながら、層方向に密巻きした場合である。

また、Fig. 7(b)は、両方向に密巻きした場合においても、coil の形状によって、 $\bar{G}$ 因子が大きく影響を受けることを示したものである。各々の coil は、その断面に各々360本、400本、400本、360本の超伝導体を含んでいる。

4. ヒステリシス損失

以上により、無限長円柱の超伝導体について、ヒステリシス損失を計算することができる。

外部直流電流を担っている状態では、超伝導体へのエネルギー供給は、外部直流電流の電源と磁場を供給する電源から行なわれる。外部直流電流の電源から供給されるエネルギーは、有効抵抗の測定によって知ることができる。磁場供給電源から供給されるエネルギーは、磁気履歴曲線の面積を測定することによって知ることができる。それで、これらの量を理論的に算出すれば、ヒステリシス損失を求めることができる。

4.1 磁化損失

磁場供給電源が負担する単位長さ当りのエネルギー損失 Q_M は次の様になる。

$$Q_M = \oint M dH_A \quad (6)$$

上の積分は、磁化の飽和が生じる場合と生じない場合とに、分けて考える必要がある。

(i) $\Delta H_A < \Delta H_P$ の場合

$$Q_M = -\frac{1}{3}\mu_0 J_c D^3 q_A^2 (1+q_A^2)^{-1} \Delta H_A \\ + \frac{2}{3\pi} \mu_0 J_c^2 D^4 \{(\tan^{-1} q_A)^2 + (1+q_A^2)^{-1} - 1\} \quad (7)$$

ここで、

$$q_A \equiv \left\{ \frac{(D/2)^2}{(D/2 - W_A)^2} - 1 \right\}^{-1/2} \quad (8)$$

そして、(1)式及び(2)式から次式を導くことができる。

$$\Delta H_A = -\frac{2}{\pi} J_c D \left(1 - \frac{1}{q_A} \tan^{-1} q_A \right) \quad (9)$$

$$\Delta M = -\frac{1}{3} \mu_0 J_c D^3 q_A^2 (1+q_A^2)^{-1} \quad (10)$$

この場合、磁化損失は、 q_A 及び ΔH_A がわかれば(7)式によって算出できる。これらの量の間には、(3)式、(9)式及び(10)式の関係が存在する。したがって、(3)式に(9)式及び(10)式を代入すれば、未知の量としては q_A のみを含む式に変形できる。そこで、この式から q_A が決定される。 q_A が定まれば、(9)式によって、 ΔH_A も決めることができる。

さらに、磁化が飽和するまでの被遮蔽領域断面の短径が、(8)式及び(9)式と同様の式によって記述されることは明らかである。

(ii) $\Delta H_A \geq \Delta H_P$ の場合

$$Q_M = \frac{1}{3} \mu_0 J_c D^3 q_P^2 (1+q_P^2) (\Delta H_A - \Delta H_P) \\ + \frac{2}{3\pi} \mu_0 J_c^2 D^4 \{(\tan^{-1} q_P)^2 + (1+q_P^2)^{-1} - 1\} \quad (11)$$

ここで、

$$q_P \equiv \left\{ \frac{(D/2)^2}{(D/2 - W_P)^2} - 1 \right\}^{-1/2} \quad (12)$$

$$= -\frac{1}{i} (1-i^2)^{1/2} \quad (13)$$

また、磁化が飽和する変動磁場振幅 ΔH_P 及びそれに対応する磁化振幅 ΔM は、次式で表わされる。

$$\Delta H_P = \frac{2}{\pi} J_c D \left(1 - \frac{1}{q_P} \tan^{-1} q_P \right) \quad (14)$$

$$\Delta M = -\frac{1}{3} \mu_0 J_c D^3 q_P^2 (1+q_P^2)^{-1} \quad (15)$$

この場合、 q_P が外部直流電流の大きさによって定ま

Fig. 8 (a)

Fig. 8 (b)

Fig. 8 The magnetic flux, to which the transport-current source respond, is distributed in the dotted region.

っているので、(3)式に(14)式及び(15)式を代入することによって、 ΔH_A は直ちに決定することができる。それゆえ、(11)式により、磁化損失を算出できる。

4.2 動的抵抗による損失

有効抵抗は、外部直流電流電源の感じる負荷電圧を測定すれば、知ることができる。変動磁場を受けている間に発生している負荷電圧を計算するには、超伝導体内の電場が存在しない経路 Γ を知ることが必要である¹⁰⁾。この経路は、超伝導体断面内の電流方向が逆転する位置の連続として存在する。外部電流電源は、この経路内の磁束変化を感じることになる (Fig. 8 参照)。いま、変動磁場を受けている間の電流分布が定まっているのだから、負荷電圧を知るのは容易である。円断面の超伝導体では、負荷電圧と外部電流は変動磁場の方向に分布をもつので、変動磁場方向が x 軸方向である場合には、各々 x 座標を変数として定まる。そして、有効抵抗による損失は、これらの積を x 座標について積分することにより、得ることができる。結局、単位長さ当りの有効抵抗による損失 Q_D は、次式の様になる。

$$Q_D = \frac{1}{L} \int_{\text{cable}} dt \int_{-D/2}^{D/2} dx I_t(x) V(x)$$

Fig. 9 (a)

Fig. 9 (c)

Fig. 9 (b)

Fig. 9 (d)

Fig. 9 The normalized hysteresis loss vs. the transport current for various amplitudes of the alternating field: (a) $\Delta H^* = 0.25$; (b) $\Delta H^* = 0.5$; (c) $\Delta H^* = 1.0$; (d) $\Delta H^* = 2.0$.

(i) $\Delta H_A < \Delta H_P$ の場合

$$Q_D = 0$$

(ii) $\Delta H_A \geq \Delta H_P$ の場合

$$Q_D = \frac{2}{3} \mu_0 J_c D^3 i^2 (\Delta H_A - \Delta H_P)$$

4.3 規格化ヒステリシス損失

単位長さ当りのヒステリシス損失 Q は, Q_M と Q_D の和によって求められる。いま, ヒステリシス損失を単位長さの超伝導体の占める空間に磁場 $\Delta H_P (I_t=0)$ が存在するときの磁気エネルギーで規格化して表わす。

$$Q^* \equiv Q \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \mu_0 J_c^2 D^4 \right)^{-1}$$

また, 磁場を $\Delta H_P (I_t=0)$ で規格化する。

$$\Delta H_A^* \equiv \Delta H_A \cdot \left(\frac{2}{\pi} J_c D \right)^{-1}$$

$$\Delta H_P^* \equiv \Delta H_P \cdot \left(\frac{2}{\pi} J_c D \right)^{-1}$$

すると, ヒステリシス損失は次の様に表わされる。

(i) $\Delta H_A^* < \Delta H_P^*$ の場合

$$Q^* = -\frac{4}{3} \Delta H_A^* q_A^2 (1 + q_A^2)^{-1} + \frac{4}{3} \{ (\tan^{-1} q_A)^2 + (1 + q_A^2)^{-1} - 1 \}$$

(ii) $\Delta H_A^* \geq \Delta H_P^*$ の場合

$$Q^* = \frac{4}{3} (\Delta H_A^* - 2\Delta H_P^*) q_P^2 (1 + q_P^2)^{-1} + \frac{4}{3} \{ (\tan^{-1} q_P)^2 + (1 + q_P^2)^{-1} - 1 \} + \frac{8}{3} (\Delta H_A^* - \Delta H_P^*) i^2$$

これらの式は, すべて無次元量で表わされていることに注目してほしい。

Fig. 9 は, 外部電流と規格化ヒステリシス損失との関係を, Zenkevitch の $\bar{G}$ 因子をパラメーターとして表わしたものである。Fig. 10 は, 実際に超伝導体にかかる変動磁場振幅とヒステリシス損失との関係を, 外部電流をパラメーターとして表わしたものである。

これらによると, 次の傾向が見られる。

- ① $\bar{G}$ 因子の影響は, 変動磁場振幅 ΔH が小さい程, 顕著である。
  - ② $\bar{G}$ 因子の影響は, 変動磁場振幅が定まっても, ある量以上の外部電流の存在によって, 減少する。
  - ③ 変動磁場振幅が小さい程, 外部電流の存在によって, ヒステリシス損失は著しく増大する。
- ところで, 本理論に基づいてヒステリシス損失を計算するために必要とされる各因子を, 次に整理してお

Fig. 10 The normalized hysteresis loss vs. the amplitude of alternating magnetic field.

く。

- ① 超伝導体の有効直径 D (この有効直径には, 超伝導体の断面積と等しい断面積の円の直径を用いるのが適当であろう。)
- ② 臨界電流 I_c (これは, 通常の電流—電圧特性によって定義された値を用いれば, 充分であろう。)
- ③ 外部変動磁場振幅 ΔH (これは, coil に外部から加えられる変動磁場振幅である。)
- ④ Zenkevitch の $\bar{G}$ 因子 (これは, coil の捲線状態及び形状のヒステリシス損失への影響を決める幾何学的因子である。)

5. 結 論

大きな一定の横磁場中に置かれた外部直流電流を担っている無限長円柱の超伝導体に、比較的小さな外部変動横磁場によって生じるヒステリシス損失を取り扱う一つの理論が提案された。この理論は、単芯線で捲かれた超伝導磁石に外部変動磁場が加わるときに生じる電磁的エネルギー損失を取り扱うことができるであろう。序論において、バイアス磁場と外部変動磁場の方向が平行であるとの制限を行なったが、上記の議論は、その制限を必要としていない。それゆえ、両者の方向関係によらず、本理論は適用できるであろう。また、多芯線のヒステリシス損失の算出にも適用できると考えられる。

6. Appendix

被遮蔽領域断面が長径 D の楕円によって表わされると仮定し、遮蔽電流及びそれがつくる磁場と外部磁場の変動についてのみ注目すると、被遮蔽領域内では、Maxwell 方程式から、磁束密度について次式が成り立つ。

$$\nabla^2 \vec{B} = 0$$

それゆえ、磁束密度の各成分は調和関数である。

ところで、Fig. 11の様な x 軸を回転軸とする回転楕円体を考える。図に表わされている2つの回転楕円体は、共通の焦点 $F_1(-a, 0, 0)$, $F_2(a, 0, 0)$ を有し、 r_1, r_2 は各焦点から面までの距離を表わしている。

回転楕円体の面上で、次の関数 ϕ は一定値をとり、また、調和関数でもある。

Fig. 11 The cross-sectional view of two ellipsoids with the common focuses.

$$\phi = \log \frac{\xi - 1}{\xi + 1}$$

ここで、

$$\xi = \frac{r_1 + r_2}{2a}$$

任意の調和関数 ϕ と ϕ の間には、Green の定理から次の関係が導出される。

$$\iint_S \phi |\vec{\nabla} \phi| dS = \iint_{S'} \phi |\vec{\nabla} \phi| dS$$

ここで、各積分は、各回転楕円体面について行なわれる。

超伝導体内の x 軸上のすべての点は、被遮蔽領域が存在する限り、外部磁場の変動から遮蔽されると仮定しているから、焦点 F_1, F_2 を有する回転楕円体の一つの極限が、 F_1, F_2 を結ぶ線分であることを考慮すれば、被遮蔽領域内に存在する任意の x 軸を回転軸とする回転楕円体について、次式が成り立つ。

$$\iint_S \vec{B} |\vec{\nabla} \phi| dS = \vec{0}$$

上式は、ここに挙げた ϕ 以外の同様な性質をもつ適当な関数についても導くことができる。それゆえ、磁束密度分布の対称性と上式は、被遮蔽領域内が外部磁場の変動から遮蔽されていることを示している。これは、楕円被遮蔽領域仮説が電磁気学的には無理のない仮定であることを意味している。

さて、超伝導体内の臨界電流密度 J_c が一定であると近似することと、楕円被遮蔽領域仮説が、どの程度に調和しているかを調べるために、 x 軸上の各点について、Biot-Savart の法則を用いて、各磁化状態での遮蔽磁場を計算し、その結果をFig. 12及び13に示す。ここで、 H_{s0} は超伝導体の中心における遮蔽磁場であり、 H_s は注目している点での遮蔽磁場である。

Fig. 12 The variation of the shielded magnetic field H_s along the x -axis. H_{s0} denotes the field H_s at $x=0$.

Fig. 13 The shielded magnetic field H_s plotted as a function of the thickness W (cf. Fig. 1).

Fig. 14 Magnetic moment (dimensionless) versus magnetic flux density (dimensionless). Full line; Ashkin's theory (ref. 3). Open circles; calculations from our model.

また、Ashkin³⁾が数値計算によって導出した初期磁化曲線と上記の楕円電流分布に基づく初期磁化の計算結果をFig. 14に示す。ここで、縦軸及び横軸は、各々Ashkinに従って無次元化した単位長さ当りの磁気エネルギーと磁束密度である。実線はAshkinによる値を、各点は本理論による値を表わしている。両磁化曲線は、飽和磁気エネルギーの出現する磁束密度とその大きさにおいて完全に一致すると共に、全領域において、極めて良い一致を示している。このことは、本理論に基づいて、ヒステリシス損失を計算することの妥当性を、理論的な立場から示していると考えられる。

参 考 文 献

- 1) Morgan, G.H.: BNL Int. Rep. AADD (1968) 146
- 2) Yujiro KATO, Masuo HANAWAKA and Kaoru YAMAFUJI: JJAP, **15** (1976) 695
- 3) M. Ashkin: J.A.P., **50** (1979) 7060
- 4) M.N. Wilson, C.R. Walters: RL-76-038 April (1976)
- 5) V.B. Zenkevitch, V.V. Zheltov, A.S. Romanynk: CRYOGENICS (1978) 93
- 6) Bean, C.P.: Rev. Mod. Phys., **36** (1964) 31
- 7) R. Hancox: Proc. IEE, **113** (1966) 1221
- 8) T.K. Hunt: J.A.P., **45** (1974) 907
- 9) T. Ogasawara, Y. Takahashi, K. Kanbara, Y. Kubota, K. Yasohama and K. Yasukōchi: CRYOGENICS (1979) 736
- 10) T. Ogasawara, K. Yasukōchi, S. Nose and H. Sekizawa: CRYOGENICS (1976) 33