プール沸騰冷却超電導導体の熱的静安定性に関する一考察

伊藤 猛宏, 久保田裕巳*

九州大学工学部動力機械工学教室 福岡市東区箱崎

* 九州大学工学部機械工学教室 福岡市東区箱崎

(1988年5月30日受理)

Static Thermal Stability of Superconductors Cooled by Pool Boiling

Takehiro ITO and Hiromi KUBOTA*

Department of Mechanical Engineering for Power, Kyushu University, Hakozaki, Higashi-ku, Fukuoka 812

* Department of Mechanical Engineering, Kyushu University, Hakozaki, Higashi-ku, Fukuoka 812

(Received May 30, 1988)

Synopsis:

Static thermal stability of the superconductors cooled by pool boiling has been examined in reference to Stekly's criterion, Maddock's equal area criterion and Wipf's MPZ (Minimum Propagating Zone) theory. No discussion on Stekly's criterion shall be done here because there are no disputable points left. Maddock's equal area criterion and Wipf's MPZ are both discussing the stability from the same point of view of unstable equilibrium. Nevertheless, the former leads to the maximum allowable current and the latter does not. Therefore, in the present paper, the relationship between Maddock's criterion and Wipf's MPZ and the physics underlying these theories are to be discussed firstly. Then an extensive sample calculation of MPZ is introduced for a realistic characteristic of pool boiling heat transfer which is very non-linear. Formulations have been general as far as they should.

1. 動 機

プール沸騰冷却される超電導導体の熱的静安定性に関する議論の中で、世上共通の理解になっているらしいと推察されることは、1) Stekly の規準¹⁾ で設計すればたいへん安全であるが、導体の基材(安定化材)の断面積が過大になり、経済性がおかしくなる、2) Maddock らのいわゆる等面積規準²⁾ は健全な理論であり、動作電流の上限(許容電流)を決める因子として採用することができる、3) Wipf の最小伝播領域^{3,4)} (MPZ) の考え方にも格別問題はない、などである。また設計という観点からは、導体の設計と冷却特性が与えられたとき、Stekly の規準と Maddock の等面積規準は許容電流を導くが、Wipf の最小伝播領域の考え方はそうでないという難点がある。さらに Wipf の最小伝播領域の考え方は、常電導と分流状態の領域(以下高温領域, Fig. 1)の温度分布形状が、MPZ 平

衡におけるそれを越えなければ、臨界電流以下である限りいかに大きな動作電流であっても許容されるという、一見はなほだ不安な結論を導く。

Stekly の規準については格別問題はなく、さらに議論しない。問題は Maddock の等面積規準と Wipf の最小伝播領域の考え方である。根本的には両者は同じ思想によっている。つまり、高温領域が拡大してクエンチに至るか、縮小して超電導状態に復帰するかの境目に不安定平衡の条件が存在し、その条件を知る目的で熱的安定性を論じている。これらはいずれも静安定性の議論であり、現実の現象の推移が静安定性の条件で律せられるか否かは、別個の議論を要するものであるが、まずは静安定性の議論から始めるというやり方は、この種の問題を論ずる順序として妥当なものであろう。しかし上で述べたように、Maddock の等面積規準は許容電流を導くが、Wipf の最小伝播領域の考え方はそうでないという矛盾がある。

g : 無次元化した導体の冷却表面積あたりの発熱	E/TL^2
h : $h = kf = k(g - q)$, 式 (23)	—
I : 動作電流	I
I_0 : 冷媒温度における導体の臨界電流	I
I_{sc} : 超電導電流	I
i : 無次元化した動作電流	—
i_0 : 無次元化した冷媒温度における導体の臨界電流	—
i_{sc} : 無次元化した超電導電流	—
K : 導体の熱伝導率	$E/TL\theta$
K_0 : 冷媒温度における導体の熱伝導率	$E/TL\theta$
k : 無次元化した導体の熱伝導率	—
m : 式 (29)	—
n : 式 (30)	—
P : 導体の冷却周長	L
Q : 導体の冷却表面積あたりの冷却, 熱除去	E/TL^2
Q_0 : パーンアウト熱流束	E/TL^2
q : 無次元化した導体の冷却表面積あたりの冷却	—
r : $k(dt/dx)$, 式 (22)	—
T : 過剰温度, 冷媒温度に相対的な温度	θ
T_0 : 超電導の臨界温度	θ
T_A : 交点温度	θ
T_h : KG -および KQ -曲線に対する等面積温度, 高温端温度	θ
T_s : 分流開始温度	θ
t : 無次元過剰温度	—
t_0 : 無次元化した超電導の臨界温度	—
t_A : 無次元化した交点温度	—
t_h : kg -および kq -曲線に対する等面積温度, 高温端温度	—
t_s : 無次元化した分流開始温度	—
X : 対称中心からの距離	L
X_0 : 特性長さ, 式 (8)	L
x : 無次元化した対称中心からの距離	—
ρ : 導体基材 (安定化材) の比抵抗	EL/I^2T

2. 定式化

Fig. 1 に示す導体の断面積が A , 冷媒に接触している導体の周長が P , 熱伝導率が K で, 対称中心から距離 X の点の温度を T とする。導体断面内の温度分布を考慮しないで, 一次的に論ずることにすれば, 高

Fig. 3 Superconducting current I_{sc} .

温領域が定常的に存在している場合の熱伝導の方程式は次式で表される。

$$\frac{d}{dX} \left[KA \frac{dT}{dX} \right] + P(G - Q) = 0 \quad (1)$$

ただし発熱 G および熱伝達による熱除去 Q の特性は, それぞれ Fig. 2 の KG -曲線および KQ -曲線で与えられる温度のみの既知関数であり, 境界条件

$$\left. \frac{dT}{dX} \right|_{\text{hot end}} = 0 \quad (2)$$

$$T|_{\text{cold end}} = 0 \quad (3)$$

を満足する $T(X)$ の性質を論ずることになる。

さて導体の温度対臨界電流の関係を Fig. 3 のように仮定する。すなわち温度ゼロ (冷媒温度) における臨界電流を I_0 , 臨界温度を T_0 とし, この間の特性は直線的であると仮定する。導体を流れている電流が図の I であるとき, 分流開始温度は T_s となり, $0 < T < T_s$ の導体部分は超電導の状態, $T_s < T < T_0$ のそれは分流状態, $T > T_0$ のそれは常電導の状態にあることになる。任意の温度における超電導 (で流れている) 電流を I_{sc} とすると, 発熱 G は

$$G = \frac{\rho}{PA} I (I - I_{sc}) \quad (4)$$

となる。ただし ρ は基材の比抵抗であり, I_{sc} は

i) $I \leq I_0$ の場合:

$$0 < T \leq T_s : I_{sc} = I$$

$$T_s < T \leq T_0 : I_{sc} = I(T_0 - T)/(T_0 - T_s) \\ = I_0(T_0 - T)/T_0 \quad (5a)$$

$$T > T_0 : I_{sc} = 0$$

である (図の太線)。また分流開始温度 T_s は次式で与えられる。

$$\frac{T_0 - T_s}{T_0} = \frac{I}{I_0} \quad (6a)$$

また

ii) $I > I_0$ の場合:

$$0 < T \leq T_0 : I_{sc} = I_0(T_0 - T)/T_0 \quad (5b)$$

$$T > T_0 : I_{sc} = 0$$

$$T_s = 0 \quad (6b)$$

と計算される。

式(1)から(6)を式(7)から(13)を使って無次元化する。

$$t = T/T_0 \quad (7)$$

$$x = X/X_0, \quad X_0^2 = K_0 A T_0 / P Q_0 \quad (8)$$

$$k = K/K_0 \quad (9)$$

$$i = I/I_0 \quad (10)$$

$$I_{sc} = I_{sc}/I_0 \quad (11)$$

$$g = G/Q_0 = ei(i - i_{sc}) \quad (12)$$

$$q = Q/Q_0 \quad (13)$$

$$e = \rho I_0^2 / P A Q_0 \quad (14)$$

ここに K_0 は温度ゼロにおける導体の熱伝導率, Q_0 は沸騰のバーンアウト熱流束である。 X_0^2 は断面積 A , 熱伝導率 K_0 , 長さ P あたり温度差 T_0 に対する熱伝導伝熱量 $K_0 A T_0 / P$ をバーンアウト熱流束 Q_0 で放散させるに必要な面積であり, 沸騰伝熱に相対的な導体内の熱伝導のコンダクタンスを意味するもので, X_0 を特性長さと呼ぶことにする。また e は任意の長さ (L とする) の導体が電流 I_0 の全部をジュール発熱するときの発熱量 $\rho L I_0^2 / A$ を, 同じ長さの導体がバーンアウト熱流束で放熱する場合の伝熱量 PLQ_0 で除いたものであり, バーンアウト熱流束に相対的な, 臨界電流によるジュール発熱の強さを表現しており, 以下特性発熱と呼ぶことにする。

$$\frac{d}{dx} \left[k(t) \frac{dt}{dx} \right] + f(t) = 0 \quad (15a)$$

$$f(t) = g(t) - q(t) \quad (16)$$

$$\left. \frac{dt}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (17)$$

$$t|_{\text{cold end}} = 0 \quad (18)$$

ただし式(16)における $g(t)$ は式(12)で与えるが, 同式中の i_{sc} は i と 1 との大小関係に応じて, 次のようにして与える。

i) $i \leq 1$ の場合:

$$0 < t \leq t_s : i_{sc} = i$$

$$t_s < t \leq t_0 (=1) : i_{sc} = 1 - t \quad (19a)$$

$$t > 1 : i_{sc} = 0$$

$$t_s = 1 - i \quad (20a)$$

ii) $i > 1$ の場合:

Fig. 4 Generation and removal of heat, normalized.

$$0 < t \leq 1 : i_{sc} = 1 - t \quad (19b)$$

$$t > 1 : i_{sc} = 0$$

$$t_s = 0 \quad (20b)$$

また同じ無次元化の仕方でも Fig. 2 を無次元化すると, Fig. 4 のようになる。なお後出の Fig. 7 の発熱特性は, $e = 1$ に対して式(12)を示したものである。勝手な e に対しては, 縦軸の値を単に e 倍すればよい。

3. 方程式と形式的な解

微分方程式(15a)において熱伝導率 k は温度 t の既知関数, g は式(12), (19)および(20)により同様, q も Fig. 4 により同様である。かりに熱伝導率が一定で, $k=1$ とすれば式(15a)は

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = -f(t) \quad (15b)$$

となる。力学系では, 式(15b)は変位 t における復元力が $f(t)$ であるような自由振動の微分方程式である。とくに $f(t) = at$ (a :定数) の場合には単振動の式になるが, その他の場合は非線形の自由振動の式になる。

現在の問題では Fig. 4 からして $f(t)$ は著しく非線形的であるが, 方程式(15a)は形式的に積分することができるので, それに基づいて解の性質を検討することにする。まず境界条件の式(18)を変更して式(21)とする。

$$\left. \frac{dt}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (17)$$

$$t|_{x=0} = t_h \quad (21)$$

Fig. 5 $h(t)$ in Eq. (23).

ただし式 (21) における高温端の温度 t_h の値はあらかじめわかっているものではないので、後でこれを決定する手段が必要である。(Maddock の等面積規準の場合には Fig. 4 において t_A と t_h が一致するとして、 $t_h = t_A$ と指定することになる。そして勝手な i に対しては t_A と t_h は一致しないが、一致させるような固有の i が一つだけ存在し、そのことが Maddock の等面積規準の場合の許容電流を導くことになる。)

さて式 (15 a) において

$$r = k(t) \frac{dt}{dx}, \quad \frac{d}{dx} = \frac{dt}{dx} \cdot \frac{d}{dt} = \frac{r}{k(t)} \cdot \frac{d}{dt} \quad (22)$$

と置換すると次のようになる。

$$r \frac{dr}{dt} = -h(t), \quad h(t) = k(t) f(t) \quad (23)$$

式 (23) の $h(t)$ は概念的に Fig. 5 のようになるであろう。一回積分する。

$$\frac{1}{2} r^2 = \int_t^{t_h} h(t) dt \quad (24)$$

ただし境界条件式 (17) を使った。上式を次のように書き換えてみる。

$$\frac{1}{2} r^2 + \int_0^t h(t) dt = 0 + \int_0^{t_h} h(t) dt \quad (25)$$

上で述べたように $k(t) = 1$ の場合には力学系とのアナロジーが成り立つので、式 (25) の結果を力学系の言葉で述べると、運動エネルギー $r^2/2$ と位置のエネルギー $U = \int h(t) dt$: 積分範囲 (0 から t) の和は一定 (右辺の定積分の値) であり、式 (25) は運動方程式 (15 b) のエネルギー積分である。このような結果が導かれるのは、外力が保存力場から導かれる場合であり、いまの場合外力は $-\nabla U = -\partial U / \partial t = -h(t)$ と

なるので U はポテンシャルの意味をもつ。

さて式 (24) をもう一度形式的に積分する。“形式的に” という意味は、積分の結果が $x = 0$ (高温端) および/あるいは低温端で仮性 (変格) 積分になる可能性があり、仮性積分が存在しなければ (このことはあとで議論する)、書き下した式は無意味になるからである。

$$x = \int_t^{t_h} \frac{du}{\sqrt{\int_u^{t_h} 2h(v) dv}} \quad (26)$$

ただし積分定数は式 (21) により決定した。仮性積分が存在すれば、式 (26) が Wipf が最小伝播領域と名づけた条件における高温領域の温度分布を与えることになる。

4. 解の性質

式 (26) により一応形式的に解は求まったが、1) 解 (26) に含まれている高温端温度 t_h はあらかじめわかっている量ではないこと、2) 解 (26) は仮性積分になる可能性があり、その存在を吟味しなければならない、の二点の議論が残されている。この章ではそれを論ずる。

4.1 高温端温度 t_h の決定

式 (24) において $t = 0$ (低温端) とし、その際の左辺の $r = k(t) dt/dx$ の値を考察する。物理的に $r \leq 0$ のはずである。仮に $r < 0$ であると仮定すると、その点で x の正方向の有限の熱流が存在し、その点より先 (大きい x) で $t > 0$ の領域が存在すべきであり、その点は $t = 0$ (低温端) でありえない。したがって、

$$r|_{t=0} = 0 \quad (27)$$

である。ゆえに

$$\int_0^{t_h} h(t) dt = 0 \quad (28 a)$$

となり、式 (28 a) が高温端の無次元温度 t_h を決定する式であり、Fig. 5 の t_h がそれである。次元のある形で表現すれば

$$\int_0^{T_h} K(T) \{G(T) - Q(T)\} dT = 0 \quad (28 b)$$

が高温端の温度 T_h を与えることになる。そして一般的には $t_h \neq t_A$ すなわち $T_h \neq T_A$ であるが、Maddock の等面積規準の場合には、これらの式を、 $t_h = t_A$ すなわち $T_h = T_A$ 、であると仮定している。別の言い方をすれば、そのような動作電流の場合にのみ平衡が達成

Fig 6 $m(t)$ in Eq. (29) and $n(t)$ in Eq. (30).

されると仮定することにより、動作電流の上限が定まることになる。

4.2 MPZ 平衡における温度分布 (26) の性質

式 (26) 右辺に含まれる関数

$$m(t) = \int_t^{t_h} 2h(u) du \quad (29)$$

と、この $m(t)$ を含む式 (26) の被積分関数

$$n(t) = \frac{1}{\sqrt{m(t)}} = \frac{1}{\sqrt{\int_t^{t_h} 2h(u) du}} \quad (30)$$

は、概念的にそれぞれ Fig. 6 の (a) および (b) のような挙動をするであろう。式 (29) や (30) に実際の $h(t)$ すなわち $k(t)f(t) = k(t)\{g(t) - q(t)\}$ を代入する場合は解析的には検討できないので、まず仮性積分が存在するような仮想的な二つの場合について計算してみよう。

4.2.1 $m(t) = at(t_h - t)$, a : 定数

この場合 $t=0$ および $t=t_h$ の近傍で $m(t)$ は ϵ^1 , ϵ : 小さい数で、 t あるいは $t_h - t$ を表す、の程度であるから、 $n(t)$ は $\epsilon^{-1/2}$ の大きさになるから、仮性積分 (26) は存在する。計算結果は次のようになる。

$$x = \frac{1}{\sqrt{a}} \left\{ \arcsin\left(\frac{t_h - 2t}{t_h}\right) + \frac{\pi}{2} \right\} \quad (31)$$

あるいは

$$t = -\frac{t_h}{2} \sin\left(\sqrt{a}x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{t_h}{2} \quad (32)$$

となり、 $t=0$ になる x ($x_{\text{hot region}}$ と書く) は

$$x_{\text{hot region}} = \pi / \sqrt{a} \quad (33)$$

と計算することができる。

4.2.2 $m(t) = t(t - t_h)(t - a)$, a : 定数, $a > t_h$

この場合にも $t=0$ および $t=t_h$ の近傍で $m(t)$ は ϵ^1 , ϵ : 小さい数で、 t あるいは $t_h - t$ を表す、の程度であるから、 $n(t)$ は $\epsilon^{-1/2}$ の大きさになり、仮性積分 (26) は存在する。計算結果は次のようになる。

$$x = \frac{2}{\sqrt{a}} F\left(\arcsin\sqrt{\frac{a(t_h - t)}{t_h(a - t)}}, \sqrt{\frac{t_h}{a}}\right) \quad (34)$$

$F(\quad)$ は Legendre-Jacobi の第一種の楕円積分である。

$x_{\text{hot region}}$ は

$$x_{\text{hot region}} = \frac{2}{\sqrt{a}} K\left(\sqrt{\frac{t_h}{a}}\right) \quad (35)$$

と計算することができる。 $K(\quad)$ は第一種の完全楕円積分である。

4.2.3 実際の発熱および冷却特性における積分 (26) の性質

実際の発熱・冷却特性に即して、式 (29) の $m(t)$ の $t=0$ の近傍の挙動を吟味する。 t あるいは $t_h - t$ を ϵ として、 t が 0 に近づくときも t_h に近づくときも $m(t)$ が ϵ^2 より遅く 0 に近づくならば、仮性積分 (26) は存在する。一方、 t が 0 に近づくときか t_h に近づくときかの、すくなくともいずれかで $m(t)$ が 0 に近づく速さが ϵ^2 より遅くなければ、仮性積分 (26) は発散する。

さて $m(t)$ を与える式 (29) の右辺の被積分関数は $2h(t) = 2k(t)f(t) = 2k(t)\{g(t) - q(t)\}$ であり、 $m(t)$ のグラフは概念的に Fig. 6 (a) のようなものであるが、 $2h(t)$ の $t=0$ の近傍の挙動を吟味する。Fig. 4 の kg -曲線からして、 $t=0$ の近傍では、 $i < 1$ である限り $g(t) = 0$ であり、また熱伝導率 $k(t)$ の変化は無視して差し支えないであろう。したがって $2h(t)$ の挙動は $q(t)$ のそれで決まる。 $t=0$ の近傍における $q(t)$ は自然対流の伝熱特性から与えられるものであるが、 $q(t) = at^b$, a および b : 定数、と書くとき、物理的にも実験的にも $b > 1$ であると考えられる。したがって $m(t)$ は 0 の近くで t^{b+1} , $b+1 > 2$ の程度であり、上で述べた理由により仮性積分 (26) は発散することになる。

ゆえに実際の発熱および冷却特性に対しては仮性積分 (26) は存在せず、高温領域の長さ $x_{\text{hot region}}$ も 4.2.1 の式 (33) や 4.2.2 の式 (35) のように有限にはならないで、無限大まで拡大することになる。したがって実際の発熱および冷却特性に対して解を決定し、その性質を検討するためには数値計算によらなければならない。

5. 数値計算の例

まず計算に使う定数および発熱および冷却特性を選定しておく。

5.1 冷媒温度と超電導の臨界温度

冷媒としては、大気圧における飽和液体ヘリウムを

Fig. 7 Heat generation $g(t)$ for $e=1$, heat removal $q(t)$ and thermal conductivity $k(t)$, normalized.

考える。そのことにより自動的に 4.2 K において $T=0$ K, $t=0$ となる。

導体としては NbTi を想定して、その臨界温度を 7.2 K とする。そのことにより、 $T_0=7.2-4.2=3.0$ K となり、この温度で無次元温度は式 (7) により、 $t=t_0=1$ となる。

5.2 冷却特性

大気圧における飽和液体ヘリウムのプール沸騰の典型的な特性として、熱流束 $Q[\text{W}/\text{m}^2]$ と過剰温度 (過熱度) $T[\text{K}]$ の関係を次のように与えることにする。

$$\begin{aligned} 0 < T < 1 : Q &= 10^4 T^{2.333} \\ 1 < T < 3 : &= 10^4 T^{-1.465} \\ T > 3 : &= 955 T^{0.673} \end{aligned} \tag{36}$$

式 (7) および (13) で無次元化して $q[-]$ を $t[-]$ で表現することになるが、その際 Q_0 は上式により $Q_0=10^4 \text{W}/\text{m}^2$ を採用することになる。

$$\begin{aligned} 0 < t < 1/3 : q &= 12.98 t^{2.333} \\ 1/3 < t < 1 : &= 0.2 t^{-1.465} \\ t > 1 : &= 0.2 t^{0.673} \end{aligned} \tag{37}$$

式 (37) は Fig. 7 に冷却特性として示してある。

5.3 導体の熱伝導率

過剰温度 $T[\text{K}]$ の関数としての熱伝導率 $K[\text{W}/\text{mK}]$ の一例⁷⁾として、次のような表現式を使用する。

$$\begin{aligned} 0 < T < 20.8 : K &= 350 + 61.6 T^{0.9344} \\ 20.8 < T < 145.8 : &= 9865 T^{-0.643} \\ T > 145.8 : &= 400 \end{aligned} \tag{38}$$

$K_0=350 \text{W}/\text{mK}$ として式 (7) および (9) により無次

Table 1 Sample calculation of the characteristic heat generation e .

		Conductor A	Conductor I	Conductor II
Critical current at the temperature of coolant	I_0 [A]	1,660	260	1,020
Resistivity of the stabilizer	ρ [Ωm]	5.5×10^{-10}	2.4×10^{-10}	2.4×10^{-10}
Diameter of the conductor	D [m]	3 mm $\times$ 4.8 mm (rectangular)	0.5×10^{-3}	2.45×10^{-3}
Cooled perimeter of the conductor	P [m]	6.72×10^{-3}	1.57×10^{-3}	5.25×10^{-3}
Cross sectional area of the conductor	A [m^2]	14.4×10^{-6}	0.196×10^{-6}	4.71×10^{-6}
Burnout heat flux of boiling heat transfer	Q_0 [W/m^2]	10×10^3	10×10^3	10×10^3
Characteristic heat generation $\rho I_0^2 / P A Q_0$	e [-]	1.57	5.27	101

元化して、過剰温度 t [—] の関数として、無次元熱伝導率 k [—] を表現すると次のようになる。

$$\begin{aligned} 0 < t < 6.93 : k &= 1 + 0.491 t^{0.9344} \\ 6.93 < t < 48.6 : &= 13.91 t^{-0.643} \quad (39) \\ t > 48.6 : &= 1.14 \end{aligned}$$

式 (39) は Fig. 7 に熱伝導率として示してある。

5.4 特性発熱 e

特性発熱 e の大きさの程度を検討してみる。導体の例として Table 1 の導体 A⁸⁾ および文献 9) で取り上げられている導体 I および II (Table 1 でも同じ名称) を検討してみる。これらの導体に対する e を表の最下行に示す。したがってここでは e を変化させる範囲として 1 から 100 を選定する。

5.5 数値計算法

問題は微分方程式 (15 a) の境界条件式 (17) および (18) を満足する解を決定することである。その際発熱特性は式 (12) (Fig. 7 の g : 発熱特性, 無次元電流を指定し, 任意の e に対しては, 縦軸の値を e 倍する), 冷却特性は式 (37) (Fig. 7 の q : 冷却特性), 導体の熱伝導率は式 (39) (Fig. 7 の k : 熱伝導率) で与えられることになる。

勝手な推定による導体の温度分布を与えておき, 差分方程式の繰返し法によって定常温度分布を決定するのが常套の手段である。しかし物理的な推測から明らかなように, 決定されるべき定常温度分布において系は不安定平衡の状態にあり, よほど僥倖的に良好な推定温度分布から出発しない限り, 繰返し法は収束をもたらさないであろう。つまり高温すぎる推定温度分布を与えると, 過剰発熱になり, それを満足する温度分布はより高温になり, 高温側に発散するし, 逆の場合は低温側に発散して, いたるところ $t = 0$ になってしまう。これはちょうど上向きに凸な局面上の頂点に球を置いたようなものである。この傾向は, 低温端は第一種の境界条件式 (18) で規定されているが, 高温端が浮動的 (floating) な境界条件式 (17) によって規定されている二種—一種の境界値問題であることにより, さらに助長される。

しかし現在の問題では幸い式 (28 a) により, 微分方程式を解くことなく高温端 ($x = 0$) の温度を決定することができる。このことにより高温端の温度 t_h を固定することができ, その結果式 (17) のかわりに $t|_{x=0} = t_h$ を採用することができるので, 高温端を浮動的な点として扱うことが避けられる。つまり境界条件は一種—一種となる。この変更により, 差分方程式

の繰返し法が集束するようになった。

数値計算する際のいま一つの問題は, 4.2.3 の議論により低温端が無限遠にあることである。現在の問題においては, 低温端において温度も温度勾配もゼロである (式 (18) および (27)) ことを使ってこの困難を次のようにして解決した。すなわち適当に大きな $x_{\text{cold end}}$ を仮の低温端として, 差分法による解を決定し, 徐々に $x_{\text{cold end}}$ を大きくしながら解を求める。 $x_{\text{cold end}}$ が過大になると, 数値計算の誤差により, $x_{\text{cold end}}$ の近傍の温度 t が負になる (導体温度が冷媒温度より低くなる)。これがおこる直前の $x_{\text{cold end}}$ を数値計算上の低温端とし, その $x_{\text{cold end}}$ に対する解を最終的な数値解とした。

5.6 計算結果

5.6.1 MPZ 平衡における温度分布

Fig. 8 に特性発熱 e が 1 における, いくつかの動作電流に対する平衡温度分布の例を示す。電流の増大に伴い, 高温端における温度が低くなり, かつ高温端 (対称中心) 付近の温度上昇が鈍くなる傾向が明らかである。このように種々の電流に対応してそれぞれの平衡温度分布が可能であることが MPZ 平衡の特徴である。種々の電流といっても, 1) 許される最高の動作電流 i ははたして 1 (臨界電流) であるのか。また, 2) 許される最低の電流が存在するか, 存在すればその値はいくらになるか, については後で検討する。図中の直線 t_0 (実線) および曲線 t_s (破線) は温度分布の各曲線上で温度が, それぞれ臨界温度および分流開始温度になる点の軌跡を示したものである。臨界温度は動作電流の大きさに関わりなく一定で $t_0 = 1$ であるが, 分流開始温度は式 (20) にしたがって電

Fig. 8 Temperature distribution along the conductor in MPZ equilibrium for $e=1$.

Fig. 9 Dimensions of the hot region.

流とともに減少する ($i = 0 : t_s = 1$, $i = 1 : t_s = 0$).

5.6.2 高温領域の広がり

Fig. 9 に高温領域の広さを、 e をパラメータとして、動作電流 i の関数として示す。4.2.3 の所論により、 $t > 0$ の領域は数学的には無限遠にまで及んでいるので、 $t > 0$ の広さで高温領域の広さを特徴づけるわけにはいかない。したがって $t > t_0$ 、すなわち臨界温度より高温の領域の広さ（実線。 x は高温端からの距離であるから、実際の広さは縦軸の値の 2 倍）、および $t > t_s$ 、すなわち分流開始温度より高温の領域の広さ（破線。同じ理由で、実際の広さは縦軸の値の 2 倍）、で表現した。与えられた e に対する図の曲線の特徴は、1) 低い電流側の極限では実線と破線の二つの曲線は合流して横軸に垂直なある漸近線に近づく、2) 高い電流側の極限では二つの曲線は分離して、超臨界温度（超電導の臨界温度を越えている温度）の広さは 0 になり (Fig. 8 において大きい電流に対しては、温度分布の曲線と直線 t_0 の交点が存在しないことに対応する)、超分流開始温度の広さは $i = 1$ を漸近線として無限大に近づく、ことである。

5.6.3 MPZ 平衡を導く動作電流の範囲

(a) 低電流側：低い電流側の漸近線の意味、すなわち与えられた e に対して、不安定平衡が可能な最小の電流の意味を考えてみる。Fig. 10 において、Maddock's equilibrium と記してある曲線（破線）より上部にある各曲線の分枝は、Fig. 4 の交点温度 t_A (k_g -曲線と k_q -曲線の膜沸騰部分との交点) を、 e をパラメータとして動作電流 i に対してプロットしたものである。その値は、現在の計算例では式 (12) において $i_{se} = 0$ とした式と式 (37) の根として

$$t_A = (e/2)^{1/10.673} i^{2/10.673} \quad (40)$$

Fig. 10 Temperature at the point of intersection t_A and hot end temperature in MPZ equilibrium.

で与えられる。Fig. 10 において、Maddock's equilibrium と記してある曲線より下の各曲線の分枝は、式 (28) を満足する高温端温度 t_h であり、Fig. 5 や Fig. 6 の t_h に対応するものである。図から明らかに e を固定して動作電流を小さくしていくと t_h は徐々に大きく、 t_A は徐々に小さくなり、ある固有の電流において $t_h = t_A$ となる。この点でいわゆる Maddock の等面積規準が成立し、ここでは同時に MPZ 平衡も成立している。

次に $t_h = t_A$ を満足する電流よりも小さい電流に対して、MPZ 平衡が成立する可能性を検討する。Fig. 11 において k_g は発熱特性を、 k_q は冷却特性を過剰

Fig. 11 Minimum operating current for MPZ equilibrium.

温度に対して示したものである。ただし式 (16), (23) および (28) により, MPZ 平衡は $h(t)=k(t)\{g(t)-q(t)\}$ に対して等面積条件を満足する t_h において成立するもの (Maddock 平衡も $h(t)=k(t)\{g(t)-q(t)\}$ に対する等面積条件が満足されたとき成り立つものであるが, この場合は上述のように, さらに $t_h=t_A$ が成り立っていないなければならない。つまり MPZ 平衡の t_h と交点温度 t_A が一致していなければならない) であるから, $k(t)$ を乗じた形で図示してある。さて図において $(kg)_1$ と kq の二つの曲線に対して $t_h=t_A$ が成り立っている, Maddock 平衡しているものとする。つまり Fig. 10 において二つの曲線の分枝が合流している状態にあるものとする。この状態から電流を少し減少されると, kq のほうは電流に依存しないので変化しないが, kg のほうは $(kg)_2$ のように変化する。そうすると発熱過剰部分の面積は横ハッチだけ減少し, 冷却過剰部分の面積は縦ハッチだけ増加する。したがって, 高温端温度 t_h をどのように選定しても, 等面積条件が成立する可能性はまったくない。すなわち MPZ 平衡と Maddock 平衡を同時に満足する動作電流より小さい電流では, MPZ 平衡は存在しえない。このような意味において MPZ 平衡と Maddock 平衡を同時に満足するような動作電流は, 各特性発熱 e に対して固有の値であり, 各 e における MPZ 平衡が可能な最小の動作電流を意味する。それを e に対して, 高温端温度 t_h とともにプロットすると Fig. 12 のようになり, 2章で述べたように特性発熱 e は臨界電流の強さ, あるいは導体の冷却されにくさを表現するものであるから, e とともにこの固有電流が減少しているのは合理的である。

Fig. 12 Operating current and hot end temperature as function of characteristic heat generation in Maddock's equilibrium.

(b) 高電流側: さて次に, Fig. 9 において超分流通開始温度の広さは $i=1$ を漸近線として無限大に近づくこと, あるいは Fig. 10 において $i \geq 1$ に対しては MPZ 平衡が可能な t_h が存在しそにないことの意味を考えてみる。この計算では式 (37) により冷却特性を与えているので, Fig. 10 における $t=1$ の水平線はいわゆる膜沸騰の極小温度を, $t=1/3$ の水平線はバーンアウト点の温度を示すものであるから, 大動作電流側では MPZ 平衡の高温端温度はバーンアウト点温度より低い。すなわち高温端の伝熱様式は核沸騰か自然対流である。Fig. 13(a)は1よりは小さいが, 十分に1に近い動作電流に対する等面積状態を示す。等面積条件を満足する高温端の温度 t_h はたいへんに低く, Fig. 10 の右下領域で t_h が急激に小さくなっていることに符合している。それでは $i \geq 1$ ではどうなるのであろうか。

Fig. 13(b) は $i=1$ に対する等面積状態を示す。しかしこのような等面積状態が存在しうことは, それが MPZ 平衡として実現されることを必ずしも意味するものではなく, 実は Fig. 13(b) に対応するような MPZ 平衡は不可能である。なぜなら高温端側で冷却過剰, 低温端側で発熱過剰になるから, 低温端側の過剰な発熱が高温端方向へ導体を通して運ばなければならない。そのような(熱力学の第二法則を犯すような)熱伝導は存在しえないので, MPZ 平衡は不可能である。

(c) まとめ: (a)および(b)をまとめると次のようになる。与えられた特性発熱 e に対して MPZ 平衡が可能な最低の動作電流が存在し, その場合高温端の温度は

Fig. 13 MPZ equilibrium at very large operating current.

交点温度に一致する。この条件はまた Maddock 平衡をも意味するものである。したがって Maddock 平衡は、与えられた e に対して最低の動作電流で実現される MPZ 平衡を意味する。現在の計算条件では、このような電流は Fig. 12 で与えられる。

MPZ 平衡が可能な最大の動作電流は特性発熱 e に関わりなく 1 である。

つまり与えられた e に対して MPZ 平衡が可能な動作電流の範囲は、Maddock 平衡に対応する電流と 1 の間である。

5.6.4 蓄積エネルギー

最後に MPZ 平衡において導体に蓄積される冷媒温度に相対的な熱エネルギーを検討しておく。導体の密度と比熱との積、つまり熱容量は温度に対して変化せず、 C であるとする。蓄積エネルギーの $1/2$ は

$$E = \int_0^{\infty} CAT dx = E_0 \int_0^{\infty} t dx \quad (41)$$

$$E_0 = CX_0 AT_0 \quad (42)$$

と計算される。蓄積エネルギーの $1/2$ という意味は、式 (41) の積分範囲が半無限であることによる。また E_0 は特性長さ X_0 だけの導体を臨界温度 T_0 まで加熱するに要するエネルギーである。なお熱容量が温度変化する場合には、式 (41) の被積分関数の中の C の温度変化特性が必要になる。 E/E_0 すなわち

$$E/E_0 = \int_0^{\infty} t dx \quad (43)$$

を、特性発熱 e をパラメータとし、動作電流 i の関数として Fig. 14 に示す。各曲線の左端は Maddock 平衡に対応し、右端は $i = 1$ まで延びている。曲線の右端で曲線が上昇に転ずるのは、Fig. 9 の右端側で超分流通開始温度領域の広さが上昇に転じていることに対応するものであろう。

右端側の小さな立上りを別にして、各曲線は i に対しておおむね単調減少的であり、MPZ 平衡が可能な

Fig. 14 Stored energy at MPZ equilibrium.

最低電流、すなわち Maddock 平衡において蓄積エネルギーが最大に達することは、おそらく重要な意味をもつものであろう。このことについては稿を改めて検討してみたい。

6. あとがき

著者の一人（伊藤）は Maddock の等面積規準は誤りであるという私見を、十分な説明をすることなく方で述べ、多くの方々の困惑を招いてきた。そして Maddock の等面積規準が、ブール沸騰冷却される超電導導体の静的安定な動作電流を選定する有力な規準の一つになっている現状では、著者らの考えるところを披瀝して発言の責任をとるべきであるとの思いがつのり、未熟なてすさびをあえて発表することにした。

この稿をとりまとめる前と後では、Maddock の等面積規準に対する著者らの評価は多少とも変化し、“誤りである”というような発言は誤解を招くものであると反省することになった。すなわち“誤りである”というような言い方は、正確には誤りであり、Maddock の等面積規準は MPZ 平衡の低動作電流側の極限であると述べるべきである。また Maddock の等面積規準によって、静的安定条件を満足する動作電流を選定することは、安全側の設計指針ではあるが、導体のオーバーオール動作電流が小さく押えられるという犠牲を伴う。

謝 辞

これで“十分な説明”になったかどうかはなはだ疑わしいが、とにかくさしあたり考えたことを披瀝して諸賢のご批判を仰ぎたいという次第である。とくに故安河内昂教授には、重大な問題なので早々に考えをま

とめて公表するよう、生前しきりにお勧めいただいていたが、今日までのびのびになってしまった。まことに粗末ながら、ご霊前に報告申し上げ、ご厚誼の一端に報いたい思いである。最後に大学院学生本並鉄二君が、数値計算を手伝ってくれたことを記して感謝する。

参 考 文 献

- 1) Z. J. J. Stekly and J. L. Zar: IEEE Trans. Nucl. Sci. NS-12 (1965) 367
- 2) B. J. Maddock, G. B. James and W. T. Norris: Cryogenics 9 (1969) 261
- 3) S. L. Wipf: *Stability and Degradation of Super Conducting Current Carrying Device*, Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, New Mexico (1978)
- 4) S. L. Wipf: Stability of Superconducting Isabelle Dipole Magnets BNL-51412 (1981)
- 5) M. N. Wilson and Y. Iwasa: Cryogenics 8 (1978) 171
- 6) V. T. Morgan: *Advances in Heat Transfer*, Academic Press, New York, 11 (1975) 199
- 7) V. J. Johnson ed.: *Properties of Materials at Low Temperature (Phase I)*, Pergamon Press, Oxford (1961) p.3. 112-1 の line c
- 8) (株) 昭和電線電纜の製品
- 9) W. Nick: Stability of Superconductors in Helium I and Helium II, Proc. of the Workshop held at Saclay, France (1981) 139