圧力変動を考慮した GM 冷凍機シャトル熱損失の解析

稲田 孝明, 西尾 茂文*

東京大学大学院工学系研究科 東京都港区六本木 7-22-1

* 東京大学生産技術研究所 東京都港区六本木 7-22-1

(1994 年 10 月 25 日受理)

Analysis of Shuttle Loss Including Influence of Pressure Oscillation in GM Refrigerators

Takaaki INADA and Shigefumi NISHIO*

Division of Engineering, Graduate School, University of Tokyo, 7-22-1 Roppongi, Minato-ku, Tokyo 106

* Institute of Industrial Science, University of Tokyo, 7-22-1 Roppongi, Minato-ku, Tokyo 106

(Received October 25, 1994)

Synopsis :

The so-called shuttle loss in a displacer-type cryocooler is caused by temperature distribution in the radial direction of the thin gas layer between the cylinder and the displacer. The temperature oscillation is due to the following two reasons : one is reciprocating motion of the displacer and the other is pressure oscillation of the gas. We refer to the heat loss induced only by the former as the shuttle heat transfer. To evaluate the shuttle loss in a Gifford-McMahon (GM) refrigerator including the influence of the pressure oscillation, we have employed a numerical approach based on the linearized thermoacoustic theory. The theory can be a very useful tool to treat the problem if the oscillating amplitude is fractional. The results show that the pressure oscillation of the gas functions as a prime mover in usual operating conditions. Compared with the shuttle heattransfer characteristics, several characteristics of the shuttle loss were drawn from the calculation results. Further, it is confirmed that coating on the surface of the solid walls with a low thermal-conductivity material is effective in reducing the shuttle loss.

Keywords : Gifford-McMahon refrigerator, shuttle loss, thermoacoustic theory, pressure oscillation, heat transfer

1. 序 論

Gifford-McMahon 冷凍機 (以下では GM 冷凍機と呼ぶ), Stirling 冷凍機, Vuilleumier 冷凍機などに代表されるディスプレイサ型の極低温小型冷凍機の冷凍能力を制限している主要因子として, 蓄冷器効率¹⁾, シャトル熱損失, 伝導損失を挙げることができる。このうち伝導損失については熱伝導の基本法則にしたがうので, 固体壁に熱伝導率の小さい材質を用い, その肉厚を薄くすることによって低減可能である。また極低温領域における蓄冷器効率は, 蓄冷材の比熱の減少と作動流体であるヘリウムガスの比熱の増加にともな

って低下するが, 近年この問題に対処するために, 新しい蓄冷材の開発を中心とした多くの研究が行われ^{2,3)}, 冷凍能力の向上に大きな成果をあげている。しかしもう一つの主要な損失であるシャトル熱損失についての評価方法はいまだ確立されておらず, シャトル熱損失を低減する余地もまだ残されていると考えられる。

シャトル熱損失とは, シリンダーとディスプレイサの間のガス層にできる半径方向の温度分布に起因する熱損失である。この温度分布を形成する主な要因として, シリンダーとディスプレイサの相対運動と, ガスの圧力変動の二つを挙げることができる。前者の要因

のみに着目してシャトル熱損失と呼ぶ場合もあるが、これら二つの要因を切り離して考えることは必ずしも現実的ではない。ここでは前者の要因のみに着目した場合、すなわちガスの圧力変動を考慮しない場合の伝熱機構を特にシャトル伝熱と呼び⁴⁾、両者の要因が重畳して起こる損失をシャトル熱損失と呼ぶことにする。シャトル伝熱を対象とした解析はこれまでにいくつか提案されており^{4~6)}、その伝熱機構も明らかにされているが、ここで定義したようなガスの圧力変動の影響をも含めたシャトル熱損失に対する検討は現在までに行われていない。

シャトル熱損失が問題となるディスプレイサ型の小型冷凍機では、一般に作動流体の変動圧力は平均圧力に対して十分に小さいとは言いがたい。したがって圧力変動とかかわる何らかの非線形現象が存在する可能性がある。静止流路内でガスが圧力変動をとまって往復運動するような系に対する解析手法として、最近では熱音響理論^{7~11)}の進展が著しいが、このような系においても非線形効果を取り扱うのは容易でない。ここで問題とするシャトル熱損失は、さらに二つの向かい合った固体壁が相対的に運動するという複雑な系で起こるため、本論文では、ガスの圧力変動を考慮したシャトル熱損失に対する研究の第一段階として、線形熱音響理論に基づいた解析を行い、特に一段の膨張機を有するGM冷凍機におけるシャトル熱損失の概要を検討する。

2. 膨張機のモデル

GM 冷凍機のシャトル熱損失を解析するために、Fig. 1 の断面図のような一段の膨張機モデルを考える。この膨張機はシリンダー、ディスプレイサ、ガス、ピストンリング（ガスシール用）で構成され、ピストンリングはディスプレイサに固定されている。ガス以外の構成要素はすべて固体である。ディスプレイサは、厚さ δ の薄いガス層を介して、シリンダー内を周波数 f 、ストローク（全振幅） S で正弦的に往復運動する。ディスプレイサに設定した軸方向座標を x と定義し、低温端を原点にとる。またディスプレイサ、ガス層、シリンダーには、それぞれ半径方向座標 y_a , y_g , y_c を定義する。ディスプレイサの長さは L とし、ディスプレイサ、ガス、シリンダーの高温端 ($x=L$)、低温端 ($x=0$) での一周期平均温度は、いずれもそれぞれ T_h , T_l とする。ディスプレイサ外径は D_d 、シリンダー内径は D_c 、ディスプレイサ、シリンダー肉厚

Fig. 1 Expander geometry for analysis.

はそれぞれ τ_d , τ_c とする。ディスプレイサ内壁、シリンダー外壁は断熱されている。またガスの圧力は正弦的に変動し、ディスプレイサの往復運動は高温端でのガスの圧力変動に対して $1/4$ 周期遅れている。

解析は以上の膨張機モデルの周期定常状態を対象とする。解析に先立って、簡単のため、次のような仮定を行う。

- (1) 放射伝熱は無視できる。
- (2) ディスプレーサ、シリンダーの肉厚、およびガス層厚さ（ガスギャップ）は、シリンダー外径に比べて十分に小さく、ガス層は矩形流路、ディスプレイサ、シリンダーは平板として扱える。
- (3) ガスの圧力は半径方向で一様であり、 x と時刻 t のみの関数で表される。また圧力の時間平均は x 軸方向で一定である。
- (4) 流れは層流で、ガスは x 軸方向のみに運動する。したがって y 軸方向のガスの速度は 0 である。
- (5) 温度の時間平均は、ディスプレイサ、ガス、シリンダーにわたって、 y 軸方向に一様である。
- (6) すべての変動量は十分に小さく、線形近似が成り立つ。
- (7) ガスの物性値は時間平均温度および時間平均圧力における値、固体壁の物性値は時間平均温度における値でそれぞれ代表し、 x のみの関数として扱う。

後述の計算条件あるいは一般的な GM 冷凍機の運転条件では、(1)~(5) の仮定はほとんど問題にならない。一方、(6), (7) の仮定は非線形現象を無視することに相

当する。一般に小型冷凍機では平均圧力に比べて変動圧力の大きさを無視することができない。したがってこれらの仮定がどこまで適用できるかについては大いに検討の余地があるが、今回はシャトル熱損失の基本的な特徴を調べることを目的とし、線形理論の範囲内で解析を行うにとどめる。

3. 解 析

3.1 諸変動量の定式化

周期的な変動量である圧力、温度、 x 軸方向速度、比エントロピー、密度を複素表示によってそれぞれ、

$$p_g = p_{g,co} \exp(i\omega t) + p_{g,m} \quad (1)$$

$$T_j = T_{j,co} \exp(i\omega t) + T_m \quad (2)$$

$$u_j = u_{j,co} \exp(i\omega t) \quad (3)$$

$$s_j = s_{j,co} \exp(i\omega t) + s_{j,m} \quad (4)$$

($j=d, g, c$)

$$\rho_g = \rho_{g,co} \exp(i\omega t) + \rho_{g,m} \quad (5)$$

と表す。ただし ω は角周波数、 t は時刻、 i は虚数単位、添字 m は時間平均、添字 d, g, c はそれぞれディスプレイサ、ガス、シリンダーを表す。添字 co で表される複素数は、変動量の振幅のみならず位相の情報をも含み、また ν の関数として ν 軸方向の分布も表す。ただし仮定(3)より、(1)式中の $p_{g,co}$ だけは ν に関して一定値をとる。ここで高温端($x=L$)での圧力変動をすべての変動量の位相の基準にとり、 $p_{g,co}$ ($x=L$)を実数で表すことにすると、膨張機モデルの設定条件から、 $u_{d,co}$ 、 $u_{c,co}$ はそれぞれ、

$$u_{d,co} = 0 \quad (6)$$

$$u_{c,co} = -\omega S/2 = u_{c,re} \quad (7)$$

となる。 $u_{c,co}$ は実数なので添字 re を用いて $u_{c,re}$ と表した。シリンダーは固体であるから、 $u_{c,re}$ は x, y 座標によらず一定である。

3.2 数値計算の概要

まず最初に、ここで行う数値計算の概要をFig. 2に示しておく。数値計算は x 軸方向に要素分割($I=1 \sim i_{max}$)して一次的に行う。図のような形で $p_{g,co}$ 、 T_m 、 $\langle u_{g,co} \rangle_y$ の x についての一階微分方程式を表せば、高温端あるいは低温端での境界条件を与えることによって、任意の場所での $p_{g,co}$ 、 T_m 、 $\langle u_{g,co} \rangle_y$ について解くことができる。ただし、 H は x 軸方向の単位時間当たりの平均エンタルピー流量を、 $\langle \rangle_y$ は ν 軸方向の平均値を表す。後述するように、 x 軸方向の熱流量、仕事流量はこれら $p_{g,co}$ 、 T_m 、 $\langle u_{g,co} \rangle_y$ より求めることができる。ここでは周囲とは完全に断

Fig. 2 Flow chart of numerical calculation.

熱されている膨張機モデルを考えているので、 H と単位時間当たりの平均の運動エネルギー流量 K との和は x 軸方向で保存される。 K は変動量の3次のオーダーで表されるので時間平均すると0となるために⁷⁾、結局 H は x 座標によらない一定値をとる。以下では $dp_{g,co}/dx$ 、 dT_m/dx 、 $d\langle u_{g,co} \rangle_y/dx$ を求めていく。

3.3 速度変動

仮定(6)よりガスの x 軸方向についての運動方程式を線形化すると、仮定(4)より、

$$\rho_{g,m} \frac{\partial u_g}{\partial t} = -\frac{\partial p_g}{\partial x} + \mu \nabla^2 u_g + \left(\xi + \frac{\mu}{3} \right) \frac{\partial^2 u_g}{\partial x^2} \quad (8)$$

となる。ただし μ は粘性係数、 ξ は第二粘性係数を表す。ここで a を音速、 ν を動粘性係数、 $\lambda_\nu = \sqrt{2\nu/\omega}$ を速度境界層厚さとする、(8)式中の $\partial/\partial x$ 、 $\partial/\partial y$ のオーダーはそれぞれ ω/a 、 $1/\lambda_\nu$ である¹¹⁾。後述の計算条件の範囲内、あるいは一般的な冷凍機の運転条件においては $\omega/a \ll 1/\lambda_\nu$ となるので、(8)式は、

$$\frac{\partial u_g}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_{g,m}} \frac{\partial p_g}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_g}{\partial y_g^2} \quad (9)$$

と整理できる。これに(1)、(3)式を代入すると、

$$i\omega u_{g,co} = -\frac{1}{\rho_{g,m}} \frac{dp_{g,co}}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u_{g,co}}{\partial y_g^2} \quad (10)$$

となる。壁面での境界条件、

$$y_g = 0 \text{ で } u_{g,co} = u_{d,co} = 0 \quad (11)$$

$$y_g = \delta \text{ で } u_{g,co} = u_{c,co} = u_{c,re} \quad (12)$$

を用いて(10)式を解くと、 $u_{g,co}$ は $dp_{g,co}/dx$ の関数として次のように表せる。

$$u_{g,co} = \frac{i}{\omega \rho_{g,m}} \frac{dp_{g,co}}{dx} (1 - f_1) + u_{c,re} f_2 \quad (13)$$

ただし f_1, f_2 は y_g の関数で、

$$f_1 = \frac{\cosh\{(1+i)(y_g - \delta/2)/\lambda_v\}}{\cosh\{(1+i)(\delta/2)/\lambda_v\}} \quad (14)$$

$$f_2 = \frac{\sinh\{(1+i)y_g/\lambda_v\}}{\sinh\{(1+i)\delta/\lambda_v\}} \quad (15)$$

となる。

なお (13) 式の右辺第一項、第二項はそれぞれ振動 Poiseuille 流、振動 Couette 流の解¹²⁾であり、それらの重ね合わせがここで求めた速度変動にほかならない。

3.4 圧力勾配

線形化した運動方程式から求めた (13) 式を y_g が 0 から δ の範囲で平均し、 $dp_{g,co}/dx$ について整理すると、

$$\frac{dp_{g,co}}{dx} = \frac{i\omega\rho_{g,m}}{\langle f_1 \rangle_y - 1} (\langle u_{g,co} \rangle_y - u_{c,rc} \langle f_2 \rangle_y) \quad (16)$$

となり、 $\langle u_{g,co} \rangle_y$ によって $dp_{g,co}/dx$ を表すことができる。

3.5 温度変動

エネルギー方程式は、線形近似を使うことによって粘性項が無視できるので、仮定(1)、(2)より次のように書くことができる¹³⁾。

$$\rho_j T_j \left(\frac{\partial s_j}{\partial t} + \vec{v}_j \cdot \text{grad } s_j \right) = \text{div}(k_j \text{grad } T_j) \quad (j=d, g, c) \quad (17)$$

ただし $\vec{v}$ は速度ベクトル、 k は熱伝導率を表す。右辺に (2) 式を代入すると現れる $k_j(dT_m/dx)$ ($j=d, g, c$) は、ディスプレイサとシリンダーとの相対運動およびガスの圧力変動とは無関係なので、ここでは無視する。(9)式の導出と同様のオーダー評価をすると、 $(\partial^2 T_{g,co}/\partial x^2)/(\partial^2 T_{g,co}/\partial y_g^2) \ll 1$ となり、またディスプレイサ、シリンダーについても、 $(\partial^2 T_{j,co}/\partial x^2)/(\partial^2 T_{j,co}/\partial y_j^2)$ のオーダーは $\alpha_j \omega/a^2 \ll 1$ となる ($j=d, c$)¹¹⁾。ただし、 α は温度伝導率を表す。さらに変動量の二次以上の項を省略して式を線形化し、仮定(5)を使うと、エネルギー方程式は次のように整理できる。

$$\rho_{j,m} T_m \left(i\omega s_{j,co} + u_{j,co} \frac{\partial s_{j,m}}{\partial x} \right) = k_j \frac{\partial^2 T_{j,co}}{\partial y_j^2} \quad (j=d, g, c) \quad (18)$$

ただし $\rho_{d,m}$, $\rho_{c,m}$ はそれぞれディスプレイサ、シリンダーの密度を表す。また熱力学的な関係式から、一般に比エントロピーについて次の式が成り立つ。

$$ds = \frac{c}{T_m} dT - \frac{\beta}{\rho_m} dp \quad (19)$$

ただし c は定圧比熱、 β は等圧膨張率を表す。この関係式を使うと、(18)式はディスプレイサ、ガス、シリンダーについてそれぞれ以下ようになる。

$$i\omega\rho_{d,m}c_d T_{d,co} - k_d \frac{\partial^2 T_{d,co}}{\partial y_d^2} = 0 \quad (20)$$

$$i\omega\rho_{g,m}c_g T_{g,co} - k_g \frac{\partial^2 T_{g,co}}{\partial y_g^2} = i\omega T_m \beta p_{g,co} - \rho_{g,m}c_g \frac{dT_m}{dx} u_{g,co} \quad (21)$$

$$i\omega\rho_{c,m}c_c T_{c,co} - k_c \frac{\partial^2 T_{c,co}}{\partial y_c^2} = -\rho_{c,m}c_c \frac{dT_m}{dx} u_{c,co} \quad (22)$$

先に求めた $u_{g,co}$ の解 (13) 式を (21) 式に代入し、(20)~(22) 式を $T_{d,co}$, $T_{g,co}$, $T_{c,co}$ について解くと、以下のような一般解が得られる。

$$T_{d,co} = f_d \quad (23)$$

$$T_{g,co} = \frac{T_m \beta}{\rho_{g,m}c_g} p_{g,co} + \left\{ -\frac{1}{\omega^2 \rho_{g,m}} \frac{dp_{g,co}}{dx} \times \left(1 - \frac{Pr}{Pr-1} f_1 \right) + i \frac{u_{c,rc}}{\omega} \frac{Pr}{Pr-1} f_2 \right\} \times \frac{dT_m}{dx} + f_g \quad (24)$$

$$T_{c,co} = i \frac{u_{c,rc}}{\omega} \frac{dT_m}{dx} + f_c \quad (25)$$

ただし、

$$f_j = C_{j1} \exp\{-(1+i)y_j/\lambda_j\} + C_{j2} \exp\{(1+i)y_j/\lambda_j\} \quad (26)$$

$$\lambda_j = \sqrt{2\alpha_j/\omega} \quad (j=d, g, c) \quad (27)$$

である。ここで Pr はプラントル数を表し、(27) 式の λ_j は温度浸透厚さに相当する。(26) 式中の C_{j1} , C_{j2} は境界条件によって定まる複素数である。境界条件は、

$$y_d=0 \text{ で } \frac{\partial T_{d,co}}{\partial y_d} = 0 \quad (28)$$

$$y_g=0(y_d=\tau_d) \text{ で } T_{d,co} = T_{g,co} \quad (29)$$

$$k_d \frac{\partial T_{d,co}}{\partial y_d} = k_g \frac{\partial T_{g,co}}{\partial y_g} \quad (30)$$

$$y_g=\delta(y_c=0) \text{ で } T_{g,co} = T_{c,co} \quad (31)$$

$$k_g \frac{\partial T_{g,co}}{\partial y_g} = k_c \frac{\partial T_{c,co}}{\partial y_c} \quad (32)$$

$$y_c=\tau_c \text{ で } \frac{\partial T_{c,co}}{\partial y_c} = 0 \quad (33)$$

と表される。これに (23)~(25) 式を代入して連立方程式を解くと、未知数 C_{j1} , C_{j2} ($j=d, g, c$) は dT_m/dx

dx の一次関数として与えられる。したがって $p_{g,co}$, T_m , $\langle u_{g,co} \rangle_y$ が既知のとき, $dp_{g,co}/dx$ は (16) 式よりわかるので, $T_{j,co}(j=d, g, c)$ は dT_m/dx の一次関数として求められる。また, f_1, f_2, f_j は y の関数であるから, $T_{j,co}$ も y の関数となる ($j=d, g, c$)。

3.6 熱流量

ディスプレーサとシリンダーとの相対運動およびガスの圧力変動に関連する x 軸方向の熱流束の時間平均は, 変動量の二次のオーダーまで考えると,

$$q_j = T_m \rho_j \langle s_j u_j \rangle_t (j=d, g, c) \quad (34)$$

と表される⁷⁾。ただし $\langle \rangle_t$ は一周期の平均を意味する。ディスプレーサ, ガス, シリンダーのそれぞれにこの式を適用し, (19) 式の関係式を使って整理すると,

$$q_d = 0 \quad (35)$$

$$q_g = \frac{\rho_{g,m} c_g}{2} \text{Re}[T_{g,co} u_{g,co}^*] - \frac{T_m \beta}{2} \text{Re}[p_{g,co} u_{g,co}^*] \quad (36)$$

$$q_c = \frac{\rho_{c,m} c_c u_{c,re}}{2} \text{Re}[T_{c,co}] \quad (37)$$

となる。ただし右肩の $*$ は共役複素数を, Re は実数部を表す。(35) 式が 0 になるのは, ディスプレーサ上に座標軸 x を設定したことによる。これらの熱流束を y 軸方向で積分し, $u_{g,co}$, $T_{g,co}$, $T_{c,co}$ に関する (13), (24), (25) 式を代入して計算することにより, 以下のように x 軸方向の単位時間当たりの平均熱流量が得られる。

$$Q_d = \pi D_m \int_0^{\tau_d} q_d dy_d = 0 \quad (38)$$

$$\begin{aligned} Q_g &= \pi D_m \int_0^{\delta} q_g dy_g \\ &= \frac{\pi D_m \delta}{2} \text{Re} \left[\left\{ i \frac{c_g}{\omega} \frac{dp_{g,co}^*}{dx} (\langle f_1^* f_g \rangle_y - \langle f_g \rangle_y) + \rho_{g,m} c_g u_{c,re} \langle f_2^* f_g \rangle_y \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{c_g}{\omega^2 (Pr-1)} \left(-\frac{i}{\omega \rho_{g,m}} \times \frac{dp_{g,co}}{dx} \frac{dp_{g,co}^*}{dx} \langle f_1 \rangle_y + u_{c,re} \frac{dp_{g,co}^*}{dx} \langle f_2 \rangle_y \right) \frac{dT_m}{dx} \right] \quad (39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_c &= \pi D_m \int_0^{\tau_c} q_c dy_c \\ &= \frac{\pi D_m \tau_c}{2} \rho_{c,m} c_c u_{c,re} \text{Re}[\langle f_c \rangle_y] \quad (40) \end{aligned}$$

ただし D_m は膨張機の代表直径として, シリンダー内径とディスプレーサ外径の平均値を表している。いま $p_{g,co}$, T_m , $\langle u_{g,co} \rangle_y$ が既知とすると, 関数 f_j に含まれる未知数 C_{j1}, C_{j2} は, 前節の議論より dT_m/dx の一次関数として求められる ($j=d, g, c$)。また $dp_{g,co}/dx$ は (16) 式よりわかるので, (39), (40) 式から Q_g, Q_c が dT_m/dx の一次関数として求められる。以上より, ディスプレーサとシリンダーの相対運動およびガスの圧力変動に起因する単位時間当たりの平均熱流量の総和 Q_1 は, $p_{g,co}$, T_m , $\langle u_{g,co} \rangle_y$ によって定まる定数 a_0, a_1 を使って, 次のような形に整理することができる。

$$Q_1 = Q_d + Q_g + Q_c = a_0 + a_1 \frac{dT_m}{dx} \quad (41)$$

3.7 仕事流量

単位時間当たりの平均仕事流量 I は, 変動量の二次のオーダーまで考えると,

$$\begin{aligned} I &= \pi D_m \delta \langle \langle p_g u_g \rangle_y \rangle_t \\ &= \frac{\pi D_m \delta}{2} \text{Re}[p_{g,co}^* \langle u_{g,co} \rangle_y] \quad (42) \end{aligned}$$

と表せる⁷⁾。したがって $p_{g,co}$, $\langle u_{g,co} \rangle_y$ がわかっているれば, 温度勾配 dT_m/dx に関係なく, I を求めることができる。

3.8 温度勾配

固体壁およびガスの純粋な x 軸方向熱伝導に関連する単位時間当たりの熱流量を Q_2 とし, 前出のディスプレーサとシリンダーとの相対運動とガスの圧力変動にともなう熱流量 Q_1 , 仕事流量 I を使うと,

$$H = Q_1 + Q_2 + I = \text{const.} \quad (43)$$

が成り立つ。ここでは Q_1 と I の間での粘性散逸によるエネルギー変換を考えていないが, これは (9) 式の導出の際と同様のオーダー評価によって無視することができる¹¹⁾。なお熱流量 Q_2 は, 温度勾配 dT_m/dx の一次関数として,

$$Q_2 = -(k_d A_d + k_g A_g + k_c A_c) \frac{dT_m}{dx} \quad (44)$$

と表される。ただし A_d, A_g, A_c はそれぞれディスプレーサ, ガス, シリンダーの断面積である。

(41)~(44) 式より温度勾配は,

$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{H - a_0 - I}{a_1 + a_2} \quad (45)$$

となる。ただし,

$$a_2 = -(k_d A_d + k_g A_g + k_c A_c) \quad (46)$$

である。 $p_{g,co}$, T_m , $\langle u_{g,co} \rangle_y$ が既知のときには

(41), (42) 式より a_0, a_1, I の値がわかるので、温度勾配 dT_m/dx は $p_{g,co}, T_m, \langle u_{g,co} \rangle_y, H$ によって表される。

3.9 平均速度勾配

連続の式、

$$A_g \frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_g A_g u_g)}{\partial x} = 0 \quad (47)$$

を線形化して整理すると、

$$\begin{aligned} i\omega A_g \rho_{g,co} + \rho_{g,m} A_g \frac{\partial u_{g,co}}{\partial x} \\ + \rho_{g,m} u_{g,co} \frac{dA_g}{dx} + A_g u_{g,co} \frac{d\rho_{g,m}}{dx} = 0 \end{aligned} \quad (48)$$

となる。熱力学的な関係式、

$$d\rho = -\rho_m \beta dT + \frac{\gamma}{a^2} dp \quad (49)$$

より、(48) 式を整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{g,co}}{\partial x} = i\omega \left(\beta T_{g,co} - \frac{\gamma}{\rho_{g,m} a^2} p_{g,co} \right) \\ + \left(\beta \frac{dT_m}{dx} - \frac{1}{A_g} \frac{dA_g}{dx} \right) u_{g,co} \end{aligned} \quad (50)$$

となる。ただし γ は比熱比を表す。この式を y 方向で平均化し、(24) 式を代入して整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{d\langle u_{g,co} \rangle_y}{dx} = \frac{i\omega}{\rho_{g,m}} \left(\frac{T_m \beta^2}{c_g} - \frac{\gamma}{a^2} \right) p_{g,co} \\ + \frac{i\beta}{\omega \rho_{g,m}} \frac{Pr}{Pr-1} \frac{dp_{g,co}}{dx} \frac{dT_m}{dx} \langle f_1 \rangle_y \\ - \beta u_{c, re} \frac{Pr}{Pr-1} \frac{dT_m}{dx} \langle f_2 \rangle_y + i\omega \beta \langle f_g \rangle_y \\ - \frac{1}{A_g} \frac{dA_g}{dx} \left\{ \frac{i}{\omega \rho_{g,m}} \frac{dp_{g,co}}{dx} (1 - \langle f_1 \rangle_y) \right. \\ \left. + u_{c, re} \langle f_2 \rangle_y \right\} \end{aligned} \quad (51)$$

となる。流路面積の勾配 dA_g/dx は、ディスペレーサ、シリンダーの線膨張係数と、温度勾配 dT_m/dx がわかれば求められる。 $p_{g,co}, T_m, \langle u_{g,co} \rangle_y$ が既知のときには、 $dp_{g,co}/dx$ は (16) 式より求められ、また dT_m/dx は (45) 式より求めることができるので、関数 f_g に含まれる未知数 C_{g1}, C_{g2} も求められ、(51) 式より $d\langle u_{g,co} \rangle_y/dx$ は $p_{g,co}, T_m, \langle u_{g,co} \rangle_y, H$ によって表される。

3.10 x 軸方向の分布

境界条件として高温端 ($x=L$) での時間平均温度 $T_m(=T_h)$, ガスの圧力変動 $p_{g,co}$, 速度変動 $\langle u_{g,co} \rangle_y$

Table 1 Conditions for calculation.

Cylinder (SUS 304)
Inner diameter : 70 mm
Thickness : 1.25 mm
Displacer (bakelite)
Thickness : 2.5 mm
Length from hot end to cold end : 140 mm
Stroke : 32 mm
Frequency : 0.5 Hz
Temperature at hot end : 270 K
Temperature at cold end : 20 K
Gas (helium)
High pressure at hot end : 2.35 MPa
Low pressure at hot end : 1.05 MPa
Gas gap at room temperature : 0.25 mm

がわかっていて、さらにエンタルピー流量 H が与えられているとき、(16), (45), (51) 式を用いて、前述の通り数値計算によって任意の x 座標での $p_{g,co}, T_m, \langle u_{g,co} \rangle_y$ を求めることができる。解析の対象となる膨張機モデルでは、 x 軸をディスペレーサ上に設定しているために、ガス流路は高温端で閉端になっていると見なせる。したがってガスの高温端での速度の境界条件は $\langle u_{g,co} \rangle_y = 0$ と与えられる。また (41), (42), (44) 式を使えば、 x 軸方向熱流量、仕事流量なども計算することができる。エンタルピー流量 H がわからない場合には、先に与えた高温端での境界条件に加えて、低温端での時間平均温度 $T_m(=T_l)$ が与えられていれば、繰り返し計算によってこの境界条件を満たすエンタルピー流量 H を求めることができる。

4. 計算結果および考察

以上のような方法で得られたいくつかの計算結果について考察する。計算で使った物性値はすべて温度依存性を考慮してある。固体壁の熱収縮も考慮しているため、 x 座標によってガスギャップの値も異なる。また仕事流量が損失に加担すると考えて、冷凍機の熱損失を低温端に流入するエンタルピー流量で定義する。なお (43) 式で x 軸方向の熱伝導量を含めて計算しているので、計算結果で示した熱損失には伝導損失も加算されている。以下では特に断らない限り、実用的な一段 GM 冷凍機に準じて、Table 1 の計算条件に基づいて計算を行う。

4.1 ガスギャップの影響

ガスギャップの値を変えてシャトル熱損失を計算し

Fig. 3 Dependence of heat losses on gas gap. (1) shuttle loss, (2) shuttle loss for inviscid fluid, (3) shuttle heat transfer, (4) shuttle heat transfer by previous analysis.

た結果を Fig. 3 中の実線(1)で示す。図中の破線(2)はガスを非粘性流体と仮定した解析の結果を示している。

ガスが非粘性流体の場合でも、3章で示した解析と同様の手法で解くことができるが、ガスの y 軸方向の速度変動の分布を考えなくてよいので f_1 , f_2 などの関数が現れず、計算はずっと簡略化される。点線(3)は圧力変動がない場合、すなわちシャトル伝熱の計算結果である。一点鎖線(4)は、既報⁴⁾のシャトル伝熱の解析を用いて、膨張機軸方向の熱バランスを考慮して数値計算した結果である。また Conduction と書かれた実線は、ガスの圧力変動がなく、ディスプレイサも静止している場合、つまり固体壁とガスの x 軸方向の純粋な伝導損失の計算結果である。なおガスギャップ δ は温度 300 K における値を示している。

まず、(4)はガス層の半径方向の温度分布を直線で近似した解析結果であるが、(3)と(4)の計算結果がほぼ一致していることから、シャトル伝熱だけを考える場合には、既報で用いた仮定が通常の運転条件で十分妥当であることがわかる。

シャトル伝熱の特性から、(3)、(4)では δ の増加にと

Fig. 4 Temperature oscillation of gas at $x/L=0.3$. (a 1) $\delta=0.25$ mm, $P=0.65$ MPa, (a 2) $\delta=0.25$ mm, $P=0$ MPa, (b 1) $\delta=1.25$ mm, $P=0.65$ MPa, (b 2) $\delta=1.25$ mm, $P=0$ MPa.

Fig. 5 Dependence of heat losses on displacer stroke.

Fig. 6 Dependence of heat losses on pressure amplitude.

もなって熱損失が単調に減少するが、(1)のシャトル熱損失の計算結果の場合には、ガスの圧力変動の影響を受けて、熱損失が極小となる最適なガスギャップが存在している。(1)と(3)を比較すると、ガスギャップが比較的小さいときには計算結果に顕著な差が見られないが、ガスギャップが大きくなるにつれて(1)と(3)の差が広がっている。これは、熱損失に及ぼすガスの圧力変動の影響が、ガスギャップの増大にともなって大きくなっていることを意味する。

$x/L=0.3$ の位置で、ガス層内のいくつかの y 座標における温度変動を一周期にわたって計算した結果をFig. 4 に示す。Fig. 4 (a 1), (a 2) はガスギャップが比較的小さい $\delta=0.25$ mm の場合、Fig. 4 (b 1), (b 2) はガスギャップが比較的大きい $\delta=1.25$ mm の場合の計算結果である。また Fig. 4 (a 1), (b 1) は圧力変動がある場合、Fig. 4 (a 2), (b 2) は圧力変動がない場合、すなわちシャトル伝熱の場合の計算結果を示している。図には、ディスプレーサから見たシリンダーの見かけ上の変位振動を併記した。ガスギャップが小さい場合の (a 1), (a 2) を比較すると、温度変動の様相に顕著な差は見られず、どちらも一周期を通じて y 軸方向の温度分布がほぼ直線で表されることがわかる。ガスギャップが比較的小さい領域で熱損失に圧力変動の影響が現れないのは、このようにガスの圧力変動によってガス層内の温度変動の様相があまり変化しないためである。一方、ガスギャップが大きい場合の (b 1), (b 2) を比較すると、温度変動の様相は大きく異なり、 y 軸方向の温度分布に着目すると、(b 2) では一周期を通じてほぼ直線で表せるが、(b 1) ではもはや直線で表せないことがわかる。ガスギャップが大

きくなると熱損失にガスの圧力変動の影響が現れるのは、このような温度変動の様相の変化のためである。

Fig. 3 において、ガスの粘性を考慮した実線(1)の計算結果と、ガスを非粘性と仮定した破線(2)の計算結果を比較すると、 δ が小さい領域ではほとんど差が見られないが、 δ が大きくなると結果に差が現れてくる。すなわち、より正確にシャトル熱損失を評価するためには、ガスの粘性を考慮して解析すべきである。

4.2 ディスプレーサストロークの影響

ディスプレーサストロークを変えてシャトル熱損失を計算した結果をFig. 5 に示す。実線はシャトル熱損失を、破線は圧力変動がない場合、すなわちシャトル伝熱による損失を表している。

破線のシャトル伝熱の計算では、(1)の $\delta=0.25$ mm、(2)の $\delta=1.25$ mm のどちらの場合でも、熱損失はストロークの二乗に比例して大きくなる。これは既報のシャトル伝熱の解析⁴⁾ から得られる結果と一致している。一方、実線のシャトル熱損失の計算でも、ストロークが小さいときにやや直線からはずれるものの、破線とほとんど同じ傾きでストロークの二乗に比例して熱損失が増大する。このことから、通常の冷凍機の運転条件においては、ガスの圧力変動がシャトル熱損失に及ぼす影響はディスプレーサのストロークに依存せず、シャトル伝熱のみがストロークの二乗に比例して大きくなることをわかる。

4.3 圧力振幅の影響

ガスの高温端での圧力振幅の大きさを変えてシャトル熱損失を計算した結果をFig. 6 に示す。高温端での圧力変動の位相は、先の膨張機モデルの設定条件の通り一定としている。

Fig. 7 Dependence of heat losses on frequency.

圧力振幅が大きくなると熱損失も増大するが、ガスギャップが大きいくほど、その増加割合が大きくなっていることがわかる。

4.4 周波数の影響

周波数を変えてシャトル熱損失を計算した結果を Fig. 7 に示す。実線はシャトル熱損失を、破線は圧力変動がない場合、すなわちシャトル伝熱による損失を表す。

破線のシャトル伝熱の計算では、周波数を 0 から高くしていくと、最初に熱損失は周波数の平方根に比例して増大し、その後いったんは一定値に漸近する。ここまでは既報の解析解⁴⁾と一致した傾向である。しかしさらに周波数を高くすると、既報の解析ではシャトル伝熱が一定値のままであるのに対し、破線(2)の計算結果では再び周波数の平方根に比例して増大しはじめる。図には示されていないが、破線(1)の場合もさらに周波数を高くすると、同様に熱損失が周波数の平方根に比例して増大しはじめる。これは、ガス層を介したディスプレイサとシリンダーとの間のシャトル伝熱とは別に、ガスの速度境界層を介したガスの主流部分とシリンダーとの間のシャトル伝熱が起こるためであると考えられる。このような熱輸送現象は、ガスを液体に置き換え、固体壁が静止した場合を想定することによって、ドリームパイプの熱輸送とまったく同じ原理で理解することができる。ドリームパイプの解析解¹⁴⁾においても、周波数が比較的高い領域では周波数の平方根に比例して伝熱量が増大することが知られている。

実線のシャトル熱損失の計算では、周波数を 0 から高くしていくと、最初は破線のシャトル伝熱と差がなく、熱損失は周波数の平方根に比例して大きくなる

Fig. 8 Dependence of heat losses on thickness of cylinder.

Fig. 9 Distribution of heat and work flow in axial direction.

が、次第にガスの圧力変動の影響が大きくなり、熱損失は破線のシャトル伝熱の計算結果に比べて大きな値をとるようになる。

4.5 固体壁肉厚の影響

シリンダー壁の肉厚を変えて熱損失を計算した結果を Fig. 8 の実線で示す。シリンダー壁の肉厚を変えると、軸方向の伝導損失の大きさも変化する。全熱損失から伝導損失を差し引いた損失量を図中の点線で示した。

全熱損失から伝導損失を引いた量は、シリンダー肉厚がある程度大きいときはほぼ一定であるが、シリンダー肉厚が 0.2 mm 以下になると急激に減少する。このことから、固体壁の肉厚を薄くすることが、条件によっては、伝導損失だけでなくシャトル熱損失の低減にも有効であることがわかる。しかし通常の冷凍機運転条件でシャトル熱損失の低減効果が現れるのは、シリンダー壁が非常に薄い場合であり、構造上の問題

Fig. 10 Effect of coating on inner surface of cylinder with low thermal-conductivity material to reduce shuttle loss.

から現実的にはこのような方法でシャトル熱損失の低減を図るのは難しいと言える。

4.6 熱流量と仕事流量

Fig. 9 に熱流量と仕事流量の軸方向分布の計算例を示す。図では高温端から低温端に向かうエネルギーの流れを正としている。熱流量の大きさは低温端に向かうにつれて小さくなり、仕事流量の大きさは低温端に向かうにつれて大きくなっている。つまり、計算の対象領域を一つのシステムとして見ると、高温熱源から得た熱の一部を仕事に変換して残りの熱を低温熱源に捨てる熱機関サイクルになっていることがわかる。

4.7 シャトル熱損失の低減

シャトル伝熱を低減するには、固体壁に低熱伝導率の物質を被覆することが効果的であることが指摘されている⁴⁾。圧力変動がある場合のシャトル熱損失の低減に対する同様の手法の有効性を調べるために、シリンダー壁に低熱伝導率物質を被覆した場合のシャトル熱損失の計算を行った結果を Fig. 10 に示す。実線は被覆層がある場合のシャトル熱損失、破線は被覆層がない場合のシャトル熱損失を表す。

ここでの計算は、ディスプレイサ、ガス層、被覆層、シリンダーの計4層に(18)式のエネルギー方程式を適用するため、3章の計算よりやや複雑となるが、基本的な計算手法は変わらない。被覆材の物性値は、一般的な発泡断熱材の物性値を用いて、熱伝導率 0.018

W/m K, 比熱 960 J/kg K, 密度 15.9 kg/m³ とした。簡単のため被覆材の物性値の温度依存性は考慮せず 100 K の物性値で代表している。被覆厚さは 0.1 mm である。

GM冷凍機的气体ギャップは通常 0.5 mm 以下であるから、Fig. 10 の計算結果より、このような手法によってシャトル熱損失を低減することができると考えられる。特にガスギャップが小さい領域では、その効果が顕著である。

5. 結 論

線形熱音響理論を用いて圧力変動の影響を考慮したシャトル熱損失の解析を行い、その結果を圧力変動がない場合、すなわちシャトル伝熱の計算結果と比較し、シャトル熱損失の基本的な特徴について考察した。計算結果から、圧力変動の効果を含めたシャトル熱損失の低減法として、低熱伝導率の物質を固体壁に薄く被覆することの有効性が指摘された。

参 考 文 献

- 1) 松原洋一：低温工学 **25** (1990) 400
- 2) 長尾政志ら：低温工学 **24** (1989) 222
- 3) 橋本巍州ら：低温工学 **29** (1994) 51
- 4) 西尾茂文，稲田孝明，中込秀樹：低温工学 **27** (1992) 507
- 5) F. J. Zimmerman and R. C. Longworth : Adv. Cryog. Eng. **16** (1970) 342
- 6) R. Radebaugh and J. E. Zimmerman : NBS Special Publication **508** (1978) 67
- 7) 富永 昭：低温工学 **27** (1992) 543
- 8) 富永 昭：低温工学 **27** (1992) 549
- 9) 富永 昭：低温工学 **28** (1993) 99
- 10) 富永 昭：低温工学 **28** (1993) 108
- 11) G. W. Swift : J. Acoust. Soc. Am. **84** (1988) 1145
- 12) 今井 功：流体力学(前編)，裳華房，東京(1973) 294~298
- 13) L. D. Landau and E. M. Lifshitz (竹内 均訳)：流体力学1，東京図書，東京(1970) 201
- 14) 西尾茂文，本間 満，張 暉民：機論 **60 B** (1994) 233