研究論文

冷凍機の効率とエントロピー生成

富 永 昭

筑波大学物理学系 つくば市天王台 1-1-1

(1994年10月26日受理)

Entropy Production and Efficiency of Refrigerator

Akira TOMINAGA

Institute of Physics, University of Tsukuba, 1-1-1 Tennohdai, Tsukuba 305

(Received October 26, 1994)

Synopsis :

FOM , which is an index of the efficiency of refrigerator, is closely related to entropy production in the refrigerator. Use of entropy amplification coefficient (EAC) is proposed as an index of inefficiency of refrigerators. The entropy production of a Stirling refrigerator is divided into those in the heat exchangers and that in the regenerator. The entropy production in the heat exchanger is due to dissipation of work flow, and that in the regenerator is due to enthalpy flow H_r in addition to dissipation of work flow. Thermoacoustic discussion makes clear the mechanism of entropy production. The dissipation of work flow in the heat exchanger consists of the pressure induced dissipation W_p and the viscous dissipation W_v . The dissipation of work flow in the regenerator includes the standing component of the energy conversion W_{stand} in addition to W_p and W_v . The enthalpy flow H_r in a good regenerator predominantly consists of the standing component of heat flux Q_{stand} , the displacement induced heat flux Q_D and simple heat conduction Q_c .

Keywords : COP , FOM , entropy production, Stirling refrigerator, thermoacoustic theory

1. はじめに

冷凍機の効率を表す指標として COP (coefficient of performance) や FOM (figure of merit) が使われている。いずれも、入力仕事と冷凍能力との比だから、エネルギー効率である。冷凍機の優劣を表す指標としてこれらの指標がよく使われるのは、省エネルギーの観点からは、エネルギー効率の高い冷凍機が望ましいからであろう。

現実の冷凍機の効率がカルノーサイクルに比べて低いのは、何らかの不可逆過程の結果であって、エントロピー生成 (entropy production) があるためである。したがってエネルギー効率をあげるためにはエントロピー生成を減らすことが必要不可欠である。ところが COP や FOM とエントロピー生成との具体的関係は必ずしも明らかでない。

他方で地球の温暖化のような環境問題の本質は、エネルギー問題ではなくて、エントロピー生成の問題である¹⁾。人類の存亡に関わる環境問題に対処するためにも、エントロピー生成のより小さな機器の開発が必要である。

このような現状を踏まえて、本論文ではまず冷凍機の効率とエントロピー生成との具体的関係を述べる。次にエントロピーの観点から、冷凍機の実効率の尺度としてエントロピー増大率 EAC (entropy amplification coefficient) を導入し、 EAC と COP や FOM との関係を述べる。

エントロピー生成を議論するもう一つの目的は、どこで、どのような機構で、どの程度のエントロピー生成があるかを明らかにし、より効率の高い冷凍機の開発に役立てることにある。このためにスターリング冷凍機を例として、蓄冷器と熱交換器とに分けてエント

Fig.1 Entropy flow through solid bar : entropy s_H and heat $T_H s_H$ are absorbed from the hot bath of temperature T_H , and entropy s_C and heat $T_C s_C$ are emitted to the cold bath of temperature T_C . Energy conservation requires $EAC \equiv s_C/s_H = T_H/T_C$.

Fig.2 Entropy flow through prime mover : entropy s_H and heat $q_H = T_H s_H$ are absorbed from the hot bath of temperature T_H , and entropy s_C and heat $q_C = T_C s_C$ are emitted to the cold bath of temperature T_C . Energy conservation requires that the prime mover emits work by $q_H - q_C = T_H s_H - T_C s_C$. The efficiency $\eta = (q_H - q_C)/q_H = 1 - (T_C/T_H)(s_C/s_H)$ is less than $\eta_{\text{Carnot}} = 1 - T_C/T_H$ because of the second law of thermodynamics $EAC \equiv s_C/s_H = (1 - \eta)(T_H/T_C) \geq 1$.

ロピー生成を議論する。

最後にエントロピー生成の機構とその大きさを評価する手だてを熱音響理論²⁾を用いて考察する。

2. エントロピー生成とエントロピー増大率

冷凍機を定常解放系とみなして移動量としてのエントロピーとエントロピー生成とを議論する。槌田³⁾に依れば、物体の状態量として定義されていたエントロピーに移動量という考え方を加えたのは Schrödinger⁴⁾である。ここで考察するのは熱の移動に伴うエントロピーの移動である。

単純な固体熱伝導に伴うエントロピー生成とエントロピー増大率の議論から始めて、原動機のエントロピー生成とエントロピー増大率を述べ、最後に冷凍機のエントロピー生成とエントロピー増大率とを考察する。

2.1 固体熱伝導に伴うエントロピー生成とエントロピー増大率

棒状の固体の一端が温度 T_C の低温熱浴に接続され

他端が温度 $T_H (\geq T_C)$ の高温熱浴に接続されている場合の定常熱伝導を考える (Fig.1 参照)。この棒が高温熱浴から吸収する熱を q とすると、エネルギー保存則により、低温熱浴に放出する熱も q である。したがって高温熱浴からこの棒に入るエントロピーは $s_H = q/T_H$ であり、この棒から低温熱浴に放出するエントロピーは $s_C = q/T_C$ である。

$T_H > T_C$ に注意すると、エントロピー生成、

$$s_C - s_H = \left(\frac{1}{T_C} - \frac{1}{T_H} \right) q \quad (1)$$

は正である。またエントロピー増大率、

$$EAC \equiv \frac{s_C}{s_H} = \frac{T_H}{T_C} \quad (2)$$

は1以上である。いずれも熱力学第2法則の現れである。

2.2 原動機の効率とエントロピー生成およびエントロピー増大率

原動機は温度 T_H の高温部で熱を q_H だけ吸収し、温度 T_C の低温部で熱を q_C だけ放出するものとする。この原動機はエントロピーを、高温部で $s_H = q_H/T_H$ だけ吸収し、低温部で $s_C = q_C/T_C$ だけ放出する (Fig.2 参照)。原動機が外界になす仕事は、エネルギー保存則により、

$$q_H - q_C \geq 0 \quad (3)$$

である。

この原動機のエントロピー生成は

$$s_C - s_H \geq 0 \quad (4)$$

である。エントロピー生成が非負であることはエントロピー増大則、

$$s_C \geq s_H \quad (5)$$

あるいは、

$$EAC \equiv \frac{s_C}{s_H} \geq 1 \quad (6)$$

の現れである。

原動機の効率 η は高温部で吸収する熱 q_H に対する放出仕事の割合として定義される：

$$\eta = \frac{q_H - q_C}{q_H} = 1 - \frac{q_C}{q_H} \quad (7)$$

このように定義した原動機の効率を EAC で表現すると、

$$\eta = 1 - \frac{T_C}{T_H} \frac{s_C}{s_H} = 1 - \frac{T_C}{T_H} EAC \quad (8)$$

となる。エントロピー増大則 (6) により、原動機の効率 η には EAC の下限に対応した上限があり、この

上限はカルノー効率と呼ばれている：

$$0 \leq \eta \leq \eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_C}{T_H} \quad (9)$$

原動機のエントロピー増大率 EAC を原動機の効率 η で表現すると、

$$EAC = (1 - \eta) \frac{T_H}{T_C} \quad (10)$$

となる。

原動機のエントロピー増大率 EAC には η の下限に対応した上限がある：

$$1 \leq EAC \leq \frac{T_H}{T_C}$$

先に述べた棒状固体のエントロピー増大率と比較すると、原動機のほうがエントロピー増大率が小さい。原動機の EAC は棒の熱伝導の EAC の $(1 - \eta)$ 倍である。

原動機のエントロピー増大率の例を挙げよう。現在の良いスターリングエンジンでは $T_H/T_C = 3$ で $\eta \sim 1/3$ だから、 $EAC \sim 2$ である。つまりこのスターリングエンジンは高温部で吸収したエントロピーの2倍のエントロピーを低温部に放出していることになる。カルノーサイクルでは当然 $EAC = 1$ である。

2.3 冷凍機の効率とエントロピー生成との関係

冷凍機は温度 T_C の低温部で熱を q_C だけ吸収し、温度 T_H の高温部で熱を q_H だけ放出するものとする。この冷凍機はエントロピーを、低温部で $s_C = q_C/T_C$ だけ吸収し、高温部で $s_H = q_H/T_H$ だけ放出する (Fig. 3 参照)。

この冷凍機のエントロピー生成は、

$$s_H - s_C \geq 0 \quad (11)$$

であり、エントロピー増大率は、

$$EAC = \frac{s_H}{s_C} \quad (12)$$

である。エントロピー生成が非負であることはエントロピー増大則、

$$s_H \geq s_C \quad (13)$$

あるいは、

$$\frac{q_H}{T_H} \geq \frac{q_C}{T_C} \quad (14)$$

の現れである。

式 (14) から明らかなように、冷凍機の放熱量 q_H は吸熱量 q_C よりも大きい：

$$q_H \geq q_C \quad (15)$$

エネルギー保存則により、この冷凍機を運転するため

Fig. 3 Schematic refrigerator : entropy s_C and heat $q_C = T_C s_C$ are absorbed at the cold bath of temperature T_C and entropy s_H and heat $q_H = T_H s_H$ are emitted at the hot bath of temperature T_H . Energy conservation requires that the refrigerator absorbs work by $q_H - q_C = T_H s_H - T_C s_C$. The $FOM = (q_H - q_C)/q_C = (T_H/T_C)(s_H/s_C) - 1$ is larger than $FOM_{\text{Carnot}} = T_H/T_C - 1$ because of the second law of thermodynamics $EAC \equiv s_H/s_C = (FOM + 1)(T_C/T_H) \geq 1$.

には、

$$q_H - q_C = T_H s_H - T_C s_C \quad (16)$$

だけの仕事を投入する必要がある。

したがって冷凍機のエネルギー効率を表す指標は、

$$COP = \frac{q_C}{q_H - q_C} = \frac{T_C}{EAC(T_H - T_C)} \quad (17)$$

または、

$$FOM = \frac{1}{COP} = \frac{q_H}{q_C} - 1 = EAC \frac{T_H}{T_C} - 1 \quad (18)$$

となる。特に冷凍サイクルがカルノーサイクルの場合には、 $EAC = 1$ だから、

$$COP_{\text{Carnot}} = \frac{T_C}{T_H - T_C} \quad (19)$$

$$FOM_{\text{Carnot}} = \frac{T_H}{T_C} - 1 \quad (20)$$

となる。

一般に COP_{Carnot} は COP の上限であり、

FOM_{Carnot} は FOM の下限である：

$$COP \leq COP_{\text{Carnot}} \quad (21)$$

$$FOM \geq FOM_{\text{Carnot}} \quad (22)$$

このこともエントロピー増大則の現れである。

冷凍機のエントロピー増大率 EAC を低温端での吸熱量と高温端での放熱量とで書くと、

$$EAC = \frac{T_C}{T_H} \frac{q_H}{q_C} \quad (24)$$

となる。この表現は、直接測定可能な量だけで構成されているので、測定データからエントロピー増大率

Table 1 Comparison of refrigerators : they have common $EAC \equiv s_H/s_C$ but different temperature levels. As T_H/T_C decreases, FOM decreases, but FOM/FOM_{Carnot} increases. $EAC \sim 2$ is available for home refrigerators using the Rankin cycle. $EAC \sim 2.5$ is available for large-scale Stirling cryocoolers working at 77 K. EAC for ordinary cryocooler is from 4 to 10.

$\frac{T_H}{T_C}$	FOM_{Carnot}	FOM	$\frac{FOM}{FOM_{Carnot}}$	$EAC \equiv \frac{s_H}{s_C}$
100	99	199	2.01	2
10	9	19	2.11	2
4	3	7	2.33	2
1.1	0.1	1.2	12	2

EAC を推定するのに役立つ。

冷凍機のエン트로ピー増大率 EAC を FOM や COP で書くと次のようになる：

$$EAC = (FOM + 1) \frac{T_C}{T_H} = \left(\frac{1}{COP} + 1 \right) \frac{T_C}{T_H} \quad (25)$$

あるいは、

$$EAC = (FOM + 1) \frac{T_C}{T_H} = \frac{FOM + 1}{FOM_{Carnot} + 1} \quad (26)$$

一般に $EAC \geq 1$ で、特にカルノーサイクルでは当然 $EAC = 1$ である。

たとえば $T_C = 100$ K, $T_H = 300$ K, したがって $FOM_{Carnot} = 2$ の場合を考えよう。 $FOM = 50$ では、 $EAC = 17$ だから、低温端で吸収したエン트로ピーの 17 倍のエン트로ピーを高温端で放出していることになる。また $FOM = 26$ では、 $EAC = 9$ だから、低温端で吸収したエン트로ピーの 9 倍のエン트로ピーを高温端で放出していることになる。

冷凍機の開発に際して地球規模での環境問題を視野に入れるならば、エン트로ピー増大率 EAC が最も重要となる。 EAC が 1 に近いものほど「地球に優しい」冷凍機だからである。動作温度の異なる冷凍機を比較するにも、エン트로ピー増大率 EAC を使って評価することが望ましい。たとえば、Table 1 に示す 4 種類の冷凍機を比較すると、 $T_H/T_C = 100$ の冷凍機はエネルギー効率が最低 (FOM が最大) であるが FOM/FOM_{Carnot} は最小である。しかしエン트로ピー増大率 EAC はすべて同じである。

Fig. 4 Entropy flow in Stirling refrigerator: regenerator absorbs entropy s_C and heat $Q_C = T_C s_C$ from the cold exchanger and it emits entropy s_H and heat $Q_H = T_H s_H$ to hot exchanger. The second law requires $s_H/s_C \geq 1$ and $Q_H/Q_C = (T_H/T_C)(s_H/s_C) \geq 1$.

3. スターリング冷凍機のエン트로ピー生成

スターリング冷凍機のように蓄冷器が使われている冷凍機では、蓄冷器の両端の熱交換器を経由して外界とエン트로ピーのやりとりをする (Fig. 4 参照)。低温熱交換器は、外界からエン트로ピーを s_C だけ吸収し、蓄冷器に s_C だけのエン트로ピーを放出する。蓄冷器は、低温熱交換器からエン트로ピーを s_C だけ吸収し、高温熱交換器へエン트로ピーを s_H だけ放出する。高温熱交換器は、蓄冷器からエン트로ピーを s_H だけ吸収し、外界へ s_H だけのエン트로ピーを放出する。

低温熱交換器、蓄冷器、高温熱交換器でのエン트로ピー増大率は、それぞれ s_C/s_C , s_H/s_C , s_H/s_H である。各部のエン트로ピー増大率の積は冷凍機のエン트로ピー増大率 s_H/s_C に等しい。したがって、各部のエン트로ピー増大率を評価することができれば、より高効率の冷凍機を開発するために努力するべき部分がわかるだろう。

ここでは、始めにスターリング冷凍機のエネルギー保存則を議論し、次にエン트로ピー生成とエン트로ピー増大率とを議論する。

3.1 エネルギー保存則

高温熱交換器では、圧縮ピストンから I_{comp} だけの仕事が入り、蓄冷器に I_H だけの仕事を渡すとともに、蓄冷器から $Q_H = T_H s_H$ だけの熱を吸収し、外界へ $q_H = T_H s_H$ だけ放熱する (Fig. 5 参照)。したがって高温熱交換器でのエネルギー保存則は、

$$I_{comp} + Q_H = q_H + I_H \quad (27)$$

となる。

低温熱交換器では、蓄冷器から I_C だけの仕事が入り、膨張ピストンへ I_{exp} だけの仕事を渡すとともに、外界から $q_C = T_C s_C$ だけの熱を吸収し、蓄冷器へ

Fig. 5 Heat flow, work flow and enthalpy flow of Stirling refrigerator: the second law of thermodynamics requires $q_H \geq Q_H$ and $Q_C \geq q_C$, and the first law requires $I_{comp} + Q_H = I_H + q_H$ and $I_C + q_C = I_{exp} + Q_C$. Enthalpy flow in a regenerator is homogeneous because of the first law for the regenerator; $H_r = I_H - Q_H = I_C - Q_C$. The first law therefore requires $I_{comp} = q_H + H_r$ and $I_{exp} = q_C + H_r$ for the heat exchanger.

$Q_C = T_C S_C$ だけ放熱する (Fig. 5 参照)。したがって低温熱交換器でのエネルギー保存則は、

$$I_C + q_C = Q_C + I_{exp} \quad (28)$$

となる。

蓄冷器の高温端では、高温熱交換器から I_H だけの仕事が入り、高温熱交換器へ $Q_H = T_H S_H$ だけの熱を放出するので、差し引き $I_H - Q_H$ だけのエンタルピー流入がある。他方、蓄冷器の低温端では、低温熱交換器へ I_C だけの仕事を放出し、低温熱交換器から $Q_C = T_C S_C$ だけの熱を吸収するので、差し引き $I_C - Q_C$ だけのエンタルピー流出がある。蓄冷器にエネルギー保存則を適用すると、蓄冷器の高温端でのエンタルピー流入と蓄冷器の低温端でのエンタルピー流出とは等しい：蓄冷器でのエンタルピー流を H_r とすると、

$$I_H - Q_H = I_C - Q_C = H_r \quad (29)$$

となる (Fig. 5 参照)。

蓄冷器中でのエンタルピー流 H_r を使うと熱交換器でのエネルギー保存則を次の形に書くことができる：

$$\begin{cases} I_{comp} = q_H + H_r \\ I_{exp} = q_C + H_r \end{cases} \quad (30)$$

これは実験により H_r を決めるのに役立つ。 q_H と q_C とは測定可能である。 I_{comp} と I_{exp} とはピストンの p - V 線図から推定できる。残る H_r は (30) から決まる。

3.2 エントロピー生成とエントロピー増大率

エネルギー保存則 (30) を使うと、スターリング冷凍機のエントロピー生成は、

$$s_H - s_C = \frac{q_H}{T_H} - \frac{q_C}{T_C} = \frac{I_{comp}}{T_H} - \frac{I_{exp}}{T_C} + \left(\frac{1}{T_C} - \frac{1}{T_H} \right) H_r \quad (31)$$

エントロピー増大率は、

$$EAC \equiv \frac{s_H}{s_C} = \frac{q_H}{q_C} \frac{T_C}{T_H} = \frac{I_{comp} - H_r}{I_{exp} - H_r} \frac{T_C}{T_H} \quad (32)$$

となる。したがって蓄冷器中でのエンタルピー流 H_r はスターリング冷凍機のエントロピー生成とエントロピー増大率とに大きな影響を与える： H_r が大きくなるとエントロピー生成もエントロピー増大率も大きくなり、 H_r が I_{exp} に近づくときエントロピー増大率は急激に大きくなる。

高温熱交換器でのエントロピー生成 $s_H - S_H$ は、エネルギー保存則 (27) を使うと、

$$s_H - S_H = \frac{I_{comp} - I_H}{T_H} \quad (33)$$

となる。これは高温熱交換器での仕事の散逸 $I_{comp} - I_H$ による発熱 $q_H - Q_H$ が高温熱交換器でのエントロピー生成であることを意味する。高温熱交換器でのエントロピー増大率は、

$$EAC_{hot} \equiv \frac{s_H}{S_H} = 1 + \frac{I_{comp} - I_H}{Q_H} \quad (34)$$

となる。

低温熱交換器でのエントロピー生成 $S_C - s_C$ は、エネルギー保存則 (28) を使うと、

$$S_C - s_C = \frac{I_C - I_{exp}}{T_C} \quad (35)$$

となる。これは低温熱交換器での仕事の散逸 $I_C - I_{exp}$ による発熱 $Q_C - q_C$ が低温熱交換器でのエントロピー生成であることを意味する。低温熱交換器でのエントロピー増大率は、

$$EAC_{cold} \equiv \frac{S_C}{s_C} = 1 + \frac{I_C - I_{exp}}{q_C} \quad (36)$$

となる。(30) を使って q_C を消去すると

$$EAC_{cold} = 1 + \frac{I_C - I_{exp}}{I_{exp} - H_r} \quad (37)$$

だから H_r が I_{exp} に近づくとき低温熱交換器でのエントロピー増大率も急激に大きくなる。

蓄冷器でのエンタルピー流 H_r は蓄冷器の冷凍能力 $Q_c = I_c - H_r$ だけでなくエントロピー生成にも影響する。式 (29) を使うと、

$$S_H = \frac{I_H - H_r}{T_H}, \quad S_C = \frac{I_C - H_r}{T_C} \quad (38)$$

だから、蓄冷器でのエントロピー生成は、

$$S_H - S_C = \left(\frac{I_H}{T_H} - \frac{I_C}{T_C} \right) + \left(\frac{1}{T_C} - \frac{1}{T_H} \right) H_r \quad (39)$$

である。この右辺第2項は H_r によるエントロピー生成を表す。

蓄冷器でのエントロピー増大率は、(38) を使うと、

$$EAC_{\text{regen}} \equiv \frac{S_H}{S_C} = \frac{I_H - H_r}{I_C - H_r} \cdot \frac{T_C}{T_H} \quad (40)$$

となり、(39) を使うと、

$$EAC_{\text{regen}} \equiv \frac{S_H}{S_C} = 1 + \frac{T_C I_H / T_H - I_C}{Q_C} + \left(1 - \frac{T_C}{T_H} \right) \frac{H_r}{Q_C} \quad (41)$$

となる。(40) は H_r が I_C に近づくとき蓄冷器でのエントロピー増大率 EAC_{regen} が急激に大きくなることを示している。(41) は Q_C が小さくなると EAC_{regen} が急激に大きくなることを示している。(29) によれば H_r が I_C に近づくとき Q_C が小さくなるので、当然同じ結果が得られる。

蓄冷器でのエントロピー生成の表現 (39) には一般性がある。添字 H, C を端を指定するパラメータとみなすと、熱交換器でのエントロピー生成にも対応している。熱交換器では $T_H = T_C$ に注意すると H_r によるエントロピー生成が無いので、式 (33) と式 (35) は式 (39) の特別な場合である。

スターリング冷凍機のエントロピー生成 (31) は高温熱交換器でのエントロピー生成 (33) と低温熱交換器でのエントロピー生成 (35) と蓄冷器でのエントロピー生成 (39) との和に等しい。 EAC は当然のことながら EAC_{hot} と EAC_{regen} と EAC_{cold} との積に等しい。

スターリング冷凍機全体のエントロピー生成や EAC は測定データから評価できるが、これらを熱交換器や蓄冷器に分解して、それぞれの場所でのエントロピー生成やエントロピー増大率を評価するには、 I_H

と I_C , あるいは Q_H と Q_C を評価する必要があり、熱音響理論のような適当なモデルに基づいた数値計算が必要不可欠である。

4. 単位長さあたりのエントロピー生成

前章ではスターリング冷凍機のエントロピー生成を熱交換器と蓄冷器とに分けて議論したが、ここではさらに小さく分けて単位長さあたりのエントロピー生成を議論する。このために次のようなベクトル表現を使う。エネルギーやエントロピーの流れは方向があるので方向も含めてベクトルで表すと、

$$\mathbf{Q} = T\mathbf{S} \quad (42)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{Q} + \mathbf{I} \quad (43)$$

となる。 $\mathbf{H}$ はエンタルピー流を表す。

単位長さあたりの吸熱量は $\mathbf{pH}$ だから、単位長さあたりのエントロピー生成量は $\mathbf{pS} - (\mathbf{pH})/T$ である。

(42) と (43) とを使うと、

$$\mathbf{pS} - \frac{\mathbf{pH}}{T} = \mathbf{H}\mathbf{p}\left(\frac{1}{T}\right) - \mathbf{p}\left(\frac{\mathbf{I}}{T}\right) \quad (44)$$

となる。これを軸方向に積分すると先に議論した熱交換器や蓄冷器でのエントロピー生成が得られる。蓄冷器ではエンタルピー流 $\mathbf{H}$ が一樣なので左辺第2項が消えて (39) が得られる。温度の一樣な熱交換器では右辺第1項が消えるので、熱交換器のエントロピー生成量は単位長さあたり $-\mathbf{p}(\mathbf{I}/T)$ となる。これを積分すれば (33) や (35) が得られる。また固体熱伝導の場合には $\mathbf{I} = 0$ なので、エントロピー生成は単位長さあたり $\mathbf{H}\mathbf{p}(1/T) = \mathbf{Q}\mathbf{p}(1/T)$ となる。これを積分すれば式 (1) が得られる。

単位長さあたりのエントロピー生成量は (42) と (43) を使って別の形に書き換えることができる：

$$\mathbf{pS} - \frac{\mathbf{pH}}{T} = -\frac{\mathbf{SpT} + \mathbf{pI}}{T} \quad (45)$$

単位長さあたりのエントロピー生成量は熱力学第二法則により非負である。したがって、

$$\mathbf{pI} \leq -\mathbf{SpT} \quad (46)$$

あるいは、

$$\mathbf{SpT} \leq -\mathbf{pI} \quad (47)$$

となる。(46) は原動機の場合 ($\mathbf{pI} > 0$) にエントロピーが温度の低い方へ流れること ($\mathbf{SpT} < 0$) を示し、

(47) は冷凍機の場合 ($\mathbf{SpT} > 0$) に仕事の流れが減少すること ($\mathbf{pI} < 0$) を示している。

5. エントロピー生成の熱音響理論による考察

熱流 Q は振動流れによる熱流と単純な熱伝導による熱流 Q_κ とからなる。前者は、熱音響理論によれば、進行波成分 Q_{prog} と定在波成分 Q_{stand} と変位による熱流 Q_D との和で表せる。したがって、

$$Q = Q_{\text{prog}} + Q_{\text{stand}} + Q_D + Q_\kappa \quad (48)$$

である。

単位長さあたりの仕事流の増加量 ρI は、熱音響理論に依れば、進行波成分 W_{prog} と定在波成分 W_{stand} と圧力変動のみによる散逸 W_p と粘性散逸 W_v との和で表せる：

$$\rho I = W_{\text{prog}} + W_{\text{stand}} + W_p + W_v \quad (49)$$

まず (45) の右辺の分子を調べよう。 $Q = TS$ に注意して (48) と (49) とを使うと、

$$\begin{aligned} S\rho T + \rho I &= \frac{Q_\kappa + Q_D + Q_{\text{stand}}}{T} \rho T + W_p \\ &\quad + W_v + W_{\text{stand}} \\ &\quad + \frac{Q_{\text{prog}} \rho T}{T} + W_{\text{prog}} \end{aligned} \quad (50)$$

となる。熱音響理論によれば、

$$W_{\text{prog}} + \frac{Q_{\text{prog}} \rho T}{T} \approx 0 \quad (51)$$

なので、

$$\begin{aligned} S\rho T + \rho I &\approx \frac{Q_\kappa + Q_D + Q_{\text{stand}}}{T} \rho T \\ &\quad + W_p + W_v + W_{\text{stand}} \end{aligned} \quad (52)$$

となる。 W_{stand} と Q_{stand} とは位相によりその符号を変えるので、位相を選べば単位長さあたりのエントロピー生成を減らすことができる。また Q_D と Q_κ と W_{stand} は温度勾配 ρT に比例するので、熱交換器の場合のように温度勾配が非常に小さければ、単位長さあたりのエントロピー生成は $-(W_p + W_v)/T$ となり、逆に蓄冷器の場合のように温度勾配が非常に大きければ、単位長さあたりのエントロピー生成は $-(Q_D + Q_\kappa)(\rho T)/T^2$ となる。

次に (44) の右辺を調べよう。このために、まずエントロピー流 $H = I + Q$ を議論する。熱音響理論によれば、

$$Q_{\text{prog}} \equiv -\beta T \text{Re}\{F_{sg}\} I \quad (53)$$

なので、作業流体が理想気体で ($\beta T = 1$)、蓄冷材の熱容量が十分大きく ($F_s = 1$)、しかも $\omega \tau_\alpha \ll 1$ の場合には $Q_{\text{prog}} = -I$ が良い近似である。したがってこの場

合には

$$H = Q_D + Q_\kappa + Q_{\text{stand}} \quad (54)$$

となる。 Q_{stand} は位相を適当に選ぶとヒートポンプ作用を示すので、定在波成分を活用すると蓄冷器での H を小さくすることが可能である。

最後に $\rho(I/T)$ を議論しよう。このために、

$$\rho \left(\frac{I}{T} \right) = \frac{T \rho I - I \rho T}{T^2} = \frac{T W - I \rho T}{T^2} \quad (55)$$

に注意して欲しい。ところで熱音響理論によれば、

$$W_{\text{prog}} \equiv \beta T \text{Re}\{F_{sh}\} \frac{I \rho T}{T} \quad (56)$$

なので、作業流体が理想気体で ($\beta T = 1$)、蓄冷材の熱容量が十分大きく ($F_s = 1$)、しかも $\omega \tau_\alpha \ll 1$ の場合には $W_{\text{prog}} = I \rho T / T$ が良い近似である。したがってこの場合には、式 (55) の分子に現れる $T W_{\text{prog}}$ と $I \rho T$ とが相殺して、

$$\rho \left(\frac{I}{T} \right) \approx \frac{W_p + W_v + W_{\text{stand}}}{T} \quad (57)$$

となる。 W_p と W_v とはともに負であるが、 W_{stand} は位相角を選ぶと正にもなるので、定在波成分を活用すると $\rho(I/T)$ も小さくできる。

いずれにしても蓄冷器での単位長さあたりのエントロピー生成は、温度勾配が大きい場合には $-(Q_D + Q_\kappa)(\rho T)/T^2$ となり、温度勾配が小さい場合には $-(W_p + W_v)/T$ となる。

熱交換器での単位長さあたりのエントロピー生成は、温度勾配が小さいので W_{stand} も無視できて、 $-(W_p + W_v)/T$ だけである。

6. おわりに

移動量としてのエントロピーを使って、冷凍機の効率とエントロピー生成との関係を議論した。FOM や COP のような冷凍機のエネルギー効率は冷凍機のエントロピー増大率 $EAC = s_H / s_C$ と単純かつ密接な関係がある。エントロピー増大率 EAC の小さい機器ほど「地球に優しい」ので、 EAC は動作温度の異なる冷凍機を比較する際の有効な指標である。

エントロピー生成を議論するもう一つの目的は、どこで、どのような機構で、どの程度のエントロピー生成があるかを明らかにし、より効率の高い冷凍機の開発に役立てることにある。このためにスターリング冷凍機を例として、蓄冷器と熱交換器とに分けてエントロピー生成を議論した。ここで考察した一段スターリング冷凍機のエントロピー増大率 EAC は蓄冷器と熱

交換器それぞれのエントロピー増大率の積となる。

最後に熱音響理論を使うとエントロピー生成の定量的議論が可能なることを明らかにした。熱交換器では圧力変動による仕事の散逸 W_p と粘性散逸 W_v だけがエントロピー生成に寄与するが、蓄冷器では、エネルギー変換の定在波成分 W_{stand} も考慮する必要がある。また蓄冷器でのエンタルピー流 H_r もエントロピー生成に寄与する。良い蓄冷器のエンタルピー流は主に熱流束の定在波成分 Q_{stand} と温度勾配に比例する熱流束 Q_D と Q_K とで決まる。蓄冷器でのエントロピー生成を小さくするために定在波成分を利用することができる。温度勾配の小さな蓄冷器では熱交換器と同様に仕事の散逸 W_p と粘性散逸 W_v によるエント

ロピー生成が主となるが、温度勾配の大きな蓄冷器では Q_D と Q_K によるエントロピー生成が主となる。

参 考 文 献

- 1) 小野 周, 河宮信郎, 玉野井芳郎, 槌田 敦, 室田 武編: エントロピー, 朝倉書店, 東京 (1985) 第2章
- 2) A. Tominaga: Cryogenics **35** (1995) in press
- 3) 槌田 敦: 小野 周, 河宮信郎, 玉野井芳郎, 槌田 敦, 室田 武編, エントロピー, 朝倉書店, 東京 (1985) 42
- 4) E. Schrödinger: 岡 小天, 鎮目恭夫訳, 生命とは何か, 岩波書店, 東京 (1975)