1 kWh/1 MW-SMES 用ラザフォードケーブルの結合損失

住吉 文夫, 川畑 秋馬, 今吉 忠利*, 堤 克哉*
入江富士男*, 佐藤 義久**, 浅野 克彦***, 能瀬 眞一****

鹿児島大学工学部電気電子工学科 鹿児島市郡元 1-21-40

*九州電力株式会社総合研究所 福岡市南区塩原 2-1-47

** 株式会社 東京千代田区内幸町 1-1-6

*** 株式会社日立製作所日立工場 日立市幸町 3-1-1

**** 株式会社富士電機総合研究所 市原市八幡海岸通り 7

(1995 年 12 月 4 日受理)

Coupling Losses in Rutherford Cable Designed for 1 kWh/1 MW-SMES

Fumio SUMIYOSHI, Shuma KAWABATA, Tadakazu IMAYOSHI,* Katsuya TSUTSUMI,*
Fujio IRIE,* Yoshihisa SATOU,** Katsuhiko ASANO*** and Shinichi NOSE****

Kagoshima University, 1-21-40 Koorimoto, Kagoshima 890

* Kyushu Electric Power Co. Inc., 2-1-47 Shiobara, Minami-ku, Fukuoka 815

** Toshiba Corporation, 1-1-6 Uchisaiwai-cho, Chiyoda-ku, Tokyo 102

*** Hitachi Works, Hitachi, Ltd., 3-1-1 Saiwai-cho, Hitachi 317

**** Fuji Electric Corporate Research & Development, Ltd., 7 Yawata-Kaigandori, Ichihara 290

(Received December 4, 1995)

Synopsis :

Coupling loss properties were studied theoretically and experimentally for three superconducting conductors of the Rutherford cable type which were developed for a 1 kWh/1 MW-SMES. The strand of the conductor has a CuNi/Cu mixed matrix and a Cu core; its surface is not insulated. The experimental results showed that the inter-strand coupling loss of the conductor is much smaller than the intra-strand coupling loss when the compression stress corresponding to the designed value of the electromagnetic force for the SMES was applied to the sample conductor. We also measured the crossover resistance between strands of the conductor by means of the four probe method, and estimated the contact surface resistance by taking account of the result of an analog simulation with an electric circuit model. By using the contact surface resistance obtained, we could theoretically explain the experimental result of the loss. As for the intra-strand coupling loss, the effect of the existence of a Cu core and a CuNi cladding around it on the loss was also discussed.

Keywords : SMES, Rutherford cable, coupling loss, multifilamentary wire, contact resistance

1. ま え が き

近年, 負荷平準化用の大規模超伝導エネルギー貯蔵装置 (SMES) よりもむしろ電力系統制御用の中小規模 SMES の開発研究が盛んになってきた¹⁾。この中小規模 SMES では, エネルギーの出入りの速さが比較的早く, コイル巻線としての超伝導体には, 最大約 0.05 Hz 相当の変動横磁界が加わることになる。そ

の結果, ヒステリシス損失や結合損失などが発生し, SMES 運転時の総合効率が下がることが懸念される。その一方で, SMES が電力用機器として電力システムに配備されるためにはハードの低コスト化にも配慮する必要がある。その為には, 導体の仕様をなるべく簡素化することも重要である。我々は上述の点を考慮して, 1 kWh/1 MW モジュール型 SMES (愛称 ESK)²⁾ 用の導体開発を行ってきた。導体としては,

マトリックスに CuNi を多く用いたパルス仕様の裸素線を用いた kA 級の ラザフォードケーブルを採用した。

変動横磁界中で発生するラザフォードケーブルの損失特性、特に素線間結合損失特性については、従来より多くの研究がなされている³⁻⁸⁾。特に最近ではこの問題の重要性が、SSC や LHC といったプロジェクトに関連して再認識され、研究が加速した。これらの研究で取り扱っているのは、いずれも高エネルギー加速器用のケーブルであり Cu マトリックスの直流用素線をより線加工したものである。これに対し、ESK 用のケーブルのように、パルス用の低損失型については、

i) 素線とケーブルのそれぞれのツイストの方向およびピッチの比と損失との関係が明確になっていない。加速器用が、ケーブル断面のアスペクト比も大きく、ツイストピッチも比較的長いのにに対し、ESK 用ケーブルでは、アスペクト比が小さくまたツイストピッチも短いので損失特性が異なると考えられる。

ii) 素線間接触抵抗は、一般に、素線自体の構造やケーブルの巻線プロセス、コイル運転時の電磁力などに大きく依存し、その結果、素線間結合損失特性も変化する。加速器用では、素線のマトリックスが Cu 主体である上に、キューリングやカラーリングといった特殊な巻線プロセスを経るので、ESK 用ケーブルのようなものには適用できない。

本研究の目的は、1 kWh/1 MW モジュール型 SMES のコイル巻線用として開発した、パルス仕様の低損失型ラザフォードケーブルについて、その結合損失特性を明らかにすることである。このため、素線表面が絶縁されていない 3 種類の試作ケーブルについて、素線間結合損失と素線内結合損失それぞれを実測し、理論計算と比較検討する。特に、前者については、素線表面の状態や素線同士の圧縮応力によってその損失特性がどのように変化するかを調べる。さらに、素線間の接触抵抗を四端子法で実測し、この結果と素線間結合損失との関係まで調べる。一方、後者については、素線中心部分の Cu コア部分およびそれを取り囲む CuNi クラッド部分がその損失特性にどのように寄与するかを明らかにする。

2. 導体設計

2.1 導体構造

ESK には短周期のパルス状の運転も要求されるた

Table 1 Parameters of conductors.

Conductors name	A	B	C
Strand diameter [mm]	1.1	0.99	1.1
Filament diameter [μm]	6.0	6.0	6.3
Twist pitch of strands (direction) [mm]	20 (S)	15 (S)	22 (S)
Cu / CuNi / NbTi	4.7/2.5/1	4.7/2.5/1	2.5/1.9/1
Dimension of conductors [mm×mm]	2.13×8.40	1.90×7.6	1.98×7.15
Twist pitch of conductors (direction) [mm]	91.7 (Z)	85.0 (Z)	55.0 (S)
Number of strands	16	16	13
Ic (5T, 4.2K) [kA]	3.68	3.41	3.74

め、安定性を損なわない範囲で極力損失の低い超伝導体を開発することが重要である。将来の SMES の実用化を目指す基礎研究としての側面も考慮し、ESK 用導体として、導体製作の比較的簡単なラザフォードケーブル形の NbTi 導体を 3 種類 (A, B, C) 試作した。ESK の 6 個のコイルは導体 A で 3 個、B で 1 個、C で 2 個ずつ巻線される予定である。

導体の諸元を Table 1 に示す。導体パラメータは、ESK の運転時に発生する交流損失に関し、おおよそ、ヒステリシス損失が主で、素線内結合損失はその数分の 1、さらに素線間結合損失は素線内結合損失と同程度となるように選んである。各導体の素線はいずれも、素線内結合損失を低減させるために、Cu コアの周りに CuNi バリア、フィラメント周囲に CuNi マトリックスを配している。導体の安定性は、マドックの安定化理論に基づいて設計されており、素線中心の大きな Cu コアにより素線レベルで安定性を確保しようとしている。さらに、素線間結合損失を低減するために、素線の外皮層に CuNi を配置した。なお、導体 C では素線間の接触抵抗に関する知見を得るため、CuNi 外皮層の外側にさらに Cu 層を配置した。

2.2 結合損失計算

2.2.1 素線内結合損失

導体 A と B の素線はそれぞれ、コア、クラッド、外

Fig. 1 Cross section of strands for Conductor C. For Conductors A and B, the outer sheath region 2 does not exist, therefore, $r_3 = r_s$.

皮層（一層）、導体Cの素線は、コア、クラッド、外皮層1と2を持つNbTi多芯線である。円形断面素線の各部の寸法は、Fig. 1のように、コア、クラッド、フィラメント束、外皮層1、素線全体のそれぞれの領域の外半径を、 r_1 , r_2 , r_b , r_3 , r_s とする。素線に比較的掃引率 $\dot{H}_e$ の小さい変動横磁界（直線掃引、 $H_e = \dot{H}_e t$ ）が加わったとき、 τ_s を素線内結合時定数として、単位時間当たりの素線内結合損失 P_s は、

$$P_s = \dot{H}_e^2 \left(\frac{L_s}{2\pi} \right)^2 \mu_0^2 \sigma_1 \left\{ \frac{\sigma_{c1}}{\sigma_1} \cdot \frac{r_1^2}{r_s^2} \times \frac{4\sigma_{c2}^2 r_2^4}{[(\sigma_{c1} + \sigma_{c2})r_2^2 + (\sigma_{c2} - \sigma_{c1})r_1^2]^2} + \frac{\sigma_{c2}}{\sigma_1} \cdot \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_s^2} \times \frac{[(\sigma_{c1} + \sigma_{c2})^2 r_2^2 + (\sigma_{c2} - \sigma_{c1})^2 r_1^2] r_2^2}{[(\sigma_{c1} + \sigma_{c2})r_2^2 + (\sigma_{c2} - \sigma_{c1})r_1^2]^2} + \frac{r_b^2 - r_2^2}{r_s^2} + p_{sh} \right\} \quad (1)$$

となる。ここで、右辺第1項と第2項は、コアとクラッド領域の結合損失であり、その計算の詳細は付録1に示す。また、第3項はフィラメント束領域の結合損失である。第4項は、外皮層領域の結合損失であり、Turck⁹⁾によると、

- 1) 導体AとBの素線の場合

$$p_{sh} = \frac{\sigma_{o1}}{\sigma_1} \cdot \frac{r_s^2 - r_b^2}{r_s^2} \cdot \frac{r_b^2}{r_s^2 + r_b^2} \quad (2)$$

- 2) 導体Cの素線の場合

$$p_{sh} = \frac{\sigma_{o1}}{\sigma_1} \cdot \frac{r_s^2 - r_b^2}{r_s^2} (r_b^2 + s^2 r_s^2) a_1^2$$

Fig. 2 The compacted stranded-conductor (Rutherford cable) in the changing transverse magnetic field.

$$+ \frac{\sigma_{o2}}{\sigma_1} \cdot \frac{r_s^2 - r_3^2}{r_s^2} \cdot \frac{r_b^2}{r_s^2} (r_3^2 + r_s^2) a_2^2 ;$$

$$a_1 = \frac{r_b}{r_b^2 + s r_s^2}, \quad a_2 = \frac{a_1(1+s)}{r_3^2 + r_s^2},$$

$$s = \frac{\sigma_{o1}(r_3^2 + r_s^2) + \sigma_{o2}(r_s^2 - r_3^2)}{\sigma_{o1}(r_3^2 + r_s^2) - \sigma_{o2}(r_s^2 - r_3^2)} \quad (3)$$

となる。

以上の理論式において、 σ_{c1} , σ_{c2} , σ_{o1} , σ_{o2} は、コア、クラッド、外皮層1、2のそれぞれの領域の導電率である。また σ_1 は、フィラメント束領域の横方向導電率であるが、導体AとBの素線では、 $\sigma_{Cu10\%Ni}$ をマトリックス Cu-10%Niの導電率、 λ' をフィラメント束領域内の (NbTi+Cu) 部分の体積率として、 $\sigma_1 = \sigma_{Cu10\%Ni}(1+\lambda')/(1-\lambda')$ と書ける。一方、導体Cの素線では、 $\sigma_{Cu2\%Ni}$ を Cu-2%Niの導電率、 λ'' をフィラメント束領域内の (NbTi+Cu+Cu-10%Ni) 部分の体積率として、 $\sigma_1 = \sigma_{Cu2\%Ni}(1-\lambda'')/(1+\lambda'')$ と書ける。

2.2.2 素線間結合損失

Fig. 2に示すように、幅広面に垂直 ($\perp$) 磁界が加わったときの素線間結合損失 P_1 を求めるために、素線同士が上下にクロスしている界面に均一な接触面抵抗 $R_c [\Omega \text{ m}^2]$ が存在し、素線断面はほぼ正方形に変形しているものとする（この場合、左右隣の素線間抵抗¹⁰⁾は考慮しなくてよい）。 P_1 の表式は導体全体の単位体積当り、

1) 導体AとBの場合¹¹⁾

$$P_1 = \frac{\sqrt{\pi} r_r \mu_0^2 \dot{H}_c^2 L_s^2}{23,040 \alpha^2 [\sqrt{\pi} \sigma_0^{-1} (1-r_r) + R_c/r_s]} \times [3(128\alpha^4 - 80\alpha^2 + 15)L_r^2 - 80\alpha(8\alpha^2 - 3)r_r L_r + 320\alpha^2 r_r^2] \quad (4)$$

2) 導体Cの場合

$$P_1 = \frac{\sqrt{\pi} r_r \mu_0^2 \dot{H}_c^2 L_s^2}{23,040 \alpha^2 [\sqrt{\pi} \sigma_{01}^{-1} (r_{3r} - r_r) + \sqrt{\pi} \sigma_{02}^{-1} (1 - r_{3r}) + R_c/r_3]} \times [3(128\alpha^4 - 80\alpha^2 + 15)L_r^2 - 80\alpha(8\alpha^2 - 3)r_r L_r + 320\alpha^2 r_r^2] \quad (5)$$

となる。ここで、 $r_r = r_b/r_s$ 、 $r_{3r} = r_3/r_s$ である。また素線のツイストピッチを L_s 、導体のよりピッチを L_c として、 $L_r = L_c/L_s$ であり、 α は、Fig.2の導体断面のアスペクト比で $\alpha = b/a (>1)$ である。(5)式は、文献11)と同様の手法で計算したものである。すなわちFig.2に示すように、導体内の電磁界を、各素線中心のフィラメントから成る灰色部分の仮想的矩形断面多芯線と素線自体の電磁界の重ね合わせによって計算したものである。

ところで、(4)式の右辺分母について、第2項の第1項に対する比すなわち規格化された接触面抵抗を k_c と書くと、

$$k_c = \frac{R_c}{\sqrt{\pi} \sigma_0^{-1} (r_s - r_b)} \quad (6)$$

となる。また同様に、(5)式の右辺分母について、第3項の第1項と第2項の和に対する比 k_c は、

$$k_c = \frac{R_c}{\sqrt{\pi} [\sigma_{01}^{-1} (r_3 - r_b) + \sigma_{02}^{-1} (r_s - r_3)]} \quad (7)$$

となる。 k_c が大きい場合は、変動横磁界の印加時に導体に流れる素線間結合電流の大きさを、主として

R_c が決定づけていることになる。これに対し、 k_c が小さい場合は、主として、フィラメント束より外側にある外皮層領域の抵抗率と厚みの積が決定づけていることになる。

Fig.3は、試料導体A、B、Cそれぞれで発生する結合損失の k_c 依存性を示したものである。図の縦軸 p_{rr} は、各導体の全結合損失で、 $p_{rr} = P_1/P_s + 1$ である。図の右側で、 $p_{rr} = 1$ に漸近しているのは、素線間の接触面抵抗が大きく素線表面が絶縁されている状態に近づいていることに相当する。一方左側で、数10～数100に漸近しているのは、接触面抵抗が非常に小さく理想的な接触状態になって、外皮層の抵抗率と厚みの積が素線間結合電流を決定づけているものの小さくできず、その結果大きな素線間結合損失が発生していることに相当する。なお、 $k_c = 1$ のとき、 p_{rr} は最大値の1/2となる。

3. 短尺導体の損失測定

ラザフォードケーブル形導体のヒステリシス損失が臨界電流の測定値から比較的容易に推定できるのに対し、結合損失は実測しないと推定は困難である。そこ

Fig.3 The dependence of the total coupling loss in the Rutherford cable normalized by the intra-strand coupling loss, p_{rr} , on the normalized contact surface resistance, k_c .

Fig.4 Schematics of the cross section of the holder and arrangement of the pick-up coil for measuring losses.

Table 2 Compression stress inside the sample conductors. [MPa]

Conductor	Sample 1	Sample 2	Sample 3
A	—	—	2.8 ^(*)
B	26.1	11.4*	6.55
C	28.2*	20.5	10.3

で、ESK 用に試作されたラザフォードケーブル形の 3 種類の NbTi 導体について、実機コイル運転時に導体にかかる電磁力を模擬して交流損失の測定を行い定量的な評価を行った。

Fig. 4 のように、300 mm 長の短尺導体 6 本ずつを導体幅広面で絶縁物を挟んで積層したのち、全体を SUS や FRP の板材とボルトにより圧縮したものを試料とした。各導体の両断面は、素線内のフィラメント同士が接触しないよう研磨してある。絶縁物としては、導体 B と C は薄いカプトンシート、導体 A は実際のコイル内層間絶縁物を模擬した 0.6 mm 厚の FRP の板材を使用した。導体幅広面にかかる平均面圧の調整はボルト締めトルク管理により行い、液体ヘリウム温度で所定の面圧になるようにした。面圧値は、実機コイル中で導体の経験する電磁力を中心に、Table 2 に示すように、2.8~28.2 MPa の範囲で試料ごとに 1 ないし 3 通りずつ選んだ。なお、表中の * 印は、実機コイル中でそれぞれの導体に加わる最大電磁応力に対応している。

これらの試料について、0.5 T の直流バイアス磁界に重畳された振幅 $\mu_0 H_m = 8, 16$ G の微小交流磁界を、導体断面の幅広面に対して垂直 ($\perp$) と平行 ($\parallel$) の 2 つの横方向に印加して、ピックアップコイル 1 と 2

Fig. 5 Frequency characteristics of the measured ac loss.

Table 3 Comparison of the effective intra-strand coupling time-constant between theory and experiment. [ms]

Conductor	A	B	C
Experiment	1.1	0.57	1.3
Theory	0.61	0.34	0.75

を用いて、液体ヘリウム中での磁化曲線を測定し交流損失を求めた。なお、この測定法ではヒステリシス損失は全く無視できる。

測定結果の一例として、Table 2 の * 印および () 印のサンプルについてのデータを Fig. 5 に示す。ここで縦軸は 1 周期当りの交流損失を $\mu_0 H_m^2$ で規格化したものである。各導体ごとのデータは、 $\parallel$ 方向ではサンプル依存性は全くなかった。また、導体 B の $\perp$ 方向でわずか 10% 程度の応力依存性が存在したが、導体 C ではほとんど変化はなかった。このため Fig. 5 は、Table 2 の * 印および () 印のついたサンプルのデータで代表させてある。

4. 検 討

導体断面のアスペクト比を考慮すると、 $\parallel$ 方向の損失はほぼ素線自体の結合損失であり、 $\perp$ 方向の損失は素線自体の結合損失と素線間結合損失の和と考えられる¹¹⁾。そこでまず、 $\parallel$ 方向の損失すなわち素線自体の結合損失について検討してみよう。(1) 式は τ_s を素線内等価結合時定数とすると、一般に、

$$P_s = \mu_0 \dot{H}_e A^* \tau_s \quad (8)$$

という形に書ける。ここで、 A^* は素線断面形状因子であり、円断面の時 $A^* \cong 2$ 、正方形断面の時 $A^* \cong 2.5$ である。これらを考慮すると、(1)~(3) 式および (8) 式より τ_s の理論値が求まり Table 3 のようになる。また、実験値については、Fig. 5 の $\parallel$ 方向のデータについて、ピーク周波数が τ_s に対応していることを考慮すると求まる。

Table 3 に示すように、3 つの導体共に、測定値が、理論値の 1.7~1.8 倍になっている。これは各導体内の素線が、理論計算で取り扱った孤立した円形あるいは正方形断面素線というより、正方形断面に近い素線が積み重ねられていたために、むしろ平板モデル¹¹⁾の $A^* \cong 1$ の条件に近かったことになる。

一方、 $\parallel$ 方向の損失に対する $\perp$ 方向の損失の比、 p_{rr} は、導体 A, B, C において、それぞれ約 1.5,

Fig. 6 The dependence of the total coupling loss in the Rutherford cable normalized by the intra-strand coupling loss, p_{rr} , on the contact surface resistance, R_c . The white circles represent the measured data.

1.2, 1.6 であり、かつ面圧依存性は小さかった。以下に、これらのデータについて、2章の理論計算を用いて定量的に検討してみよう。

Fig. 6 は、Fig. 3 を書き直して、各導体の素線内結合損失に対する全結合損失の比 p_{rr} が接触面抵抗 R_c [Ωm^2] によってどのように変化するかを示したものである。 p_{rr} がほぼ 1 に近い本実験の結果は、 R_c の比較的大きな場合に相当していると思われる。

次に、 R_c の値を、四端子法による抵抗の測定値から測定してみよう。損失測定を行った応力状態のままで、素線同士の抵抗を測定する為に、Table 2 の * 印および(*)印のサンプルについて Fig. 4 の断面を保ったままで、導体 A は 240 mm と比較的大きく、B と C は

Fig. 7 An electric circuit model for simulating the network of the crossover resistance between strands in the Rutherford cable.

Fig. 8 Measured values of the resistance between two terminals shown in Fig. 7. The white circle represents Sample 3 of Conductor A which was not cut short.

それぞれ 25 mm と 10.5 mm と短くカットして、液体ヘリウム中で素線同士の直流抵抗をいろいろな組合せで測定した（その具体的な数値データは数が多いので、ここでは省略する）。得られたデータから R_c を評価するために、我々は、Fig. 7 に示すような抵抗と太い銅線から成る回路網モデルを作成し、アナログシミュレーションを行ってみた。Fig. 7 は Fig. 2 に対応して書いてあり、10 k Ω （これを R_1 とする）に統一した抵抗は図の上下にクロスした位置での素線間抵抗に相当し、素線間の抵抗は一定であると仮定している。さらに、図の左右隣の素線間の抵抗は無視できると仮定している。短尺試料のケーブル長 L を変えたモデルについて、室温で、太い銅線間の合成抵抗 R をあらゆる組合せで測定した結果を Fig. 8 に示す。 $L/L_c \geq 0.5$ では、 R/R_1 はほとんど一つの値に収束するが、それ以下では測定値に幅がある。導体 A, B, C でそれぞれ $L/L_c = 2.6, 0.37, 0.19$ で行ったヘリウム中での四端子法の抵抗測定値と、Fig. 8 との比較から、接触面抵抗は、導体 A, B, C に対して、それぞれ 3×10^{-8} , 4×10^{-9} , $1.5 \times 10^{-9} \Omega m^2$ と推定される。導体 C は Cu の外皮層 2 をもっているにも関わらず R_c が大きかった（ここでは、導体の素線同士のクロスした面の面積は SEM 観察によって平均的に約 1.1 mm^2 であるという結果も用いた）。このようにして得られた R_c および p_{rr} の測定値を、Fig. 6 中に各導体ごとプロット

してあるが、おおよそ理論曲線に合っている。

5. ま と め

本研究では、1 kWh/1 MW モジュール型 SMES (ESK) 用に開発したパルス仕様の低損失ラザフォードケーブルについて、その結合損失特性について調べた。素線間接触面抵抗 R_c が、当初予測していた値より大きな値になった為に、結果として、素線間結合損失は無視できる位低い値に押さえることができた。このことは、1 kWh/1 MW 級のコイルでは電磁力が加速器用コイルに比べて比較的弱い為 R_c が大きくなったと考えられる。なお、 R_c が大きくなると一般に安定性の劣化が心配になるが、ESK では運転電流が臨界電流値に対して十分なマージンをとってあるので、コイルの安定性は問題ないと思われる。

参 考 文 献

- 1) 入江富士男：低温工学 **30** (1995) 259
- 2) K. Tsutsumi, et al.: Proc. of ISS'94, Kitakyushu (1994) 1203
- 3) W. J. Carr, Jr. and V. T. Kovachev: Cryogenics **35** (1995) 529
- 4) M. D. Sumption, et al.: IEEE Trans. Appl. Supercond. **5** (1995) 692
- 5) A. Nijhuis, et al.: IEEE Trans. Magn. **30** (1994) 2006
- 6) G. B. J. Mulder, et al.: IEEE Trans. Magn. **27** (1991) 2190
- 7) A. Kimura, et al.: Proc. of CEC/ICMC, Columbus (1996) to be published
- 8) A. Kimura, et al.: Cryogenics (to be published)
- 9) B. Turck: J. Appl. Phys. **50** (1979) 5397
- 10) V. T. Kovachev, et al.: Cryogenics **34** (1994) 813
- 11) 船木和夫, 住吉文夫：多芯線と導体, 産業図書, 東京 (1995)

付 録 1 素線内結合損失の計算式の導出

Fig. 1 のような、コアおよびクラッドを内部にもつ素線について考える。変動横磁界下でのコア領域とクラッド領域のポテンシャル ϕ_{c1} , ϕ_{c2} は、ラプラス方程式の一般解より、それぞれ、

$$\phi_{c1} = a_1 r \cos \theta$$

$$\phi_{c2} = (a_2 r + b_2 / r) \cos \theta$$

で与えられる。ただし、 a_1 , a_2 , b_2 は定数で、2つの領域の境界 ($r=r_1$) での電界と電流の連続性、すなわち、

$$\frac{\partial \phi_{c1}}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi_{c2}}{\partial \theta}$$

$$\sigma_1 \frac{\partial \phi_{c1}}{\partial r} = \sigma_2 \frac{\partial \phi_{c2}}{\partial r}$$

および、フィラメント束領域とクラッド領域との境界条件、すなわち、

$$a_2 r_2 + b_2 / r_2 = V_m; \quad V_m = -j r_2 \frac{L_s}{2\pi} \mu_0 \omega H_{ix}$$

より求まる。ここでは、文献 11) に示すような印加外部磁界が角速度 ω の正弦波の場合を取り扱っており、得られた結果は、

$$a_1 = \frac{2\sigma_{c2} r_2}{(\sigma_{c1} + \sigma_{c2}) r_2^2 + (\sigma_{c2} - \sigma_{c1}) r_1^2} \cdot V_m$$

$$a_2 = \frac{(\sigma_{c1} + \sigma_{c2}) r_2}{(\sigma_{c1} + \sigma_{c2}) r_2^2 + (\sigma_{c2} - \sigma_{c1}) r_1^2} \cdot V_m$$

$$b_2 = \frac{(\sigma_{c2} - \sigma_{c1}) r_1^2 r_2}{(\sigma_{c1} + \sigma_{c2}) r_2^2 + (\sigma_{c2} - \sigma_{c1}) r_1^2} \cdot V_m$$

となる。よって、コアおよびクラッド領域内それぞれの電界を、 $E_1 = (E_{1r}, E_{1\theta}, E_{1z})$, $E_2 = (E_{2r}, E_{2\theta}, E_{2z})$, とすると、

$$E_{1r} = -(\text{grad } \phi_{c1})_r = -a_1 \cos \theta$$

$$E_{1\theta} = -(\text{grad } \phi_{c1})_\theta = a_1 \sin \theta$$

$$E_{2r} = -(\text{grad } \phi_{c2})_r = -(a_2 - b_2/r^2) \cos \theta$$

$$E_{2\theta} = -(\text{grad } \phi_{c2})_\theta = (a_2 + b_2/r^2) \sin \theta$$

となるので、コアおよびクラッド領域内で発生する結合損失 W_s は素線内の単位体積当たり 1 周期当たり、

$$\begin{aligned} W_s &= \frac{1}{2\pi f r_s^2} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{r_1} \sigma_{c1} |E_1|^2 r dr + \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{c2} |E_2|^2 r dr \right] d\theta \\ &= \frac{|V_m|^2}{2f} \left\{ \sigma_{c1} \frac{r_1^2}{r_s^2} \cdot \frac{4\sigma_{c2}^2 r_2^2}{[(\sigma_{c1} + \sigma_{c2}) r_2^2 + (\sigma_{c2} - \sigma_{c1}) r_1^2]^2} \right. \\ &\quad \left. + \sigma_{c2} \cdot \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{r_s^2} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{(\sigma_{c1} + \sigma_{c2})^2 r_2^2 + (\sigma_{c2} - \sigma_{c1})^2 r_1^2}{[(\sigma_{c1} + \sigma_{c2}) r_2^2 + (\sigma_{c2} - \sigma_{c1}) r_1^2]^2} \right\} \end{aligned}$$

となる。よって、直線掃引の場合の単位時間当たりの素線内結合損失 P_s は、文献 11) より、(1) 式のように書ける。