管内流体の圧力変動による温度変動の径方向の分布

富 永 昭, 矢 崎 太 一*

筑波大学物理学系 つくば市天王台 1-1-1

* 愛知教育大学総合理学 刈谷市井ヶ谷町広沢 1

(1997 年 11 月 4 日受理)

Radial Distributions of Oscillating Temperature of Fluid in a Tube Induced by Pressure Oscillation

Akira TOMINAGA and Taichi YAZAKI*

Institute of Physics, University of Tsukuba, 1-1-1 Tennodai, Tsukuba 305-0006

* Department of Physics, Aichi University of Education, Kariya 448-0001

(Received November 4, 1997)

Synopsis:

Pressure oscillation of fluid in a tube induces some temperature oscillation of the fluid. Radial distributions of the oscillating temperature are discussed from the viewpoint of thermoacoustic theory. The discussion is, for simplicity, restricted to the case that heat capacity of the tube wall is sufficiently large and temperature of the wall is homogeneous. For a gas far from the tube wall oscillation is expected to be isentropic and the temperature oscillation equal to $T_s \equiv (\partial T / \partial p)_s p$, where p indicates pressure oscillation. For a gas contact to the tube wall, oscillation is isothermal and thus the temperature oscillation vanishes and entropy oscillation is $S_r \equiv (\partial S / \partial p)_T p$. Therefore, oscillation temperature (T) is generally composed of two terms: $T = T_s + T_p$. The second term ($T_p \equiv (\partial T / \partial S)_p S$) is isobaric temperature oscillation due to entropy oscillation (S). Since $S = f_a S_r$ for a gas in a tube of homogeneous temperature, oscillation temperature (T) is proportional to T_s such as $T = (1 - f_a) T_s$. For a wide tube, f_a can be approximated by $\exp(x/\delta_a) \exp(-ix/\delta_a)$, where x indicates the distance from the surface of the tube, and thus $|1 - f_a|^2 \sim 1 + |f_a|^2 - 2|f_a| \cos(x/\delta_a)$. This expression shows that $|1 - f_a|$ exceeds 1 at about twice the thermal boundary layer (δ_a) from the wall: oscillating amplitude of temperature can exceed that of isentropic oscillation.

Keywords: temperature oscillation, thermoacoustics

1. はじめに

管内流体に圧力変動が加わると、流体に温度変動が生じる。壁から充分離れたところの流体は断熱可逆的に膨脹圧縮を繰り返すので、通常の気体では、圧力変動と同位相の温度変動が生じる。逆に管壁に接触している流体は、管壁との熱接触が良好なので、管壁の温度が一樣なら温度変動がない。問題はこの中間の領域である。本論文では流路断面内での温度変動の分布を熱音響理論¹⁾に基づいて議論する。

熱音響現象を理解する目的で進展してきた熱音響理

論¹⁾では、流路断面内での速度分布に関係する分布関数 f_v と流路断面内でのエントロピー変動の分布に関係する f_a とが本質的に重要な役割を果たしている。 f_v の虚数部分は粘性散逸による不可逆過程と関連し、 f_a の虚数部分は温度変動の非一様性から生じる不可逆過程と関係があるからである。

f_v については既に速度分布の測定により検証されている²⁾が f_a については未だに検証実験がなされていない。しかし、 f_a は流路断面内での温度変動の分布とも関係があるので、温度変動の分布を測定することにより f_a についての検証実験も可能である。

2. 管内流体の温度変動

流体の温度変動の機構は2つある。1つはエントロピーの出入りと発生（不可逆過程）に伴うものであり、他はエントロピーの出入りや発生のない断熱可逆変化によるものである。このことを定式化するには流体の温度変動 T を圧力変動 p とエントロピー変動 S とで書けばよい。線形近似では

$$T = T_p + T_s \quad (1)$$

但し

$$T_s \equiv \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s p \quad (2)$$

$$T_p \equiv \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_p S = \frac{T_m}{C_p} S \quad (3)$$

となる。 T_s は断熱可逆変化での温度変動を表す。通常の気体では、 $(\partial T / \partial p)_s > 0$ なので、 T_s は p と同位相である。ちなみに比熱比 γ の理想気体では

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s = \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{T_m}{p_m}$$

である。ここで T_m と p_m はそれぞれ平均温度と平均圧力 p_m である。 T_p は等圧でのエントロピー変動による温度変動を表す。比熱は常に正だから、 T_p は S と同位相である。

断熱可逆変化 ($S=0$) では $T_p=0$ だから、 $T=T_s$ である。等温可逆変化 ($T=0$) では、

$$T_p = -T_s \quad (4)$$

である。等温可逆過程によるエントロピー変動 S_T は

$$S_T = \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T p = -\frac{\beta}{p_m} p \quad (5)$$

だから、これを(3)式の S に代入しても(4)式が得られる。通常の流体では、熱膨張率 β が正だから、 S_T と p とは逆位相である。

次に管内流体の温度変動 T とエントロピー変動 S とを考察する。簡単のために管壁の温度は一樣とする。

壁から充分離れたところの流体は断熱可逆的に膨脹圧縮を繰り返す ($S=0$) ので、 $T=T_s$ である。つまり通常の気体では圧力変動と同位相の温度変動が生じる。

逆に熱容量の充分大きな管壁に接触している流体は、管壁との熱接触が良好なので、温度変動がない ($T=0$)：壁に接触している流体については(4)式が成り立ち、 $S=S_T$ である。

このように管内流体の温度変動とエントロピー変動

とは流路断面内での位置に依存する。温度変動は、壁の近くでは小さく、壁から充分離れると大きい。エントロピー変動は、壁の近くで大きく、壁から離れると小さい。

管内流体の温度変動の流路断面内での分布を調べよう。 T_p も T_s も振動しているので、管内流体の温度変動 $T=T_p+T_s$ には、 T_p と T_s との干渉効果が現れ、両者の振幅と位相の流路断面内での分布により、 T の位相と振幅の流路断面内での分布が決まる。 T_s の位相と振幅は、 p の位相と振幅が一樣なので、一樣である。しかし、 T_p の位相と振幅は、 S の位相と振幅が一樣ではないので、流路断面内の位置 r に依存する。つまり T が流路断面内で一樣でないことは、 S が流路断面内で一樣でないことの現れである。

T_p を分布関数 $f(r)$ を使って

$$T_p = -f(r) T_s \quad (6)$$

と表現すると、

$$T_p = (1-f) T_s \quad (7)$$

である。壁に接触している流体については $T=0$ なので、 $f(r_0)=1$ である。実験では圧力変動 p の測定から、(2)式を使って、 T_s が評価できる。温度変動 T も測定可能である。従って f も実験により決めることができる。

熱音響理論によれば、温度の時間平均 T_m が管の軸方向で一樣で、しかも管壁の熱容量が充分大きい場合には、

$$T = (1-f_a) T_s \quad (8)$$

従って

$$T_p = -f_a T_s \quad (9)$$

である。つまり $f=f_a$ である。(3)と(5)と(9)式とから

$$S = -f_a \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p T_s = f_a S_T \quad (10)$$

となるので、分布関数 f_a を調べることはエントロピー変動の分布を調べることに同じである。

以下では f_a の議論から始めて管壁の温度が一樣な場合の T_p の径方向分布を議論し、その後で温度変動 T の径方向分布を議論する。

3. T_p の径方向分布

(9)式を使って T_p の径方向分布を調べよう。 T_s は一樣なので、分布関数 f_a を調べれば充分である。

f_a は複素数なのでその絶対値 $|f_a|$ と位相角 θ_a とで表現する：

$$f_a = |f_a| e^{i\theta_a} \quad (11)$$

$|f_a|$ も θ_a も径方向の位置に依存する。管壁に接触している流体では $|f_a|=1$, $\theta_a=0$ である。(9)と(11)式から, T_p の振幅は $|f_a|$ に比例し, T_p の位相は $-T_s$ に比べて θ_a だけ進んでいることが判る。通常の流体では, 熱膨張率が正なので, T_s は圧力変動 p と同位相である。従って $-T_p$ の位相は, 通常の流体では, p の位相よりも θ_a だけ進んでいる。

分布関数 f_a は流路の断面形状と振動の角周波数 ω と熱緩和時間 τ_a とに依存する。本論文では流路の断面形状は半径 r_0 の円筒とする。 τ_a は, 流体の熱拡散係数 α を使って表現すると, $\tau_a = r_0^2 / (2\alpha)$ である。無次元量 $\omega\tau_a$ と熱境界層の厚さ $\delta_a = (2\alpha/\omega)^{1/2}$ との関係は $\omega\tau_a = (r_0/\delta_a)^2$ である。流路半径 r_0 が熱境界層の厚さ δ_a に比べて充分小さい場合には $\omega\tau_a \ll 1$ であり, 逆に r_0 が δ_a に比べて充分大きい場合には $\omega\tau_a \gg 1$ である。

f_a の分布例を Fig. 1 に示す。 θ_a は正になることがないので, T_p の位相は, $-T_s$ の位相に比べて $-\theta_a$ だけ遅れる。この図では f_a の位相角 θ_a が正のように見えるところがあるが, $\theta_a < -n\pi$ のところでは, $n\pi$ だけずらして $\theta_a + n\pi$ を図示しているためである。流路半径 r_0 が熱境界層の厚さ δ_a に比べて充分小さい ($\omega\tau_a \ll 1$) 場合には $|f_a| \sim 1$ で $\theta_a \sim 0$ となっている。この場合には至る所で T_p が大きく, $-T_s$ とほとんど同じ位相で T_p が変動している。逆に流路半径 r_0 が熱境界層の厚さ δ_a に比べて充分大きい ($\omega\tau_a \gg 1$) 場合には, 壁から離れるにつれて T_p の振幅が急激に小さ

くなり, T_p の位相は $-T_s$ の位相に比べてかなり遅れる。

このように T_p の位相が $-T_s$ の位相に比べて遅れるのは, 有限の T_p の原因が流体と管壁との熱交換にあるからである。因果律に従い, 結果としての T_p は原因 $-T_s$ より遅れる。

位相遅れ $-\theta_a$ が例えば 2π のところでは f_a が正の実数になる。このためにそこでは T_p は T_s と逆位相となる。 T_p が T_s と逆位相で振動する位置は他にもあり, 位相遅れが $2(n-1)\pi$ (n は自然数) のところでは T_p と T_s とは逆位相で振動する。例えば管壁に接触している流体がその典型である。位相遅れ $-\theta_a$ が $2(n-1)\pi$ のところでは $\cos(-\theta_a)=1$ である。

位相遅れ $-\theta_a$ が例えば π のところでは f_a が負の実数になる。このために T_p は T_s と同位相となる。 T_p が T_s と同位相で振動する位置は他にもあり, 位相遅れ $-\theta_a$ が $(2n-1)\pi$ (n は自然数) のところでは T_p が T_s と同位相で振動する。位相遅れが $(2n-1)\pi$ のところでは $\cos(\theta_a) = -1$ である。

壁から離れるにつれて, 位相遅れ $-\theta_a$ は単調に増加し, $|f_a|$ は単調に減少する。特に管の半径が熱境界層の厚さに比べて充分大きい場合 ($\omega\tau_a \gg 1$) には, 中心付近を除けば反対側の壁の効果が無視できるほど小さいので

$$\theta_a \cong \frac{r-r_0}{\delta_a} = -\left(1-\frac{r}{r_0}\right) \frac{r_0}{\delta_a} \quad (12)$$

$$|f_a| \cong \exp \theta_a \quad (13)$$

Fig. 1 Examples of radial distributions of f_a for a circular cylinder.

となる。この場合には位相遅れ $-\theta_a$ は熱境界層の厚さ δ_a を単位として測った壁からの距離に等しいことに注意して欲しい。 $\theta_a = -1$ のところでは $|f_a|$ が $1/e \sim 0.37$ になっている。Fig. 1で直線的に変化している部分は反対側の壁の効果が無視できる領域であり、(12)と(13)式とを満たしていることが明らかである。

4. 温度変動 T の径方向分布

第2章で述べたように、管内流体の温度変動 $T = T_p + T_s$ には、 T_p と T_s との干渉効果が現れ、両者の振幅と位相の流路断面内での分布により、 T の位相と振幅の流路断面内での分布が決まる。例えば、位相遅れ $-\theta_a$ が $2(n-1)\pi$ のところでは、 T_p と T_s とが逆位相となり、温度変動 T の振幅は T_s の振幅よりも小さい。また位相遅れ $-\theta_a$ が $2(n-1)\pi$ のところでは、 T_p と T_s とが同位相となり、温度変動 T の振幅は T_s の振幅よりも大きい。

この章では(8)式を使って温度変動 T の径方向分布を調べよう。 T_s は一様なので、このためには $1-f_a$ の分布を調べればよい。

$1-f_a$ の大きさと位相とに着目しよう。(11)式を使うと $1-f_a$ の大きさは

$$|1-f_a| = \sqrt{1 + |f_a|^2 - 2|f_a|\cos\theta_a} \quad (14)$$

$1-f_a$ の位相は

$$\text{Arg}\{1-f_a\} = \tan^{-1}\left(\frac{-|f_a|\sin\theta_a}{1-|f_a|\cos\theta_a}\right) \quad (15)$$

である。(14)式から直ちに判るように、

$\theta_a = -2(n-1)\pi$ では、

$$|1-f_a| = 1 - |f_a|$$

となり、 T の振幅は T_s の振幅よりも小さい。同様に $\theta_a = -(2n-1)\pi$ では、

$$|1-f_a| = 1 + |f_a|$$

となり、 T の振幅は T_s の振幅よりも大きい。

(15)式から直ちに判るように、 $\text{Arg}\{1-f_a\}$ の符号は $\sin\theta_a$ の符号とは逆である。 $1-|f_a|\cos\theta_a$ は負になることがないためである。壁の近くのように $\sin\theta_a < 0$ の領域では T の位相は T_s の位相よりも進んでいる。

以下では、(14)と(15)式とを使って、温度変動 T の分布を調べる。

4.1 流路径が熱境界層の厚さに比べて小さい場合

流路径が熱境界層の厚さに比べて充分小さい場合 ($\omega\tau_a \ll 1$) には、 $|f_a| \sim 1$ なので、(14)式からは

$$\begin{aligned} |1-f_a| &\approx \sqrt{2-2\cos\theta_a} \\ &= 2\left|\sin\frac{\theta_a}{2}\right| \\ &\cong |\theta_a| \end{aligned} \quad (16)$$

が得られ、(15)式からは

$$\begin{aligned} \text{Arg}\{1-f_a\} &\approx \tan^{-1}\left(\frac{-\sin\theta_a}{1-\cos\theta_a}\right) \\ &= \tan^{-1}\left(\cot\frac{\theta_a}{2}\right) \\ &\cong \frac{1}{2}(\pi - \theta_a) \end{aligned} \quad (17)$$

となる。 θ_a の大きさが小さいので、 $|1-f_a|$ が小さく、 $\text{Arg}\{1-f_a\}$ は $\pi/2$ に近い。

Fig. 2 Examples of radial distributions of $1-f_a$ for a circular cylinder.

$1-f_a$ の分布例を Fig. 2 に示す。 $\omega\tau_a$ が小さい場合には、 $|1-f_a|$ が小さく、 $1-f_a$ の位相は $\pi/2$ に近い。このことは、流路径が熱境界層の厚さに比べて小さい場合には、 T の振幅が至る所で小さく、圧力変動よりも約 $\pi/2$ だけ位相が進んでいることを示している。

4.2 流路径が熱境界層の厚さに比べて大きい場合

流路径が熱境界層の厚さに比べて充分大きい場合 ($\omega\tau_a \gg 1$) には、ほとんどの場所で (12) と (13) 式とが成り立つことを使う。

壁から遠く離れると、温度変動 T は T_s に近い。そこでは、 $|f_a|$ が小さいので (14) 式からは $|1-f_a| \sim 1$ となり、(15) 式からは $\text{Arg}\{1-f_a\} \sim 0$ だからである。

逆に壁の極く近くでは、温度変動 T の振幅が小さく、 T の位相は T_s よりも $\pi/4$ 近く進んでいる。ここでは、 θ_a の大きさが小さいので、(14) 式からは

$$\begin{aligned} |1-f_a| &\approx 1-|f_a| \\ &= 1-\exp \theta_a \\ &\approx -\theta_a \end{aligned} \quad (18)$$

が得られ、(15) 式からは

$$\begin{aligned} \text{Arg}\{1-f_a\} &\approx \tan^{-1}\left(\frac{-|f_a|\theta_a}{1-|f_a|}\right) \\ &= \tan^{-1}|f_a| \\ &\approx \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad (19)$$

が得られるからである。

壁の近くでの $1-f_a$ の位相は、このように、熱境界層の厚さが管径に比べて充分大きい場合とその逆に熱境界層の厚さが管径に比べて充分小さい場合とでは値が異なる。前者では $\pi/2$ に近く、後者では $\pi/4$ に近い。言い換えると、壁の近くでの $1-f_a$ の位相は、反対側の壁の影響が無視できる場合には $\pi/4$ となり、反対側の壁の影響が大きい場合には $\pi/2$ となる。一般には、壁の近くでの $1-f_a$ の位相は $\pi/2$ と $\pi/4$ との間であらう。

管の半径が熱境界層の厚さに比べて大きい場合には、 T の振幅は T_s の振幅よりも大きくなることがある。このことは (14) 式を調べることににより明らかとなる。

$$2 \cos \theta_a > |f_a|$$

では、 $|1-f_a| < 1$ となり、温度変動の振幅は T_s の振幅より小さい。しかし

$$2 \cos \theta_a = |f_a|$$

では、 $|1-f_a| = 1$ となり、温度変動の振幅は T_s の振幅と同じである。さらに

$$2 \cos \theta_a < |f_a|$$

では、 $|1-f_a| > 1$ となり、 T の振幅は T_s の振幅よりも大きくなる。例えば $\theta_a = -(2n-1)\pi$ では、 $\cos \theta_a = -1$ だから、 T の振幅は $(1+|f_a|)T_s$ となる。数値計算に依れば、熱境界層の中ではつねに $2 \cos \theta_a > |f_a|$ であって、 T の振幅は T_s の振幅よりも小さいが、熱境界層の外では $2 \cos \theta_a \leq |f_a|$ となるような領域が存在する。

T の振幅が T_s の振幅と同じになるような場所を探そう。そのためには

$$2 \cos \theta_a = |f_a| \quad (20)$$

を解けばよい。熱境界層の厚さが管の半径に比べて充分小さい時には、(13) 式が成り立つから、(20) 式は

$$2 \cos \theta_a = \exp \theta_a \quad (21)$$

となる。 $2 \cos \theta_a$ と $\exp \theta_a$ の図を Fig. 3 に示す。この図から、 T の振幅が T_s の振幅と同じになるような場所は θ_a が -1.5 、 $-(n+1/2)\pi$ の近くであることが判る。1.5 は $\pi/2$ に近いことに注意して欲しい。従って、 T の振幅が T_s の振幅よりも大きいのは、大雑把に言えば、 $\cos \theta_a < 0$ の領域である。

このことは Fig. 2 から読みとれる。 $\omega\tau_a$ が大きい場合には、 $|1-f_a| > 1$ の領域や $1-f_a$ の位相が負のところがある。このことは T の振幅が T_s の振幅よりも大きいところや圧力変動に比べて温度変動の位相が遅れているところがあることを示している。それぞれ、 $\cos \theta_a < 0$ と $\sin \theta_a > 0$ の領域に対応していること

Fig. 3 $2 \cos \theta_a$ and $\exp \theta_a$ as a function of $\theta_a = \text{Arg}\{f_a\}$: $-\theta_a$ indicates a distance from the wall in the unit of the thickness of thermal boundary layer δ_a .

が明らかである。また壁のところの $1-f_a$ の位相は、 $\omega\tau_a$ が大きい場合には $\pi/4$ となることも読みとれる。

5. ま と め

管内流体の圧力変動による温度変動の径方向の分布を熱音響理論の立場で議論し、通常の気体について、以下の結論に達した。

1) 熱境界層の厚さが管径に比べて大きい時には、温度変動の振幅が小さく、温度変動の位相は圧力変動よりも約 $\pi/2$ だけ進んでいる。

2) 熱境界層の厚さが管径に比べて小さい時には、温度変動の振幅が断熱可逆的な圧縮膨脹による温度変動よりも大きいところが存在する。この時には圧力変動に比べて温度変動の位相は、熱境界層の中では進んでいるが、熱境界層の外では遅れるところもある。

3) エントロピー変動による温度変動 T_p の振幅と位相差 θ_a が重要である。圧力変動に比べて温度変動の

位相が進んでいるのは $\sin \theta_a < 0$ の領域であり、遅れるのは $\sin \theta_a > 0$ の領域である。温度変動の振幅が断熱可逆的な圧縮膨脹による温度変動よりも大きいところは、大雑把に言えば $\cos \theta_a < 0$ の領域であり、 $\cos \theta_a > 0$ の領域では温度変動の振幅が断熱可逆的な圧縮膨脹による温度変動を越えることはない。

以上の結論は実験で確認できることである。 f_a の分布は熱音響理論の本質に関わることから実験により確認することが望ましい。

参 考 文 献

- 1) A. Tominaga: Thermodynamic aspects of thermoacoustic theory, *Cryogenics* **35** (1995) 427
- 2) 国友靖明, 後藤昌英, 矢崎太一, 富永 昭: レーザー流速計を用いたパルス管内部の流速測定, 第51回低温工学・超電導学会講演概要集 (1994) 219