蓄冷器の冷凍能力と特性周波数： 熱音響理論の 4 K G-M 冷凍機への応用

富 永 昭

筑波大学物理学系 つくば市天王台 1-1-1

(1998 年 11 月 19 日受理)

Cooling Power of a Regenerator and Its Characteristic Frequency: Application of Thermoacoustic Theory to 4 K G-M Cryocooler

Akira TOMINAGA

Institute of Physics, University of Tsukuba, 1-1-1 Tennohdai, Tsukuba 305-0006

(Received November 19, 1998)

Synopsis:

The thermoacoustic theory is applied to discussions on cooling power of a regenerator with narrow channels ($\omega\tau_a \ll 1$). Heat flux in the regenerator is shown to be a quadratic equation of the operating frequency ω , and there is a characteristic frequency ω_0 . If ω_0 is independent of ω , the cooling power is also a quadratic equation of ω , and it shows maximum at $\omega = \omega_0$. The cooling power depends on the temperature of the cold end partly through ω_0 , which depends on material constants of the working fluid, the oscillating amplitudes, and the phase difference between pressure and displacement of the fluid. Discussions on ω_0 and the maximum cooling power give a qualitative explanation of recent experimental results on 4 K G-M cryocoolers only if ω_0 is identified with experimentally obtained operating frequency corresponding to a maximum cooling power of 4 K G-M cryocoolers.

Keywords: regenerator, heat flux, frequency dependence, thermoacoustics, G-M cryocooler

1. はじめに

周知のように、蓄冷器を使う冷凍機では、最低到達温度と冷凍能力とが運転周波数に依存する。最低到達温度を下げるためには運転周波数を下げる必要があり、4 K 以下の低温動作を目指す G-M 冷凍機では運転周波数は 1 Hz 程度である。逆に 70 K 程度で使う冷凍機では、運転周波数を高くすることにより、冷凍機のサイズに比べて大きな冷凍能力が実現できる。

このような経験事実をどのように理解したらよいのか。

理想的蓄冷器を仮定する伝統的議論では、蓄冷器の冷凍能力が運転周波数に比例するので、運転周波数が高ければ高いほど冷凍能力が増し、最低到達温度も低くなるはずである。これでは経験事実に反するので、普通はディスプレイサーの運動によるシャトル損失や

ポンピング損失などの運転周波数に依存する損失を考慮する。しかしこれらの損失を具体的に評価することは必ずしも容易でないし、評価してみてもシャトル損失やポンピング損失は小さすぎる。別にもっと大きな損失があるはずである。

熱音響理論¹⁾によれば蓄冷器にも運転周波数に依存する損失がある。したがって冷凍機の冷凍能力が主に蓄冷器で決まる場合には、蓄冷器の冷凍能力を評価することにより冷凍機の冷凍能力が概算できるはずである。例えば GM 冷凍機やスターリング冷凍機では、蓄冷器低温端での熱流束を熱音響理論により評価すれば、冷凍機の冷凍能力を見積もることができるであろう。他方、パルス管冷凍機ではパルス管部からの熱侵入も考慮しなければならないので少し複雑になる。

本論文では蓄冷器の冷凍能力が運転周波数と低温端温度にどのように依存するのかを熱音響理論に基づい

て議論する。さらにその結果を最近の4 K G-M 冷凍機の実験結果と比較し、熱音響理論を蓄冷器に適用することの妥当性を明らかにする。

2. 蓄冷器の熱流束

蓄冷器の熱流束について熱音響理論¹⁾の結果を整理しておこう。座標軸の向きは仕事流束

$$I = \langle p \cdot \langle u \rangle_r \rangle_t = \frac{\omega}{2} |p| |\langle \xi \rangle_r| \sin \theta \quad (1)$$

が正になるように選ぶことにする。ここで p は変動圧力、 $\langle u \rangle_r$ は流路断面断面で平均した流速、 $\langle \xi \rangle_r$ は流路断面断面で平均した流体の変位を表す。 ω は振動の角周波数であり、 θ は p と $\langle \xi \rangle_r$ との位相差である。絶対値の記号は振幅を表す。仕事流束が正になるように座標軸を選んだので $\sin \theta$ は正である。

蓄冷器中では仕事流束が高温側から低温側へ向かうので、蓄冷器の温度勾配は負である。蓄冷器が冷凍機として働いている限り、熱流束は低温側から高温側へ向かう（ヒートポンプ）ので、負である。

熱音響理論¹⁾によれば、蓄冷器中の熱流束 Q は次のように4つの項からなる：

$$Q = Q_{prog} + Q_{stand} + Q_D + Q_\kappa \quad (2)$$

$$Q_{prog} = -\beta T_m \text{Re}\{F_{sg}\} I \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} Q_{stand} &= -\beta T_m \text{Im}\{F_{sg}\} \langle p \cdot \omega \langle \xi \rangle_r \rangle_t \\ &= -\beta T_m \text{Im}\{F_{sg}\} \frac{\omega}{2} |p| |\langle \xi \rangle_r| \cos \theta \end{aligned} \quad (3b)$$

$$\begin{aligned} Q_D &= \rho_m C_p \nabla_{\parallel} T_m \text{Im}\{g_D\} \text{Re}\left\{\frac{1}{1-\chi_\nu}\right\} \\ &\quad \times \langle \langle \xi \rangle_r \cdot \omega \langle \xi \rangle_r \rangle_t \\ &= \rho_m C_p \nabla_{\parallel} T_m \text{Im}\{g_D\} \\ &\quad \times \text{Re}\left\{\frac{1}{1-\chi_\nu}\right\} \frac{\omega}{2} |\langle \xi \rangle_r|^2 \end{aligned} \quad (3c)$$

$$Q_\kappa = -\kappa_E \nabla_{\parallel} T_m \quad (3d)$$

蓄冷器の冷凍能力は蓄冷器低温端での熱流束 Q の符号を反転したもの $-Q$ に流路断面積を乗じたものに等しい。

Q_κ は単純な熱伝導によるものであり、温度勾配 $\nabla_{\parallel} T_m$ に比例している。負号は Q_κ が温度の高いところから低い方へ向かう熱流束であることを示している。 κ_E は蓄冷材と流体とをまとめた有効熱伝導度である。 Q_κ は当然のことながら周波数を頭には含まない。残りの3項は流体の振動運動によるものである。

Q_{prog} は可逆過程による熱流束であり、蓄冷器で最

も重要な熱流束である。 $\text{Re}\{F_{sg}\}$ は、パルス管部では負になることもあるが、良い蓄冷器では正である。普通は熱膨張率 β が正なので Q_{prog} が負となり、 Q_{prog} と仕事流束とは向きが逆である。すなわち Q_{prog} は蓄冷器でのヒートポンピングを表す。蓄冷器では Q_{prog} が大きくなるように $\theta \approx \pi/2$ とするのが普通である。 Q_{prog} 以外の熱流束は全て不可逆過程によるものだから、理想的蓄冷器の冷凍能力は Q_{prog} だけで決まる。熱膨張率 β は理想気体近似では $1/T_m$ に等しい ($\beta T_m = 1$)。Fig. 1 から明らかなように、よく使われる平均圧力1~2 MPa のヘリウム4では、理想気体近似が成り立たないような低温では $1/T_m$ よりも小さくなり、4 K で βT_m の値が0.13~0.2程度となる。

Q_{stand} の向きは $\cos \theta$ の符号に依存するが $\theta \approx \pi/2$ では $\cos \theta \approx 0$ となり、 Q_{stand} の大きさは Q_{prog} に比べて小さい。蓄冷器では $\text{Im}\{F_{sg}\}$ が負なので、 θ を $\pi/2$ よりも大きくすると、 Q_{stand} も蓄冷器のヒートポンピング効果に寄与するが、同時に Q_{prog} が減少するので、良い蓄冷器では θ は $\pi/2$ 近くに限られる。

Q_D は、 $\text{Im}\{g_D\}$ が負なので、 Q_κ と同様に蓄冷器内の高温側から低温側へ流れる熱流束であって、普通はこれが良い蓄冷器の冷凍能力を下げる主要因となると考えられている。低温では、流体の単位体積あたりの定圧熱容量が大きいので、 Q_D が大きい。

熱流束に及ぼす粘性の寄与は2つの形で(3a),

Fig. 1 Temperature dependence of the thermal expansion β of ^4He (from Appendix 4 of Ref. 1)).

Fig. 2 Temperature dependence of the thermal diffusivity of ^4He (from Appendix 4 of Ref. 1)).

(3b), (3c)式に現れている。1つは F_{sg} と g_D とである。非粘性の極限では $F_s\chi_a$ に一致するが、粘性のために F_{sg} や g_D は $F_s\chi_a$ とは少し異なる。次は $\text{Re}\{1/(1-\chi_\nu)\}$ である。これは非粘性の極限では1に等しいが粘性を考慮すると1より大きくなる。

蓄冷器では流路が狭いので $\omega\tau_a \ll 1$ である。熱緩和時間 τ_a は熱拡散係数 α に反比例する。Fig. 2 に示した熱拡散係数の温度依存性から明らかなように、低温では熱拡散係数が小さいので τ_a が大きくなる。それでも普通は $\omega\tau_a \leq 1/10$ である。

流路が狭い ($\omega\tau_a \leq 1/10$) という蓄冷器の特徴を使って、(3a), (3b), (3c)式を書き換えよう。

まず $F_s \equiv 1/(1+\varepsilon\chi_a)$ は $F_s \equiv 1/(1+\varepsilon)$ となる。流路が狭いと $\chi_a \cong 1$ だからである (参考文献1)の7章参照)。 ε は蓄冷材の熱容量に対する作業流体の熱容量の比を表し、蓄冷材の熱容量が充分大きい場合には零に近いが、低温では磁性蓄冷材を使っても $1/2$ 程度である。つまり現実の蓄冷器では $2/3 \leq F_s \leq 1$ であろう。低温では磁性蓄冷材を使わないと F_s は $2/3$ より小さくなる。

F_{sg} や g_D についても流路が狭いという蓄冷器の特徴を使うと次の近似式が成り立つ (参考文献1)の7章と9章参照)。

$$\text{Re}\{F_{sg}\} = F_s \quad (4a)$$

Fig. 3 Temperature dependence of the Prandtl number of ^4He (from Appendix 4 of Ref. 1)).

$$\begin{aligned} \text{Im}\{F_{sg}\} &= \frac{F_s}{1+\sigma} \text{Re}\left\{\frac{1}{1-\chi_\nu}\right\} \text{Im}\{\chi_a\} \\ &= -F_s k_g \tau_a \omega \end{aligned} \quad (4b)$$

$$\text{Im}\{g_D\} \text{Re}\left\{\frac{1}{1-\chi_\nu}\right\} = -k_D \tau_a \omega \quad (4c)$$

(4a)式は $\omega\tau_a$ について1次までの近似だが、(4b)式と(4c)式とは $\omega\tau_a$ について2次までの近似である。(4b)式に現れている σ はプラントル数を表す。Fig. 3 から明らかなように、プラントル数は1程度である。 k_D の値は、一般的にはプラントル数や ε にも依存するが、プラントル数が1の場合には、 ε に依存しない。 k_g と k_D の値は Table 1 に示すように流路形状に依存する。実機のように積層金網やショットを詰めた蓄冷器でも0.5程度であろう。以下では k_g と k_D の値は実機でも流路形状のみに依存すると仮定する。

こういうわけで蓄冷器では、(3a), (3b), (3c)式は

$$Q_{prog} = -F_s \beta T_m I$$

Table 1 Examples of k_g and k_D for a regenerator.

	Parallel plate	Circular cylinder
k_g	$\frac{4}{5} \frac{1}{1+\sigma}$	$\frac{1}{3} \frac{1}{1+\sigma}$
k_D	$\frac{17}{30}$	$\frac{11}{24}$

σ stands for the Prandtl number.

$$= -F_s \beta T_m \frac{\omega}{2} |p| |\langle \xi \rangle_r| \sin \theta \quad (5a)$$

$$Q_{stand} = F_s \beta T_m k_D \tau_a \frac{\omega^2}{2} |p| |\langle \xi \rangle_r| \cos \theta \quad (5b)$$

$$Q_D = -\rho_m C_p \nabla_{\parallel} T_m k_D \tau_a \frac{\omega^2}{2} |\langle \xi \rangle_r|^2 \\ = -\beta T_m \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_s \nabla_{\parallel} T_m k_D \tau_a \frac{\omega^2}{2} |\langle \xi \rangle_r|^2 \quad (5c)$$

となる。(5c)式では熱力学の恒等式

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s = \frac{\beta T_m}{\rho_m C_p}$$

も使った。(5a), (5b), (5c)式によれば, Q_{prog} は角周波数 ω に比例しているが, Q_{stand} と Q_D とは, ω の2乗に比例している。周波数に依存しない熱流束は Q_k だけである。

3. 特性周波数

(5a), (5b), (5c)式によれば, Q_{prog} は角周波数 ω に比例しているが, Q_{stand} と Q_D とは, ω の2乗に比例しているので, 蓄冷器中の熱流束は形式的に角周波数 ω の2次式となる (Fig. 4 参照)。蓄冷器が冷凍機として動作するのは Fig. 4 で $Q < 0$ の領域である。冷凍能力が最大となる (つまり Q が最小となる) 角周波数を蓄冷器の特性周波数 ω_Q と呼ぶことにする。

特性周波数 ω_Q は周波数に比例する Q_{prog} や周波数の2乗に比例する $Q_{stand} + Q_D$ との間に次の関係がある:

$$\frac{1}{2\omega_Q} = -\frac{Q_{stand} + Q_D}{\omega Q_{prog}} \quad (6)$$

Fig. 4 Frequency dependence of heat flux Q in a regenerator.

特性周波数 ω_Q は, 蓄冷器が冷凍機として動作する限り, 正である。このことは熱力学第二法則の現れである。

蓄冷器中の熱流束はこの特性周波数を使って次のように書き替えることができる:

$$Q = Q_k + \left(1 - \frac{\omega}{2\omega_Q} \right) Q_{prog} \quad (7)$$

これは(2)式に(6)式を代入すると得られる。(7)式からただちに判るように, 周波数が零あるいは $\omega = 2\omega_Q$ では $Q = Q_k$ となる。特に Q_k が Q_{prog} に比べて充分小さければ, 蓄冷器が冷凍機として動作する ($Q < 0$) 周波数領域は

$$0 < \frac{\omega}{2\omega_Q} < 1 \quad (8)$$

となる。つまり, 蓄冷器が冷凍機として動作する周波数の上限は $2\omega_Q$ 以下である。

特性周波数 ω_Q は, より具体的には(6)式に(5a), (5b), (5c)式を代入して,

$$\frac{1}{2\omega_Q} = \left[\frac{k_g}{k_D} \cot \theta - \frac{1}{F_s} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_s \frac{|\langle \xi \rangle_r| \nabla_{\parallel} T_m}{|p| \sin \theta} \right] \\ \times k_D \tau_a \quad (6a)$$

となる。特に $\theta = \pi/2$ の場合, あるいは Q_{stand} の大きさが Q_D の大きさに比べて無視できるほど小さい場合には, (6a)式から,

$$\omega_Q = -\frac{F_s}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \frac{|p| \sin \theta}{|\langle \xi \rangle_r| \nabla_{\parallel} T_m} \frac{1}{k_D \tau_a} \quad (6b)$$

となる。良い G-M 冷凍機では $\theta \approx \pi/2$ なので(6b)式は(6a)式の良い近似である。以下ではこれを使って, 特性周波数 ω_Q の性質を議論する。

3.1 特性周波数の大きさ

4 K G-M 冷凍機の2段目蓄冷器の特性周波数 ω_Q の大きさを(6b)式を使って粗く評価してみよう。このために(6b)式を次のように書き換える。

$$\frac{\omega_Q}{\omega} = F_s \frac{\sin \theta}{2k_D} \frac{|p|}{p_m} \frac{-T_m}{|\langle \xi \rangle_r| \nabla_{\parallel} T_m} \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \\ \times \frac{p_m}{T_m} \frac{1}{\tau_a \omega} \quad (6c)$$

磁性蓄冷材を使った4 K G-M 冷凍機の2段目蓄冷器の F_s は既に述べたように高々2/3である。また Fig. 5 から判るようにヘリウム4では $(\partial T / \partial p)_s p_m / T_m$ は0.4以下である。特に4 Kでは0.14程度である。従って4 Kでは

$$F_s \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \frac{p_m}{T_m} \sim \frac{1}{10}$$

となる。さらに通常の 4 K G-M 冷凍機の 2 段階蓄冷器では

$$\frac{\sin \theta}{2k_D} \frac{|p|}{p_m} \frac{-T_m}{|\langle \xi \rangle_r| \nabla_{\parallel} T_m} \sim 1$$

である。従って (6c) 式は、4 K では、

$$\frac{\omega_Q}{\omega} \sim \frac{1}{10\tau_a\omega}$$

となる。 $\tau_a\omega$ も磁性蓄冷材を使った 4 K G-M 冷凍機の蓄冷器では 1/10 に近い。

こういうわけで通常の 4 K G-M 冷凍機の 2 段階蓄冷器では ω_Q は ω と同程度になる。

3.2 特性周波数の振幅依存性

特に $\theta = \pi/2$ の場合、あるいは Q_{stand} の大きさが Q_b の大きさに比べて無視できるほど小さい場合には、(6b) 式から、特性周波数 ω_Q は、圧力振幅 $|p|$ に比例し、変位振幅 $|\langle \xi \rangle_r|$ に反比例する。

3.3 特性周波数の平均圧力依存性

(6b) 式によれば特性周波数は $(\partial T/\partial p)_s/\tau_a$ に比例している。Fig. 6 には 2 つの平均圧力に対して $(\partial T/\partial p)_s$ の温度依存性が示されている。この図から $(\partial T/\partial p)_s$ は平均圧力が低い方が大きいことが明らかである。 τ_a は熱拡散係数に反比例するので特性周波数は熱拡散係数に比例する。Fig. 2 によれば、10 K 以下では熱拡散係数は圧力が低い方が小さい。しかし 4 K

では熱拡散係数の圧力依存性が小さい。

(6b) 式によれば特性周波数は F_s にも比例している。4 K では圧力が低いと作業流体の熱容量が少し大きくなるので F_s も小さくなるが、蓄冷材の熱容量が大きければ、 F_s の平均圧力依存性は小さい。

従って 4 K では平均圧力が低い方が特性周波数が高くなる。

3.4 特性周波数の温度依存性

(6b) 式によれば特性周波数 ω_Q は温度に依存する。熱緩和時間や $(\partial T/\partial p)_s$ が温度に大きく依存するので、 ω_Q の温度依存性はかなり大きい。

特性周波数 ω_Q が温度に依存するので、蓄冷器の熱流束は ω_Q を通して温度に依存する。 Q_k が Q_{prog} に比べて無視できるほど小さいと仮定すると $\omega = 2\omega_Q$ の解が最低到達温度 T_{min} を与える。言い換えると、最低到達温度では $2\omega_Q \approx \omega$ である。

蓄冷器の低温端温度があまり変化しないような狭い温度範囲では蓄冷器の温度勾配がほぼ一定なので、 ω_Q の温度依存性は主に熱緩和時間と $(\partial T/\partial p)_s$ の温度依存性で決まる。 $(\partial T/\partial p)_s$ の温度依存性は Fig. 6 に図示してある。以下では 4 K 以下と理想気体近似の成り立つ高温域とに分けて、 ω_Q の温度依存性を調べる。

理想気体近似の成り立つ高温では、熱拡散係数が温度の約 1.7 乗に比例し、 $(\partial T/\partial p)_s$ が温度に比例するので、 ω_Q は温度の約 2.7 乗に比例する。このことを

Fig. 5 Temperature dependence of the $(\partial T/\partial p)_s (p_m/T_m)$ of ^4He (from Appendix 4 of Ref. 4).

Fig. 6 Temperature dependence of the $(\partial T/\partial p)_s$ of ^4He .

式で書くと

$$\frac{\omega}{2\omega_q} \approx \left(\frac{T_{\min}}{T_m} \right)^{2.7} \quad (9a)$$

である。つまり、最低到達温度 $T_{\min}$ の1.3倍の所で $\omega/\omega_q = 1$ となる。例えば最低到達温度が50 K なら65 K で $\omega/\omega_q = 1$ となる。

4 K 以下では、熱拡散係数の温度依存性が小さいが、 $(\partial T/\partial p)_s$ は温度の約1.5乗に比例するので、 ω_q は温度の約1.5乗に比例する。このことを式で書くと

$$\frac{\omega}{2\omega_q} \approx \left(\frac{T_{\min}}{T_m} \right)^{1.5} \quad (9b)$$

である。つまり、最低到達温度の1.6倍の所で $\omega/\omega_q = 1$ となる。例えば最低到達温度が2.5 K なら4 K で $\omega/\omega_q = 1$ となる。

4. 蓄冷器の冷凍能力

蓄冷器の冷凍能力は蓄冷器低温端での熱流束 Q の符号を反転したものの $-Q$ に流路断面積を乗じたものに等しいことを思い出して欲しい。熱流束 Q は(7)式から明らかなように運転周波数と特性周波数とに依存する。

4.1 冷凍能力の ω_q 依存性

運転周波数が一定の場合の冷凍能力を議論する。この場合の冷凍能力は特性周波数 ω_q に依存する。(7)式から判るように、 ω_q が大きいほど冷凍能力が大きく、 ω_q が無限大なら、単位流路断面積あたりの冷凍能力は $-(Q_{prog} + Q_k)$ に等しい (Fig. 7 参照)。 ω_q が小さくなって $2\omega_q \approx \omega$ となると冷凍能力がなくなる。

$\theta = \pi/2$ の場合、あるいは Q_{stand} の大きさが Q_D の

Fig. 7 ω_q dependence of refrigeration power Q of a regenerator for constant ω .

大きさに比べて無視できるほど小さい場合には、(6b)式から判るように、 ω_q は圧力振幅に比例し、変位振幅と温度勾配とに反比例している。従って、 ω_q を大きくするには、圧力振幅を大きく、変位振幅を小さくすること、温度勾配を小さくするのがよい。4 K 付近では平均圧力を低くしても ω_q が増す。

4.2 最低到達温度付近での冷凍能力の温度依存性

(7)式を温度で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dT_m} &= \frac{dQ_k}{dT_m} + \left(1 - \frac{\omega}{2\omega_q} \right) \frac{dQ_{prog}}{dT_m} \\ &\quad + \frac{\omega Q_{prog}}{2\omega_q} \frac{d \log \omega_q}{dT_m} \end{aligned} \quad (10a)$$

だから、最低到達温度付近では

$$\begin{aligned} \left. \frac{dQ}{dT_m} \right|_{T_{\min}} &= \left. \frac{dQ_k}{dT_m} \right|_{T_{\min}} \\ &\quad + Q_{prog} \left. \frac{d \log \omega_q}{dT_m} \right|_{T_{\min}} \end{aligned} \quad (10b)$$

となる。

理想気体近似の成り立つ高温では(9a)式を使って

$$\left. \frac{dQ}{dT_m} \right|_{T_{\min}} \approx \left. \frac{dQ_k}{dT_m} \right|_{T_{\min}} + 2.7 \frac{Q_{prog}}{T_{\min}} \quad (11a)$$

4 K 以下では(9b)式を使って

$$\left. \frac{dQ}{dT_m} \right|_{T_{\min}} \approx \left. \frac{dQ_k}{dT_m} \right|_{T_{\min}} + \frac{3}{2} \frac{Q_{prog}}{T_{\min}} \quad (11b)$$

となる。従って、単純な熱伝導による熱流束 Q_k の温度依存性が小さければ、最低到達温度付近で冷凍能力の温度依存性を測定することにより、 Q_{prog} を推定することが可能である。

4.3 冷凍能力の周波数依存性

特性周波数 ω_q は顕には周波数を含まない。(6a)式や(6b)式によれば、圧力振幅、変位振幅、温度、温度勾配、位相差、平均圧力が周波数に依存しなければ特性周波数 ω_q は周波数に依らない。しかし蓄冷器の低温端で圧力振幅、変位振幅、温度、位相差を固定しても周波数を変えると蓄冷器低温端での温度勾配が変化する可能性がある。従って ω_q は運転周波数に依存するかもしれない。 Q_k についても同様である。

以下の議論は蓄冷器の低温端で ω_q と Q_k とが周波数に依らない場合にのみ意味がある。

ω_q は蓄冷器の冷凍能力が最大になる角周波数である。周波数が非常に低いと熱流束は殆ど Q_k だけとなり、冷凍能力がない。周波数が高くなると Q_{prog} による冷凍能力が Q_k を越えるので冷凍能力が有限となるが角周波数の2乗に比例する熱流束 $Q_{stand} + Q_D$ も増

す。角周波数が ω_q に等しい所で $Q_{stand} + Q_D$ の大きさが Q_{prog} の大きさの半分になる。さらに周波数が高くなると、冷凍能力が下がり、角周波数が $2\omega_q$ に等しいところで $Q_{stand} + Q_D$ と Q_{prog} とが相殺する。冷凍機の効率を問題とする場合には、特性周波数 ω_q よりも低い周波数で運転することが望ましい。

Q_k が Q_{prog} に比べて無視できるほど小さくても蓄冷器の冷凍能力が最大となる周波数では冷凍能力は Q_{prog} の大きさの半分に過ぎない。このことは内部抵抗を電源から最大の電力をとり出そうとして負荷抵抗を電源の内部抵抗に一致させると、電源の出力電力の半分が電源の内部抵抗で消費されてしまうことと似ている。磁性蓄冷材を使った 4 K G-M 冷凍機の 2 段目蓄冷器では、 $\epsilon=1/2$ と仮定すると $F_s=2/3$ となるので、(5a)式から

$$\frac{1}{2} Q_{prog} = -\frac{1}{3} \beta T_m I$$

となる。つまり磁性蓄冷材を使った 4 K G-M 冷凍機の最大冷凍能力は低温端で観測される PV 仕事と作業流体の物性値 β から想定される冷凍能力の 1/3 程度となる。

こういうわけで低温端の温度、圧力振幅、変位振幅、温度勾配、位相差などを一定に保ちながら冷凍能力の周波数依存性を測定すると冷凍能力は周波数の 2 次式で表されることが期待される。このような実験は G-M 冷凍機では可能である。G-M 冷凍機の膨脹空間や熱交換器でのエネルギー散逸による発熱が無視できれば、周波数に依存しない項から Q_k が、周波数に比例する項から Q_{prog} が評価できる。周波数の 2 乗に比例する項は $Q_{stand} + Q_D$ である。このようにして熱流束の内訳が判明すると蓄冷器の理解が深まるだろう。

5. 実験結果との比較

ここまでの議論の結果を佐藤ら²⁾や宇佐美ら³⁾による 4 K G-M 冷凍機の実験結果と比較してみよう。

蓄冷器の熱流束は形式的に運転周波数の 2 次式となり、運転周波数が特性周波数 ω_q に等しいところで蓄冷器の熱流束が最大となる。特に蓄冷器の低温端で ω_q と Q_k とが周波数に依らない場合には蓄冷器の冷凍能力も運転周波数の 2 次式となり、運転周波数が特性周波数に等しいところで蓄冷器の冷凍能力が最大となる。

実際に佐藤ら²⁾や宇佐美ら³⁾による 4 K G-M 冷凍機の実験では冷凍能力が最大となるような運転周波数が

観測されている。

この運転周波数を特性周波数とみなす。4 K G-M 冷凍機ではヘリウム 4 の物性値を考慮すると特性周波数の大きさが運転周波数と同程度だからである。また磁性蓄冷材を使った 4 K G-M 冷凍機の最大冷凍能力は低温端で観測される PV 仕事と作業流体の物性値 β から想定される冷凍能力の 1/3 程度となることが期待されるが、このことも宇佐美らの実験結果³⁾とほぼ一致しているからである。

冷凍能力が最大となるような運転周波数を特性周波数とみなすと、この運転周波数は変位振幅 $|\langle \xi \rangle_r|$ に反比例し、圧力振幅 $|p|$ と $(\partial T / \partial p)_s / \tau_a$ に比例することが期待される。4 K 付近では平均圧力が低い方が $(\partial T / \partial p)_s / \tau_a$ が大きい。

冷凍能力が最大となるような運転周波数が変位振幅に反比例することは既に佐藤ら²⁾により報告されている。冷凍能力が最大となるような運転周波数が圧力振幅 $|p|$ と $(\partial T / \partial p)_s / \tau_a$ に比例することはまだ報告されていないが、圧力振幅が大きく平均圧力が低いほど特性周波数が高くなることは宇佐美ら³⁾により報告されている。

このように、熱音響理論で得られた特性周波数を実験で得られた冷凍能力が最大となるような運転周波数に対応させると 4 K G-M 冷凍機の実験結果がよく理解できる。

6. ま と め

蓄冷器の冷凍能力を熱音響理論を使って議論し、次のことが判明した。

1) 蓄冷器の熱流束は周波数の 2 次式となり、蓄冷器の熱流束には特性周波数 ω_q というパラメーターがある。

2) 特性周波数 ω_q と Q_k とが運転周波数に依存しなければ、蓄冷器の冷凍能力は運転周波数の 2 次式となる。この場合には冷凍能力が最大となる運転周波数が特性周波数である。

2-1) 蓄冷器の冷凍能力が最大になる運転周波数では蓄冷器の冷凍能力は $-Q_{prog}$ の 1/2 以下である。磁性蓄冷材を使った 4 K G-M 冷凍機の 2 段目蓄冷器では $\epsilon=1/2$ と仮定すると最大冷凍能力は低温端で観測される PV 仕事と作業流体の物性値 β から想定される冷凍能力の 1/3 程度となる。

2-2) 特性周波数 ω_q は圧力振幅に比例し変位振幅に反比例する。

2-3) 特性周波数 ω_q は平均圧力にも依存し、4 K 付近では平均圧力が低い方が ω_q が大きい。

3) 特性周波数を実験で得られた冷凍能力が最大となる運転周波数に対応させると 4 K G-M 冷凍機の実験結果がよく理解できる。したがって 4 K G-M 冷凍機の蓄冷器の冷凍能力に対しても熱音響理論が役立つ。

4) 特性周波数 ω_q は温度に依存し、最低到達温度付近では $2\omega_q \approx \omega$ となる。 Q_c の温度依存性が無視できる場合には、最低到達温度付近で冷凍能力の温度依存性を測定すると Q_{prog} が推定できる。

5) 蓄冷器の冷凍能力の周波数依存性を測定し、その結果を運転周波数の 2 次式で整理すると、 Q_c と

Q_{prog} と $Q_{stand} + Q_D$ とに分離できる。

参 考 文 献

- 1) 富永 昭：熱音響工学の基礎，内田老鶴圃，東京（1998）
- 2) 佐藤敏美，大西 淳，浅見 宏，金沢克明，李瑞：ストローク最適化による 4 K-GM 冷凍機的最適化，1997 年度秋季低温工学・超電導学会講演概要集（1997）24
- 3) 宇佐美孝忠，岡村哲至，梶島成治，大谷安見，中込秀樹：4 K-GM 冷凍機の運転周波数特性，1998 年度秋季低温工学・超電導学会講演概要集（1998）224