スターリングエンジンの性能の周波数依存性

富 永 昭

筑波大学物理学系 茨城県つくば市天王台1-1-1

(2000年12月12日受理)

Frequency Dependence of the Performance of a Stirling Engine

Akira TOMINAGA

Institute of Physics, University of Tsukuba, Tennohdai, Tsukuba 305-0006

(Received December 12, 2000)

Synopsis: The operation frequency dependence of the performance of a Stirling engine was examined in a wide frequency range employing a simulation code, *THERMOACOUSTICA*, based on the thermoacoustic theory. Results of the simulation were roughly in accordance with expectations. For example, the results satisfies both the first and second laws of thermodynamics. The efficiency and the output work depend on the operation frequency. The frequency corresponding to the maximum output work is considerably higher than that corresponding to the maximum efficiency. The temperature distribution in the regenerator is also dependent on the operation frequency.

Keywords: Stirling engine, regenerator, thermoacoustics, temperature distribution

1. はじめに

G-M冷凍機やパルス管冷凍機の圧縮機として熱圧縮機が待望されている。VM機関やCY機関はスターリングエンジンとスターリング冷凍機を直結したものとみなせる¹⁾し、熱音響自励振動を使ってパルス管冷凍機を駆動する試みも行われている。

ロスアラモスでは、矢崎らによるループ管を用いた熱音響自励振動²⁾をさらに改良して、熱音響スターリングエンジンが試作された³⁾。また1999年秋の低温工学・超電導学会では熱音響工学の特別セッションが開催され、スターリングエンジンと蓄冷器型小型冷凍機とが議論された。

熱音響理論は熱音響自励振動と蓄冷器型小型冷凍機を理解するのに役立つ¹⁾、熱音響スターリングエンジンも熱音響理論に基づき設計解析された³⁾。しかし、スターリングエンジンを熱音響理論を使って議論することはあまり行われていない。通常のスターリングエンジンの議論は伝統的立場^{4,5)}が主である。

本論文では、熱音響理論に基づくシミュレーションコード*THERMOACOUSTICA*を使って、幅広い運転周波数領域でスターリングエンジンの性能を調べ、その結果を熱音響理論¹⁾を使って議論する。

この論文は第6回日中セミナーで発表した論文⁶⁾の誤りを修正し補筆したものであり、スターリング冷凍機の性能の周波数依存性に関する論文⁷⁾と一対になっている。

2. 熱力学の要請

熱力学の第一法則と第二法則とは熱力学の基本法則である。移動量に対してこの二つの法則から得られることを整理しておこう。

スターリングエンジンでは、低温部(温度 T_C)の圧縮機が圧縮仕事 I_{comp} を行い、高温部(温度 T_H)の膨張機が膨張仕事 I_{exp} を受け取る。スターリングエンジンの出力仕事は

$$I_{output} = I_{exp} - I_{comp} \quad (1)$$

Fig. 1 Energy flows in a Stirling engine.

である。スターリングエンジンを動作させるために、スターリングエンジンの蓄熱器は高温端から q_H だけの熱を吸収し、低温端から q_C だけの熱を放出する(Fig. 1)。

熱や仕事の授受は、それぞれ、熱流と仕事流であり、熱流と仕事流とは異なる形態のエネルギー流である。しかし、熱力学第一法則の範囲内では、これらの区別をしない。熱力学第一法則では、エネルギー流という共通点にのみ着目するからである。

エネルギー流という共通点に着目すると、熱力学第一法則により、

$$q_H = I_{\text{output}} + q_C \quad (2)$$

となる。左辺はスターリングエンジンに流入するエネルギー流であり、右辺はこのエンジンから流出するエネルギー流である。同様に、蓄熱器と熱交換器とを併せた系に熱力学第一法則を適用すると

$$I_{\text{comp}} + q_H = I_{\text{exp}} + q_C \quad (3)$$

となる。従って、このエンジンの効率 $\eta = I_{\text{output}}/q_H$ は

$$\eta = \frac{q_H - q_C}{q_H} = 1 - \frac{q_C}{q_H} \quad (4)$$

となる。

次に、蓄熱器中のエネルギー流 H を考える。これはエンタルピー流に他ならない。蓄熱器の側壁は外界から遮断されているので、熱力学第一法則により、蓄熱器中のエネルギー流は一樣である。

このエンジンの高温端と低温端とに熱力学第一法則を適用すると、

$$\begin{cases} q_C = I_{\text{comp}} + H \\ q_H = I_{\text{exp}} + H \end{cases} \quad (5)$$

となる。逆に(5)から(2)と(3)が得られる。(5)は、圧

縮仕事 I_{comp} 、膨張仕事 I_{exp} 、放熱量 q_C を測定することにより、エンタルピー流 H や吸熱量 q_H を評価する際に使われる。

(5)を(4)に代入すると

$$\eta = \frac{I_{\text{exp}} - I_{\text{comp}}}{I_{\text{exp}} + H} = \frac{\frac{I_{\text{exp}}}{I_{\text{comp}}} - 1}{\frac{I_{\text{exp}}}{I_{\text{comp}}} + \frac{H}{I_{\text{comp}}}} \quad (6)$$

となる。効率を高くするには、 H/I_{comp} が小さく、仕事流の増幅率 $I_{\text{exp}}/I_{\text{comp}}$ が大きいたことが望ましい。

熱力学第二法則により、効率はカルノー効率を超えることがない：

$$\eta \leq \eta_{\text{Carnot}} = 1 - T_C/T_H \quad (7)$$

エンジンの効率(4)を書き換えると

$$\eta = 1 - \frac{s_C}{s_H} \frac{T_C}{T_H} \quad (8)$$

となる。ここで $s_H = q_H/T_H$ と $s_C = q_C/T_C$ は熱流に対応するエントロピー流である。従って、(7)と(8)とは

$$\frac{s_C}{s_H} = (1 - \eta) \frac{T_H}{T_C} \geq 1 \quad (9)$$

を意味する。エンジンの低温部から流出するエントロピー流 s_C はエンジンの高温部から流入するエントロピー流 s_H よりも大きい。エンジンのエントロピー流の増幅率

$$EAC = \frac{s_C}{s_H} = (1 - \eta) \frac{T_H}{T_C}$$

は、原動機として動作している限り、1以上である。

また、原動機のEACの上限は T_H/T_C である。原動機の効率 η の下限は0だからである。

3. 熱音響理論によるシミュレーション

3.1 構造と運転条件

熱音響理論に基づくシミュレーションコード THERMOACOUSTICA を使って α 型のスターリング機関の性能を調べた。作業流体はヘリウムであり、理想気体の状態方程式に従うものとした。教科書¹⁾の第13章と同じ形状を使う。運転条件は教科書の第13章とは少し異なる。

α 型のスターリング機関には二つのピストンがあり、原動機として使う場合には、高温側が膨張ピストン、低温側が圧縮ピストンと呼ばれている。この

エンジンの効率を大きくするには、蓄熱器の中で変位の進行波成分と定在波成分とが異符号であることが望ましい。こういう訳で、低温熱交換器の圧縮ピストン側で変位の定在波成分を零にした。

この運転条件のもとで運転周波数を幅広く変えて、スターリング原動機の運転周波数依存性を調べた。低温熱交換器のピストン側で変位の定在波成分を零にしたので、このエンジンの圧縮仕事は運転周波数に比例する。

なおこのシミュレーションでは原動機の成績係数に圧縮機と膨張機の力学的損失が考慮されていないことに注意して欲しい。

3.2 シミュレーション結果

シミュレーション結果の一部分をFig. 2に示す。圧縮仕事 I_{comp} はシミュレーション条件に対応して、運

Fig. 2 Frequency dependence of the work flow, the heat flow and the enthalpy flow.

転周波数に比例している。膨張仕事 I_{exp} は上に凸になり約260Hzで圧縮仕事 I_{comp} に一致する。吸熱量 q_H は約260Hzで放熱量 q_C に一致する。出力仕事 I_{output} は約120Hzで最大となり、約260Hz以上では負である。つまり原動機として動作する運転周波数には上限があり、上限は約260Hzである。膨張仕事 I_{exp} と出力仕事 I_{output} とは約10Hz以下では運転周波数に比例しているが放熱量 q_C と吸熱量 q_H とは約10Hz以下でも運転周波数に比例しない。エンタルピー流 H は数Hz以下では運転周波数によらずほとんど一定であるが、10Hz以上では運転周波数の増大とともに増す。エンタルピー流 H には50Hz以下では運転周波数の2乗に比例する項があることが判る。100Hz以上でのエンタルピー流 H の形から判断すると、エンタルピー流 H に運転周波数の3乗に比例する項があるならその項は負である。

シミュレーション結果は熱力学第一法則を満足している。熱流、仕事流、エンタルピー流を圧縮仕事 I_{comp} で規格化してFig. 3に示す。この図から直ちに

$$\frac{I_{exp}}{I_{comp}} = \frac{I_{output}}{I_{comp}} + 1 \quad (10)$$

$$\begin{cases} \frac{q_C}{I_{comp}} = \frac{H}{I_{comp}} + 1 \\ \frac{q_H}{I_{comp}} = \frac{I_{exp}}{I_{comp}} + \frac{H}{I_{comp}} \end{cases} \quad (11)$$

が判る。これらはまさに熱力学第一法則そのもので

Fig. 3 The work flow, the heat flows and the enthalpy flow normalized by the compression work.

Fig. 4 The efficiency and the EAC.

あり、それぞれ、(1), (5)に対応している。

また、Fig. 3から判るように、 H/I_{comp} は正で20 Hz程度で最小になる。

I_{exp}/I_{comp} は、理想的なスターリングエンジンでは $T_H/T_C=3$ に等しいが、シミュレーション結果は3よりも小さい。つまり、 I_{output}/I_{comp} は、理想的なスターリングエンジンでは2になるが、シミュレーション結果は2よりも小さい。

シミュレーションによる効率とエントロピー流の増幅率EACの周波数依存性をFig. 4に示す。効率は上に凸で約10 Hzで最大になり、約260 Hz以上で負になる。EACは下に凸で約10 Hzで最小になり、約260 Hzで原動機として動作する最大値 $T_H/T_C=3$ になる。

10 Hz以下での効率の減少は H/I_{comp} の増大と関わりがあり、10 Hz以上での効率の減少は I_{output}/I_{comp} と関わりがあるだろう。

シミュレーション結果は熱力学第二法則を満足している。このシミュレーションでは $T_H=900\text{ K}$ 、 $T_C=300\text{ K}$ なので $\eta_{Carnot}=2/3$ である。従って効率はカルノー効率以下である。また、EACは1以上である。効率が零となる運転周波数ではEACが $T_H/T_C=3$ に等しいことも読みとれる。

以上のようにシミュレーション結果はおおむね期待どおりである。出力仕事が増大となる運転周波数と効率が最大となる運転周波数とが存在し、両者が異なることは実験で周知の事実⁵⁾である。

3.3 シミュレーション結果の解析

エネルギー流と出力仕事の周波数依存性を詳細に検討するために、これらが運転周波数で級数展開できると仮定し、最小二乗法を使って展開係数を求め

た。展開係数の値は何次までの展開を使うかに依存したが、運転周波数の5次式を採用しても、4次までの係数の値が4次式を使って得た結果と区別できなくなった。つまり、次の5次式に現れる展開係数のうちで4次までの展開係数は意味がある。

$$H = a_0 + a_1 f + a_2 f^2 + a_3 f^3 + a_4 f^4 + a_5 f^5$$

$$I_{output} = b_1 f + b_2 f^2 + b_3 f^3 + b_4 f^4 + b_5 f^5$$

展開係数の符号は a_0 と a_2 と a_4 は正だが、 a_1 と a_3 は負だった。また b_1 と b_4 とは正だが、 b_2 と b_3 は負だった。

4. 討 論

ここではシミュレーション結果の解析を熱音響理論を使って議論する。熱音響理論に現れる $\omega \tau_\alpha$ が大きいと運転周波数について3次以上の項が必ずしも無視できない。実際このシミュレーションでは蓄熱器低温端での $\omega \tau_\alpha$ の値は、10 Hzでは 6×10^{-3} 、100 Hzでは 6×10^{-2} であるが、200 Hzでは0.1程度にも達している。このために運転周波数について高次の項があらわれる。

4.1 エネルギー流の運転周波数依存性

エネルギー流 H は、熱音響理論によれば、流路断面積に $I + Q_{prog} + Q_{stand} + Q_D + Q_\kappa$ を乗じたものに等しい。 Q_D と Q_κ は温度勾配に比例するが、その他は温度勾配に依存しない。蓄冷器の Q_{stand} は周波数のほぼ2乗に比例する。周波数が高くなると周波数の4乗に比例する項も無視できない。蓄冷器の $I + Q_{prog}$ はほぼ零に等しいが、周波数が高くなると周波数の3乗に比例する項が無視できなくなる。更に周波数が高くなると周波数の5乗に比例する項もあらわれる。いずれにしても、温度勾配が運転周波数に依存しなければ、エネルギー流には周波数の1乗に比例する項は無い。

簡単のために、温度勾配が運転周波数に依存しない場合を考えよう。 Q_κ は周波数に依らない。 Q_D は周波数のほぼ2乗に比例するが、広い周波数範囲では4乗に比例する項も無視できない。したがって、エネルギー流 H は運転周波数のほぼ2次式であり、運転周波数が高いところも含めると、運転周波数の5次式となる。0次の項は Q_κ を表すので、 $a_0 > 0$ である。運転周波数について2次と4次の項からなる $a_2 f^2 + a_4 f^4$ は $Q_{stand} + Q_D$ を表し、 $a_2 > 0$ 、 $a_4 < 0$ である。運転周波数について3次の項は $Q_{prog} - I$ を表すので $a_3 < 0$ で

ある。温度勾配が運転周波数に依存しないとしたので、 $a_1 = 0$ である。運転周波数について2次以上の項は、このように明確な意味を持ち、再熱損失と呼ばれている。

a_0, a_2, a_3 の符号はシミュレーション結果の解析結果と一致するが、 $a_1 = 0$ と $a_4 < 0$ とはシミュレーション結果の解析とあわない。このことは蓄熱器の温度分布が運転周波数に依存することを示唆している。 Q_K と Q_D とは温度勾配に比例するので、温度勾配が運転周波数に依存するなら Q_K に由来する a_1 が有限となり、 a_4 の一部分は Q_D に由来するからである。 $a_1 < 0$ は蓄熱器の低温端での温度勾配が運転周波数の減少関数であることを示唆する。

4.2 出力仕事の運転周波数依存性

出力仕事 I_{output} の運転周波数依存性を議論しよう。熱音響理論によれば、出力仕事 I_{output} は仕事源

$$W = W_{prog} + W_{stand} + W_v + W_p$$

を蓄熱器内部で積分した量である。 $W_v + W_p$ は常に負であり、温度勾配に依らない。蓄熱器では $W_v + W_p$ はほぼ運転周波数の2乗に比例するが、運転周波数が高いと運転周波数の4乗に比例する項も無視できない：

$$W_v + W_p = (1 + d_4 f^2) d_2 f^2$$

$d_2 < 0$ だが d_4 の符号は一般的には定まらない。しかし、普通は粘性散逸が大きいので d_4 は正である。

蓄熱器で最も重要なのは W_{prog} であり、温度勾配に比例する。 W_{prog} は原動機の蓄熱器では正である。 W_{prog} は、温度分布が運転周波数に依らなければ、運転周波数にほぼ比例し、運転周波数が高いと運転周波数の3乗に比例する項も無視できない：

$$W_{prog} = (1 + c_3 f^2) c_1 f$$

c_3 は負である。 c_1 は原動機なので正である。 c_1 が温度勾配に比例するので、温度勾配が運転周波数に依存するなら、 W_{prog} は運転周波数について4次以上の項も含まれる。 W_{stand} も温度勾配に比例する。このシミュレーション条件では W_{stand} は、蓄熱器では正である。 W_{stand} は温度分布が運転周波数に依らなければほぼ運転周波数の2乗に比例するが、運転周波数が高いと運転周波数の4乗に比例する項も無視できない。

$$W_{stand} = (1 + c_4 f^2) c_2 f^2$$

c_4 は負である。 c_2 はこのシミュレーション条件では正となる。 c_2 が温度勾配に比例するので、温度勾配が運転周波数に依存するなら、 W_{stand} は運転周波数について5次以上の項も含まれる可能性がある。

したがって仕事源 W は、温度分布が運転周波数に依らなければ、運転周波数のほぼ2次式であり、広い周波数範囲では4次式

$$W = c_1 f + (c_2 + d_2) f^2 + c_3 c_1 f^3 + (c_4 c_2 + d_4 d_2) f^4$$

で表せるだろう。

運転周波数について1次の項の係数 c_1 は正である。2次の項の係数 $c_2 + d_2$ は負である。3次の項の係数 $c_3 c_1$ も負である。温度勾配の運転周波数依存性を無視すると4次の項の係数は $c_4 c_2 + d_4 d_2$ だけであって負である。したがって、 W は、温度勾配の運転周波数依存性を無視すると、運転周波数について1次の項の係数だけが正であり2次以上の項の係数は全て負である。

出力仕事 I_{output} は、仕事源 W の積分に等しいので、やはり運転周波数のほぼ2次式であり、広い周波数範囲では4次式となる。温度勾配の運転周波数依存性を考慮すると、より高次の式となるが0次の項はない。

b_1 は c_1 に対応するので正である。 b_2 は $c_2 + d_2$ に対応するので負である。 b_3 は $c_3 c_1$ に対応するので負である。 b_4 は $c_4 c_2 + d_4 d_2$ に対応するので負である。つまり、 b_1 は正だが、 b_2, b_3, b_4 は負である。

蓄熱器の温度分布が運転周波数に依存しないと仮定すると、 b_1, b_2, b_3 の符号はシミュレーションの解析結果と一致するが、 b_4 の符号はシミュレーション結果の解析と合わない。このことも蓄熱器の温度分布が運転周波数に依存することを示唆している。 c_1 が温度勾配に比例するので、温度勾配が運転周波数の増加関数なら $b_4 > 0$ となる可能性があるからである。

蓄熱器で変位振幅が大きくなるのは温度が高いところなので、 $W_{prog} + W_{stand} + W_v + W_p$ の積分には温度の高いところでの寄与が大きい。従って、蓄熱器の高温端での温度勾配が運転周波数の増加関数となっていると予想される。

4.3 蓄熱器の温度分布

シミュレーションでは蓄熱器内の温度分布も判るので、蓄熱器の低温端と高温端での温度勾配を抽出し、その周波数依存性をFig. 5に示す。

Fig. 5 Frequency dependence of temperature gradient at both ends of the regenerator.

温度勾配には明白な運転周波数依存性がある。蓄熱器高温端での温度勾配が最小となり、低温端での温度勾配が最大となるのは、運転周波数が数Hz程度であって、エンタルピー流の周波数依存性が小さい領域と一致する。効率が最大となる10Hz程度以上では蓄熱器低温端での温度勾配は運転周波数の減少関数であり、蓄熱器高温端での温度勾配は運転周波数の増加関数である。蓄熱器低温端での温度勾配が10 Hz以上で減少することが $a_1 > 0$ に現れている。蓄熱器高温端での温度勾配が10 Hz以上で増加することが $b_4 > 0$ に現れている。

このように、蓄熱器の温度分布の運転周波数依存性を考慮することにより、シミュレーション結果が理解できる。

約20 Hzで低温端での温度勾配と高温端での温度勾配との大小関係が逆転している。約20 Hz以下では低温端の方が高温端よりも温度勾配が大きいが、20 Hz以上では低温端のほうが高温端よりも温度勾配が小さい。このことは、蓄熱器中での温度分布が、20 Hz以下では上に凸だが、20 Hz以上では下に凸であり、20 Hz程度で直線的になる、ことを示している。

実用に供される運転周波数領域は効率が最大となる周波数以上だから、「蓄熱器の温度分布は、運転周波数が低ければ直線的で、運転周波数の上昇につれて下に凸になる」と見なすのが实际的だろう。スターリング冷凍機に対する同様の見解⁷⁾もある。

5. おわりに

熱音響理論に基づくシミュレーションコード

THERMOACOUSTICAを使って、スターリングエンジンの性能の周波数依存性を調べた。その結果は熱力学の第一法則と第二法則とを満足している。詳細に検討すると、蓄熱器の温度分布の周波数依存性を考慮する必要がある。蓄熱器の温度分布を決めるのは不可逆過程なので、蓄熱器の温度分布を予想することは難しい。不可逆過程をきちんと取り込んだ数値計算で始めて可能になる。また実験による再熱損失の評価では運転周波数に依存する蓄熱器の温度分布の正確な評価が大切だろう。

効率が最大になる運転周波数と出力仕事最大になる運転周波数とはかなり異なった。このことはスターリングエンジン開発における最適条件の選択にとって大きな課題となる。現実的な最適条件は、特殊な用途を別にすると、効率最大と出力仕事最大との間であろう。例えば、効率が最大となる運転周波数と出力仕事最大となる運転周波数との相乗平均を最適運転周波数に選ぶと、このシミュレーションでは、最適運転周波数は約33 Hzとなり、冷凍能力は最大出力仕事の約50%となるが、効率は最大効率の約95%となる。また、出力仕事最大となる運転周波数の半分を最適運転周波数に選ぶと、このシミュレーションでは、最適運転周波数は約55 Hzとなり、出力仕事は最大出力仕事の80%程度となるが、効率は最大効率の約90%となる。

通常のスターリングエンジンでは、変位振幅がほぼ一定に保たれているので、出力変化に応じて運転周波数が変化するが、熱音響スターリングエンジン³⁾では運転周波数はほぼ一定なので、出力変化に応じて変位振幅が変化する。いずれの場合にも流速振幅が出力変化に応じて変化するので音響インピーダンスの最適化に着目する必要がある。

参考文献

- 1) 富永 昭：熱音響工学の基礎，内田老鶴圃 (1998)
- 2) T. Yazaki, A. Iwata, T. Maekawa and A. Tominaga : Phys. Rev. Lett **81** (1998) 3128
- 3) S. Backhaus and G. W. Swift : Nature **399** (1999) 335
- 4) I. Urieli and D. H. Berchowitz : Stirling Cycle Engine Analysis, Adam Hilger (1983)
- 5) 山下 巖，濱口和洋，香川 澄，平田宏一，百瀬 豊：スターリングエンジンの理論と設計，山海堂(1999)
- 6) A.Tominaga : Proc. of JSJS6 (Lanzhou, 2000) 83
- 7) 富永 昭：低温工学 **35** (2000)184