研究論文

重み関数モデルを用いた特性曲線法の気体管路内微小振幅波の計算誤差*

中尾 光博**, 香川 利春***

Numerical Error in Method of Characteristics with Weighting Function-Based Model for Small Amplitude Wave in Gas Pipeline

Mitsuhiro NAKAO, Toshiharu KAGAWA

The method of characteristics is suitable to calculate small amplitude wave in gas pipeline. The method is superior in a case that the boundary conditions have many frequency components, while requires a computation of unsteady friction terms. The unsteady friction terms include convolution integral of which calculation is time-consuming. Reduction of the computation load with maintenance of its accuracy, which is essential for a practical computation, requires a weighting function-based (WFB) approximation which approximates the weighting functions by sums of exponential terms, and of convolution integrals. However, even the WFB model contains approximation errors which sometimes cause computation error. The approximation errors in liquid pipeline have been evaluated in Fourier domain. However, the errors in gas pipeline have not been evaluated. In this paper, we present a discussion and quantification of the numerical errors that occur when using the method for the simulation of small amplitude wave in gas pipeline. Comparisons of numerical error caused by approximations are made in the Fourier domain where exact solutions can be determined.

Key words : Unsteady friction, Weighting function, Gas pipeline, Small amplitude wave, Error analysis

1. 緒 言

気体管路では、しばしば微小振幅波が発生する。Brown¹⁾は十分長く真直で断面形状が一定である円管において妥当な1次元支配方程式を示し、過渡応答解析のためのラプラス領域のモデルを示した。Katz²⁾や吉岡ら³⁾は、そのラプラス領域のモデルの逆変換により過渡応答を計算した。周波数特性に基づく過渡応答計算法は特性曲線法と比較して複雑な境界条件の扱いが困難である。一方、特性曲線法を用いた解析のためには、非定常層流圧力損失の計算が必要である。

液体管路においてはZielke⁴⁾がラプラス領域で求めた非定常層流圧力損失を時間領域の値へと逆変換する方法を示した。しかし時間領域の解は畳み込み積分を含む形であるため、時間の経過とともに計算時間が増大し、短時間の計算にしか適用できないという欠点があった。Tripathi⁵⁾は重み関数を3つの指数関数の和で近似することで計算負荷を低減する方法を示した。しかし、関数の近似精度が十分でな

かったために計算精度が悪く、その決定方法も示されていないという問題があった。香川ら⁶⁾は重み関数の近似級数の決定法を示し、計算対象の無次元時間に応じて項数を増やすことで、計算精度をほとんど低下させることなく計算負荷を低減した。鈴木ら⁷⁾はZielkeの方法を効率化し、無次元時間によって香川らの方法と切り替える方法を提案した。Schohl⁸⁾は費用関数の最小化による近似級数の決定を試行し、5つの指数関数の和で重み関数を近似した。Vardyら⁹⁾は簡易な級数決定法として代数的な方法を示した。Vítkovskýら¹⁰⁾は香川らの方法にSchohl⁸⁾の方法を適用することで同じ項数でも高精度化できることを示した。さらにVítkovskýら¹¹⁾は重み関数モデルを用いた液体管路における過渡応答計算の誤差要因について総括し、評価基準として重み関数の近似誤差、畳み込み積分の近似誤差、格子分離誤差の3つを挙げている。

一方気体管路においては、北川ら¹²⁾がBrown¹⁾の解析解に香川らの高速高精度計算法⁶⁾を適用し、特性曲線法を用いて計算した。しかし、上述の液体管路においてなされたような誤差要因の解析例はない。本論文では、十分長く真直で断面形状が一定である円形気体管路における気体微小振幅波の計算誤差について、重み関数の近似誤差、畳み込み積分の近似誤差、格子分離誤差の観点から評価する。

2. 主な記号

c : 音速

*平成26年12月25日 原稿受付

**鹿児島大学 大学院理工学研究科機械工学専攻
(所在地：鹿児島県鹿児島市郡元1-21-40)
(E-mail: nakao@mech.kagoshima-u.ac.jp)***東京工業大学 精密工学研究所
(所在地：神奈川県横浜市緑区長津田町4259)

D	: 管路の内径
D_n	: 無次元直径 ($L/(cT)$)
E	: 重み関数近似の残差
E_{Cf}, E_{Cg}	: 畳み込み積分の近似誤差
E_{Gf}, E_{Gg}	: 格子分離誤差
$f(t), g(t)$	: 非定常層流圧力損失項
i	: 虚数単位
k_f, k_g	: 近似項数
M	: 残差計算のデータ点数
m_f, m_g	: 重み関数の係数
n_f, n_g	: 重み関数の係数
p	: 圧力
Pr	: プラントル数
t	: 時間
T_f	: 時間無次元化パラメータ ($\rho D^2/(4\mu)$)
T_g	: 時間無次元化パラメータ ($Pr\rho D^2/(4\mu)$)
u	: 管路断面平均流速
$W_f(t), W_g(t)$	: 重み関数
$w_f(\tau_f), w_g(\tau_g)$	: 重み関数の無次元時間表記
x	: 管路軸方向座標
κ	: 比熱比
Δt	: 時間刻み
Δx	: 格子刻み
ν	: 動粘性係数
ρ	: 密度
τ_f	: 無次元時間 (t/T_f)
τ_g	: 無次元時間 (t/T_g)
ω	: 角周波数
ω_{grid}	: 格子の角周波数 ($2\pi/\Delta t$)

添字

— : 平衡点における値

 app : 近似値

3. 計算方法

3.1 支配方程式

真直で断面形状が一定である円管において流れが軸対称であり、管路壁面が剛体かつ等温であると仮定すると、気体の微小振幅波は次の運動方程式とエネルギー方程式で記述できる^{1), 12)}。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{32\bar{\nu}}{D^2} \left\{ u + \frac{1}{2} f(t) \right\} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \bar{\rho} c^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{16(\kappa-1)\bar{\nu}}{Pr D^2} g(t) = 0 \quad (2)$$

ただし、 $f(t)$ と $g(t)$ は非定常層流圧力損失に対応した項であり、それぞれ以下の式で表わされる。

$$f(t) = \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(z) W_f(t-z) dz \quad (3)$$

$$g(t) = \int_0^t \frac{\partial p}{\partial t}(z) W_g(t-z) dz \quad (4)$$

$W_f(t), W_g(t)$ は重み関数であり、それぞれ無次元時間 τ_f, τ_g を用いて以下の式で表わされる⁶⁾。

$$\begin{aligned} & \text{if } \tau_f > 0.02 \\ & w_f(\tau_f) = e^{-26.3744\tau_f} + e^{-70.8493\tau_f} + e^{-135.0198\tau_f} \\ & \quad + e^{-218.9216\tau_f} + e^{-322.5544\tau_f} \\ & \text{else} \\ & w_f(\tau_f) = 0.282095\tau_f^{-1/2} - 1.250000 \\ & \quad + 1.057855\tau_f^{1/2} + 0.937500\tau_f \\ & \quad + 0.396696\tau_f^{3/2} - 0.351563\tau_f^2 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \text{if } \tau_g > 0.03 \\ & w_g(\tau_g) = e^{-5.78321\tau_g} + e^{-30.4713\tau_g} + e^{-74.8870\tau_g} \\ & \quad + e^{-139.040\tau_g} + e^{-222.932\tau_g} + e^{-326.563\tau_g} + e^{-449.934\tau_g} \\ & \text{else} \\ & w_g(\tau_g) = 0.282095\tau_g^{-1/2} - 0.250000 - \\ & \quad 0.0705237\tau_g^{1/2} - 0.0625000\tau_g - \\ & \quad 0.0734622\tau_g^{3/2} - 0.101563\tau_g^2 \end{aligned} \quad (6)$$

3.2 重み関数モデルにおける畳み込み積分の近似法

重み関数モデルは式(5), (6)の重み関数を式(7), (8)のように近似することで計算負荷の低減を図るモデルである。

$$w_f(\tau_f) \approx w_f(\tau_f)_{app} = \sum_{j=1}^{k_f} m_{f,j} e^{-n_{f,j}\tau_f} \quad (7)$$

$$w_g(\tau_g) \approx w_g(\tau_g)_{app} = \sum_{j=1}^{k_g} m_{g,j} e^{-n_{g,j}\tau_g} \quad (8)$$

Trikha⁵⁾はこの近似を用いることで式(3)の畳み込み積分が式(9)のように近似できることを示した。

$$f(t)_{app} = \sum_{j=1}^N y_{f,j}(t) \quad (9)$$

ただし、 $y_{f,j}$ は式(10)で定義される。

$$y_{f,j}(t+\Delta t) = e^{-n_{f,j}\Delta\tau_f} y_{f,j}(t) + m_{f,j} \{u(t+\Delta t) - u(t)\} \quad (10)$$

Trikhaの方法は計算時間の低減には成功したが、計算精度が低いことが指摘されている。

香川ら⁶⁾は重み関数の高精度な近似方法を示し、さらに畳み込み積分の近似として、式(10)の代わりに式(11)の近似を用いている。

$$y_f(t+\Delta t) = e^{-n_f\Delta\tau_f} y_f(t) + m_f e^{-n_f(\Delta\tau_f/2)} \{u(t+\Delta t) - u(t)\} \quad (11)$$

北川ら¹²⁾は、香川らの方法を式(4)に適用し、式(12), (13)を得ている。

$$g(t)_{app} = \sum_{g=1}^N y_g(t) \quad (12)$$

$$y_g(t+\Delta t) = e^{-n_g\Delta\tau_g} y_g(t) + m_g e^{-n_g(\Delta\tau_g/2)} \{p(t+\Delta t) - p(t)\} \quad (13)$$

Schohl⁸⁾は最適化アルゴリズムを用いた重み関数の近似方法を示し、さらに畳み込み積分の中の加速度項が時間ステップの間で一定であると仮定して積分することで、式(14)

を導出している.

$$y_f(t+\Delta t) = e^{-n_f \Delta t} y_f(t) + \frac{m_f(1 - e^{-n_f \Delta t})}{n_f \Delta t} \{u(t+\Delta t) - u(t)\} \quad (14)$$

3.3 計算の誤差要因

Vítkovský¹¹⁾は、液体管路過渡応答解析における重み関数モデルの誤差要因は重み関数の近似、畳み込み積分の近似、格子分離の3つであると指摘し、実際にそれらの誤差を評価している. しかし気体管路における検討例はない. 以下の章では気体管路における3つの誤差を評価する.

4. 重み関数の近似誤差

4.1 近似重み関数の決定法

重み関数モデルを用いて実用的な計算を行うには、式(7)、(8)の形で重み関数を近似する必要がある. 提案者であるTrihka⁵⁾は具体的な決定方法を示しておらず、香川⁶⁾は重み関数の近似級数の決定法を初めて示した. しかし、定量的な方法ではなく、最適値ではないことが示されている¹⁰⁾. Schohl⁸⁾は目的関数を最小化する最適化アルゴリズムで未知係数を決定した. Vítkovský¹⁰⁾はさらに良好な近似を得たい無次元時間の範囲でSchohl⁸⁾の方法を試行している. Vardy⁹⁾は簡易な代数的な重み関数の決定法を示しているが、

近似精度が低いことが知られており、本論文では扱わない.

本論文では、Vítkovský¹¹⁾と同様に、式(15)で表わされる目的関数を最小化する最適化アルゴリズムにより未知係数を求め、その近似精度を評価する.

$$E = \sum_{j=1}^M \left[\frac{w(\tau_j) - w_{f,app}(\tau_j)}{w(\tau_j)} \right]^2 \quad (15)$$

ここで M は無次元時間領域の分割数で、分割は $\log(\tau)$ 上で均等であり、近似項数の10倍とした. 本研究では、最適化アルゴリズムにWolfram Research社のMathematicaに搭載されているFindMinimum関数を用いた.

4.2 重み関数の近似誤差評価

重み関数 $w_f(\tau_f)$ は10項の指数関数で近似した. Fig. 1に示すのは香川らの近似、香川らと同程度の誤差での近似(Wide range)、香川らと同程度の適用範囲での近似(Accurate)の真値に対する相対誤差である. Schohlの方法では、香川らの近似と同程度の近似誤差では適用可能な無次元時間の範囲が広く、同程度の適用可能な無次元時間範囲では近似誤差が小さいことがわかる.

重み関数 $w_g(\tau_g)$ は12項の指数関数で近似した. Fig. 2に示すのは北川らの近似、北川らと同程度の誤差での近似(Wide range)、北川らと同程度の適用範囲での近似

Fig. 1 Comparison of the relative errors between Kagawa's method and the optimized approximation with 10 terms

Fig. 3 Relative error in 1% approximation of weighting function, Eq. (5), with 10 exponential terms

Fig. 2 Comparison of the relative errors between Kitagawa's method and the optimized approximation with 12 terms

Fig. 4 Relative error in 1% approximation of weighting function, Eq. (6), with 12 exponential terms

(Accurate) の真値に対する相対誤差である。重み関数 $w_f(\tau_f)$ の近似と同様にSchohlの方法では北川らの近似と同程度の近似誤差では適用可能な無次元時間の範囲が広く、同

Table 1 Obtained coefficients used in Fig. 1

j	Accurate		Wide range	
	$m_{f,i}$	$n_{f,i}$	$m_{f,j}$	$n_{f,j}$
1	1.00000×10^0	2.63744×10^1	1.00000×10^0	2.63744×10^1
2	1.09354×10^0	7.20405×10^1	1.13707×10^0	7.26891×10^1
3	1.83984×10^0	1.67512×10^2	2.05770×10^0	1.78755×10^2
4	3.39614×10^0	4.41445×10^2	3.92340×10^0	5.08620×10^2
5	6.02602×10^0	1.25876×10^3	7.20538×10^0	1.56617×10^3
6	1.05729×10^1	3.71113×10^3	1.31088×10^1	4.98372×10^3
7	1.85002×10^1	1.11195×10^4	2.37984×10^1	1.61102×10^4
8	3.23583×10^1	3.36076×10^4	4.31910×10^1	5.25088×10^4
9	5.68078×10^1	1.02207×10^5	7.86054×10^1	1.72088×10^5
10	1.04260×10^2	3.16886×10^5	1.48767×10^2	5.73682×10^5

Table 2 Obtained coefficients used in Fig. 2

j	Accurate		Wide range	
	$m_{g,j}$	$n_{g,j}$	$m_{g,j}$	$n_{g,j}$
1	1.00000×10^0	5.78321×10^0	1.00000×10^0	5.78321×10^0
2	1.03392×10^0	3.07303×10^1	1.08027×10^0	3.11372×10^1
3	1.42464×10^0	8.54166×10^1	1.72854×10^0	9.55323×10^1
4	2.42016×10^0	2.28703×10^2	3.18861×10^0	2.98067×10^2
5	4.10415×10^0	6.32312×10^2	5.80858×10^0	9.60680×10^2
6	6.91416×10^0	1.77016×10^3	1.05368×10^1	3.12909×10^3
7	1.16309×10^1	4.97936×10^3	1.91014×10^1	1.02349×10^4
8	1.95594×10^1	1.40384×10^4	3.46241×10^1	3.35462×10^4
9	3.28922×10^1	3.96278×10^4	6.27614×10^1	1.10073×10^5
10	5.53439×10^1	1.11963×10^5	1.13791×10^2	3.61421×10^5
11	9.36108×10^1	3.17093×10^5	2.06932×10^2	1.18846×10^6
12	1.66549×10^2	9.15436×10^5	3.91528×10^2	3.96734×10^6

Table 3 Obtained coefficients of 1 % approximation

j	$m_{f,j}$	$n_{f,j}$	$m_{g,j}$	$n_{g,j}$
1	1.00000×10^0	2.63744×10^1	1.00000×10^0	5.78321×10^0
2	1.64085×10^0	8.14040×10^1	1.47206×10^0	3.54106×10^1
3	4.33824×10^0	3.20471×10^2	3.57203×10^0	1.78260×10^2
4	1.05803×10^1	1.60234×10^3	8.59542×10^0	9.82252×10^2
5	2.53198×10^1	8.67661×10^3	2.05558×10^1	5.54119×10^3
6	6.04379×10^1	4.83920×10^4	4.91359×10^1	3.14977×10^4
7	1.44209×10^2	2.73138×10^5	1.17449×10^2	1.79579×10^5
8	3.44073×10^2	1.54932×10^6	2.80738×10^2	1.02511×10^6
9	8.21146×10^2	8.80719×10^6	6.71051×10^2	5.85481×10^6
10	1.98675×10^3	5.03605×10^7	1.60403×10^3	3.34467×10^7
11	—	—	3.83527×10^3	1.91109×10^8
12	—	—	9.29845×10^3	1.09762×10^9

程度の適用可能な無次元時間範囲では近似誤差が小さいことがわかる。

Schohlの方法の特徴は精度よく近似する無次元時間の範囲を自由に設定できる点にある。Fig. 3, Fig. 4は真値に対する相対誤差1%で重み関数 $w_f(\tau_f)$, $w_g(\tau_g)$ を上記と同じ項数で近似した時の結果である。本章で求めた重み関数の係数はTable 1, Table 2, Table 3にまとめる。

5. 畳み込み積分の近似誤差

畳み込み積分の計算は周波数領域では単純な掛け算で表わされるため、畳み込み積分の近似誤差は周波数領域で評価する。式(3)の近似誤差は式(16)で定義され、計算においては $u = \sin(\omega t)$ とおく。

$$E_{CF}(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega)_{app}}{\hat{f}(\omega)} \quad (16)$$

分子は式(9)に式(11)や式(14)を代入することで得られる無限級数をフーリエ変換することで計算できる。香川らの方法の畳み込み積分の近似誤差は式(17), 同様にSchohlの方法では式(18)のようになる。

$$E_{CF}(\omega) = \frac{i(1-e^{-i\omega\Delta t}) \sum_{j=1}^{k_f} \frac{m_{f,j} e^{-0.5n_{f,j}\Delta t/T_f}}{n_{f,j}/T_f + i\omega}}{\omega\Delta t \hat{w}_f(\omega)} \quad (17)$$

$$E_{CF}(\omega) = \frac{i(1-e^{-i\omega\Delta t}) \sum_{j=1}^{k_f} \frac{m_{f,j} T_f (1-e^{-n_{f,j}\Delta t/T_f})}{n_{f,j} \Delta t (n_{f,j}/T_f + i\omega)}}{\omega\Delta t \hat{w}_f(\omega)} \quad (18)$$

式(4)の近似誤差は式(19)で定義され、計算では $p = \sin(\omega t)$ とおく。

$$E_{CG}(\omega) = \frac{\hat{g}(\omega)_{app}}{\hat{g}(\omega)} \quad (19)$$

式(16)と同様の手順に従うと、北川の方法, Schohlの方法での近似はそれぞれ式(20), (21)のようになる。

$$E_{CG}(\omega) = \frac{i(1-e^{-i\omega\Delta t}) \sum_{j=1}^{k_g} \frac{m_{g,j} e^{-0.5n_{g,j}\Delta t/T_g}}{n_{g,j}/T_g + i\omega}}{\omega\Delta t \hat{w}_g(\omega)} \quad (20)$$

$$E_{CG}(\omega) = \frac{i(1-e^{-i\omega\Delta t}) \sum_{j=1}^{k_g} \frac{m_{g,j} T_g (1-e^{-n_{g,j}\Delta t/T_g})}{n_{g,j} \Delta t (n_{g,j}/T_g + i\omega)}}{\omega\Delta t \hat{w}_g(\omega)} \quad (21)$$

式(17), 式(18)との差異は重み関数と無次元化パラメータである。

近似誤差 E_{CF} , E_{CG} は複素数であり、真値と近似値の比率であるから、近似値が正確なほどそれらの絶対値は1に、偏角は0に近づく。Fig. 5は香川らの方法とSchohlの方法で近似した場合の近似誤差 E_{CF} の絶対値と偏角である。無次元時間刻み $\Delta\tau_g$ は 1.0×10^{-2} , 1.0×10^{-4} , 1.0×10^{-6} の3通り、重み関数の近似はaccurateと1%の2通りである。なお、グラフ横軸はサンプリング定理により定まる時間刻み Δt での最大角周波数周波数 ω_{grid} で無次元化した角周波数である。Schohlの近似は僅かながら香川らの近似よりも近似精度が

高い。いずれの結果でも無次元化角周波数が1に近づくにつれて絶対値が0に近づき、偏角が0から遠ざかることがわかる。また無次元化角周波数が小さな領域では、絶対値はほぼ一定値をとり、その値は無次元時間刻み $\Delta\tau_f$ が小さいほど1に近い。ただし、accurateの場合のみ $\Delta\tau_f=1.0\times 10^{-6}$ の場合により粗い $\Delta\tau_f$ の場合よりも近似精度が低下している。この原因は重み関数の近似範囲である。Fig. 1からわかるようにaccurateでは高精度で近似している無次元時間 τ_f の範囲が約 1.0×10^{-5} 以上である。そのため無次元時間刻みが近似範囲外の 1.0×10^{-6} の特に高周波数領域において近似誤差が低下した。なお、無次元時間刻みが同じで時間刻みが異なる場合についても検討したが大きな差は見られなかった。畳み込み積分の近似では、強い非線形性を有する重み関数に対して単純な短冊形で近似しているが、この近似が近似誤差の主因であることを意味している。

Fig. 6は北川らの方法とSchohlの方法で近似した場合の近似誤差 E_{Cg} の絶対値と偏角である。無次元時間刻み $\Delta\tau_g$ は 7.0×10^{-3} 、 7.0×10^{-5} 、 7.0×10^{-7} の3通り、重み関数の近似はaccurateと1%の2通りである。この条件は時間刻みを E_{Cf} の場合と同じとし、プラントル数を0.7とした場合に相当する。全体的な傾向は E_{Cf} の場合と同じであるが、最大の違いは同じ時間刻みに対して近似精度が高いことである。この原因は無次元化パラメータ T_g が T_f にプラントル数を掛けたもの

であるために、無次元時間刻みが小さくなるからである。

6. 格子分離誤差

特性曲線法では長方形格子と菱形格子のいずれかが用いられる。Fig. 7に長方形格子の例を示すが、白丸の格子点で形成される菱形格子1と黒丸の格子点で形成される菱形格子2の2つが重なった構造である。格子点を結ぶ斜め線はリーマン不変量が伝播する特性曲線を表している。ある時刻の非定常層流圧力損失の計算では、同一 x 座標上における同時刻と1つ前の時刻の流速と圧力が用いられる。そのため、それぞれ異なる境界条件に由来した値が交互に用いられることになり、これが誤差要因となることがある。

この誤差は特に過渡応答の計算において顕著に表れる。Fig. 8のようなサンプリング間隔 Δt で、ある時刻で急激に圧力が Δp だけ降下する過渡応答の計算を考える。このとき、真の流速履歴は式(22)で与えられる。

$$V(t)=\{u_1(t), u_2(t-\Delta t), u_1(t-2\Delta t), u_2(t-3\Delta t), \dots\} \quad (22)$$

ただし格子1と格子2上の流速をそれぞれ u_1 、 u_2 とする。これは Δt だけずれた2つの過渡応答が重なったものであるから、格子1と格子2に含まれる周波数成分の振幅は等しく位相が Δt だけずれている。つまり $u_1 = \sin(\omega t)$ とすると $u_2 = \sin(\omega(t+\Delta t))$ である。周波数 ω の成分に着目すると格

Fig. 5 Convolution approximation errors of Eq.(3) : (a)magnitude; (b) phase error

Fig. 6 Convolution approximation errors of Eq. (4) : (a) magnitude; (b) phase error

Fig. 7 Rectangular-type characteristic grid

Fig. 8 An example of step response

子1と格子2において実質的に扱う条件はそれぞれ式(23), 式(24)ようになる。

$$V_1(t) = \{u_1(t), u_1(t-2\Delta t), u_1(t-2\Delta t), u_1(t-4\Delta t), \dots\} \quad (23)$$

$$V_2(t) = \{u_1(t), u_1(t), u_1(t-2\Delta t), u_1(t-2\Delta t), \dots\} \quad (24)$$

格子1, 格子2における非定常損失はそれぞれ式(23), 式(24)を式(9)に代入することで得られる。本来これらは同一の現象を扱っているのと同じ値をもたなければならない。そこで格子分離に伴う誤差を式(25)で定義し, これは複素数であるから誤差が小さい程絶対値は1に, 偏角は0に近づく。

$$E_{Gf}(\omega) = \frac{\hat{f}(V_2, \omega)_{app}}{\hat{f}(V_1, \omega)_{app}} \quad (25)$$

式(3)の格子分離誤差は, 香川らの方法では式(26), Schohlの方法では式(27)になる。

$$E_{Gf}(\omega) = \frac{e^{i\omega\Delta t} \sum_{j=1}^{k_f} \frac{m_{f,j} e^{-1.5n_{f,j}\Delta t/T_f}}{n_{f,j}/T_f + i\omega}}{\sum_{j=1}^{k_f} \frac{m_{f,j} e^{-0.5n_{f,j}\Delta t/T_f}}{n_{f,j}/T_f + i\omega}} \quad (26)$$

$$E_{Gf}(\omega) = \frac{e^{i\omega\Delta t} \sum_{j=1}^{k_f} \frac{m_{f,j} T_f (1 - e^{-n_{f,j}\Delta t/T_f}) e^{-n_{f,j}\Delta t/T_f}}{n_{f,j} \Delta t (n_{f,j}/T_f + i\omega)}}{\sum_{j=1}^{k_f} \frac{m_{f,j} T_f (1 - e^{-n_{f,j}\Delta t/T_f})}{n_{f,j} \Delta t (n_{f,j}/T_f + i\omega)}} \quad (27)$$

Fig. 9は香川らの方法とSchohlの方法の格子分離誤差 E_{Gf} の絶対値と偏角である。無次元時間刻み $\Delta\tau_f$ は 1.0×10^{-2} , $1.0 \times$

10^{-4} , 1.0×10^{-6} の3通り, 重み関数の近似はaccurateと1%の2通りである. グラフ横軸は時間刻み Δt での最大角周波数周波数 ω_{grid} で無次元化した角周波数である. 畳み込み積分の近似誤差とは異なり, 香川らの方法の方がSchohlの方法よりも僅かながら差が小さい. 偏角は無次元時間刻みや重み関数の近似精度にあまり依存しない. また $\Delta \tau_f = 1.0 \times 10^{-6}$ の場合にaccurateの方が1%近似よりも誤差が小さいことから, 格子分離誤差を低減するには近似範囲を広げるよりも近似精度を上げる方が有効であることがわかる.

同様に式(4)の格子分離誤差は, 北川らの方法では式(28), Schohlの方法では式(29)になる.

$$E_{Gg}(\omega) = \frac{e^{i\omega\Delta t} \sum_{j=1}^{k_g} \frac{m_{g,j} e^{-1.5n_{g,j}\Delta t/T_g}}{n_{g,j}/T_g + i\omega}}{\sum_{j=1}^{k_g} \frac{m_{g,j} e^{-0.5n_{g,j}\Delta t/T_g}}{n_{g,j}/T_g + i\omega}} \quad (28)$$

$$E_{Gg}(\omega) = \frac{e^{i\omega\Delta t} \sum_{j=1}^{k_g} \frac{m_{g,j} T_g (1 - e^{-n_{g,j}\Delta t/T_g}) e^{-n_{g,j}\Delta t/T_g}}{n_{g,j} \Delta t (n_{g,j}/T_g + i\omega)}}{\sum_{j=1}^{k_g} \frac{m_{g,j} T_g (1 - e^{-n_{g,j}\Delta t/T_g})}{n_{g,j} \Delta t (n_{g,j}/T_g + i\omega)}} \quad (29)$$

Fig. 10は北川らの方法とSchohlの方法で近似した場合の格子分離誤差EGgの絶対値と偏角である. 無次元時間刻み $\Delta \tau_g$ は 7.0×10^{-3} , 7.0×10^{-5} , 7.0×10^{-7} の3通り, 重み関数の近似はaccurateと1%の2通りである. この条件は時間刻みを E_{Gf} の場合と同じとし, プラントル数を0.7とした場合

に相当する. 全体的な傾向は E_{Gf} の場合と同じであり, 重み関数の近似誤差と同様に無次元化パラメータの差異のために同じ時間刻みに対して近似精度が高い.

格子分離誤差は菱形格子を用いることで回避できる. しかし計算の時間刻みを Δt とした場合でも, 同一x座標の格子点上の値は $2\Delta t$ 間隔でしか計算されない. そのため, 時間刻みを2倍にしたときと等しい重み関数の近似誤差を有する点に注意する必要がある.

7. 結 言

本報では気体管路内微小振幅波の計算における重み関数モデルを用いた特性曲線法の計算誤差を定量的に評価するために非定常層流圧力損失の重み関数の近似誤差, 畳み込み積分の近似誤差, 格子分離誤差を周波数領域で評価した. 重み関数はSchohlの方法を用いることで北川らの結果よりも精度よく近似できる. またその近似精度も必要に応じて設定できる. エネルギー方程式の非定常損失の畳み込み積分の近似誤差は, 運動方程式における近似誤差よりも小さい. これは無次元化パラメータにプラントル数を含むためである. また僅かながらSchohlの方法の方が精度がよい. 近似誤差を低減するには重み関数の近似精度よりも近似範囲を広くした方がよい場合がある. 同様の理由によりエネルギー方程式の非定常損失の格子分離誤差は, 運動方程式における誤差よりも小さい. また僅かながら北川らの方法

Fig. 9 Grid separation errors of Eq. (3) : (a) magnitude; (b) phase error

Fig. 10 Grid separation errors of Eq. (4) : (a) magnitude; (b) phase error

の方が精度がよい。近似誤差を低減するには重み関数の近似範囲よりも近似精度が重要である。

本研究で得られた結果により、計算誤差が周波数や重み関数の近似項数、格子分割数にどのように依存するかが明らかとなった。これらの結果は解析対象に含まれる周波数成分によっては従来の特性曲線法が正確な解を与えないことを示唆する。一方で得られた結果を用いると、含まれる周波数に応じて重み関数の近似項数や格子分割数を調整することで計算精度を保証することができる。また、近年ではカルマンフィルタを用いた管路の状態推定に関する研究が行われている^{13), 14)}。カルマンフィルタの利点は準実時間処理にあるが、これらの研究で問題となるのは、行列の次元が著しく大きくなるために計算負荷が大きくなり、準実時間処理が難しい点である。行列の次元は重み関数の近似項数に依存するため、本研究で示した方法により実用上十分な計算負荷を維持しながら重み関数の近似項数を削減できれば準実時間処理が可能となる可能性がある。

参 考 文 献

- 1) Brown, F.T. : A Quasi Method of Characteristics with Application of Fluid Lines with Frequency Dependent Wall Shear and Heat Transfer, Journal of Basic Engineering, Vol. 91, No. 2, pp. 217-227 (1969)
- 2) Katz, S. : Transient Response of Fluid Lines by Frequency Response Conversion, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 99, No. 4, pp. 310-313 (1977)
- 3) 吉岡宗之, 森川敬信 : 容量で終端された空気圧伝送管路の過渡応答, 計測自動制御学会論文集, Vol. 17, No. 9, pp. 920-926 (1981)
- 4) Zielke, W. : Frequency-Dependent Friction in Transient pipe Flow, Journal of Basic Engineering, Vol. 90, No. 1, pp. 109-115 (1968)
- 5) Trikha, A.K. : Efficient Method for Simulating Frequency-Dependent Friction in Transient Liquid Flow, Journal of Fluids Engineering, Vol. 97, No. 1, pp. 97-105 (1975)
- 6) 香川利治, 李一永, 北川能, 竹中利夫 : 特性曲線法における非定常層流圧力損失の高速高精度計算法, 日本機械学会論文集B編, Vol. 49, No. 447, pp. 2638-2644 (1983)
- 7) Suzuki, K., Taketomi, T., and Sato, S. : Improving Zielke's Method of Simulating Frequency-dependent Friction in Laminar Liquid Pipe Flow, Journal of Fluids Engineering, Vol. 113, No. 4, pp. 569-573 (1991)
- 8) Schohl, G.A. : Improved Approximate Method for Simulation Frequency-dependent Friction in Transient Laminar Flow, Journal of Fluids Engineering, Vol. 115, No. 3, pp. 420-424 (1993)
- 9) Vardy, A.E., and Brown, J.M. B. : Efficient Approximation

- of Unsteady Friction Weighting Functions, Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 130, No. 11, pp. 1097-1107 (2004)
- 10) Vítkovský, J.P., Stephens, M.L., Bergant, A., Lambert, M.F., and Simpson, A.R. : Efficient and Accurate Calculation of Zielke and Vardy-Brown Unsteady Friction in Pipe Transients, Proceedings of the 9th International Conference on Pressure Surges, Vol. 2, pp. 405-419 (2004)
- 11) Vítkovský, J.P., Stephens, M.L., Bergant, A., Simpson, A.R., and Lambert, M.F. : Numerical Error in Weighting Function-Based Unsteady Friction Models for Pipe Transients, Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 132, No. 7, pp. 709-721 (2006)
- 12) 北川能, 香川利春, 竹中利夫 : 空気圧管路の過渡応答の特性曲線法による高速高精度計算法, 計測自動制御学会論文集, Vol. 20, No. 7, pp. 648-653 (1984)
- 13) 小澤明, 眞田一志 : 管路動特性の最適化有限要素モデルを用いたカルマンフィルタに関する研究, 日本フルードパワーシステム学会論文集, Vol. 42, No. 5, pp. 89-94 (2011)
- 14) 中尾光博, 西村悠樹, 近藤英二 : 線形カルマンフィルタを用いた気体管路における微小振幅波の圧力推定, 日本機械学会論文集C編, Vol. 79, No. 804, pp. 2830-2840 (2013)