円管内助走区間における振動流* 第2報 近似解析と非定常粘性抵抗係数

横 田 真 一** 中 野 和 夫**

Oscillatory Flow in the Inlet Region of a Circular Tube The 2nd Report An Approximate Solution and the Unsteady Viscous Friction Coefficient*

Shinichi Yokota** Kazuo Nakano**

An approximate solution for the velocity profiles for the oscillatory flow in the inlet region of a circular tube was obtained on the basis of the author's previous work, and it was compared with the experimental results and numerical results.

To estimate the pressure drop, the frequency-dependent unsteady viscous friction coefficient in the inlet region of a circular tube was defined and derived.

The results show that the magnitude of the friction coefficient is nearly proportional to the square root of the frequency in the high frequency region and to the square root of the reciprocal of the distance from the entrance of the pipe in the inlet region, and it is verified that in a sufficiently high frequency region the same friction coefficient as for the oscillatory flow in the developed region can be applied for the oscillatory flow in the inlet-region.

1. 緒 論

油圧制御要素、およびそれらにより構成される油圧機器の動特性解明および設計に際しては、油路内、とくにその助走区間部での流れの動的挙動を明らかにし、その数学モデルを確立しておく必要がある。円管内定常流に関しては従来多くの研究があるが、円管内助走区間部における振動流に関する研究は、前報でもふれたようにあまり見当らず、Atabek²⁾の近似解の研究がある程度であるが、流速が陽な関数で与えられず、また実験結果との比較もなく十分とはいえない。

そこで助走区間部流れの動的挙動を解明することを目的として、前報¹⁾では、助走区間部を含む円管内の振動流について、差分法により数値解を求め、レーザドップラ流速計による流速分布の実測値と比較検討した。また、その結果をふまえて、基礎式の非線形項である対流項を、入口平均流速で線形化した一近似法について検討し、比較的妥当な近似であり得る裏付を得た。本報では、その手法を用いて円管内の助走区間における振動流の流速分布に対する近似解を導びき、実測値および差分法による数値解と比較検討する。またその近似解を用いて、円管の場合の助走区間部を含む周波数依存の非定常粘性抵抗係数というべきものを導びき、それを用いて、粘性に基づく圧力降下と流量の関係を明らかにする。

* 昭和54年6月22日 原稿受付

** 東京工業大学 精密工学研究所
油圧と空気圧 Vol. 11, No. 2

2. 主な記号

a : 管半径, B : 管入口での流速の正弦波振幅と平均値との比, D : 非定常粘性抵抗係数, $\hat{D}$: 管路長平均非定常粘性抵抗係数, D_p : ポアズイユ流の粘性抵抗係数 ($=D(0, \infty) = 8\mu/\pi a^4$), $\bar{f}$: 無次元周波数 ($=\bar{\omega}/2\pi$), j : 虚数単位, J_n : n 次の第1種ベッセル関数, P : 圧力, q : 管通過流量, r : 半径方向座標, $\bar{r}$: 無次元化半径方向座標 r/a , R_s : レイノルズ数 $2au_0/\nu$, s : ラプラス演算子, S : ストロハル数 $2af/\nu$, t : 時間, $\bar{t}$: 無次元時間 $t\nu/a^2$, u : 管軸方向流速, $\bar{u}$: 無次元流速 u/u_0 , u_0 : 管入口時間平均流速, u_s : 管入口流速, u_∞ : 管軸方向流速の助走区間外における解, x : 管軸方向座標, $\bar{x}$: 無次元管軸方向座標 $x\nu/a^2$, z : $\alpha_s^2 + j\bar{\omega}$, α_s : $J_s(\alpha_s)$ の零点, μ : 粘性係数, ν : 動粘度, ρ : 密度, ω : 角周波数, $\bar{\omega}$: 無次元角周波数 $\omega a^2/\nu$, du : 流速の変動分

3. 理論解析

管路系としては、前報¹⁾と同様なFig.1に示す系を考える。この装置において、上流のヘッドを一定に保ち、下流端のスプール形制御オリフィスの開口面積を、偏心カムによりある動作点を中心に正弦波状に変化させることにより得られる正弦波状の変動流量をもつ前報と同一な流れを以下の考察の対象とする。解析に当り、前報で検討した結果を考慮に入れ、次の仮定をおく。

(1)流体は非圧縮粘性流体(仮定1)の成立条件については前報¹⁾参照。(2)流れは軸対称層流とし、円周方向の速度成分は零とする。(3)半径方向の速度成分は軸方向の速度成分 u に比べて十分小さい。(4)入口での流速 u_s は断面全体にわたり一様で、ある時間平均流速 u_0 を中心に正弦波に振動しているものとする。(5)前報での検討結果を踏まえて、慣性項中の対流項を $u_0 \partial u / \partial x$ で近似する。ここで u_0 は管入口での時間平均流速。(6)粘性摩擦に関する項の中で、 $\partial^2 u / \partial x^2$ は $\partial(r \partial u / \partial r) / \partial r$ に比べて十分小さい。

これらの仮定により、管軸方向流速 u に対する基礎方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (1)$$

また入口流速 u_s は次式で与えられるものとする。

$$u_s = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ u_0 (1 + B \sin \omega t) & t \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

(1)式の両辺に r をかけ、 r について0から a まで積分し、圧力勾配の項を通過流量 q で表わすと、

Fig. 1 Experimental apparatus

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\rho}{\pi a^2} \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{2\nu\rho}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=a} \quad (3)$$

$q = \pi a^2 u_0$ であることから、(1)式に代入して、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_s}{\partial t} - \frac{2\nu}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=a} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

両辺を初期値零としてラプラス変換すると、

$$sU + u_0 \frac{\partial U}{\partial x} = sU_s - \frac{2\nu}{a} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_{r=a} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) \quad (4)$$

3.1 助走区間外 ($x \rightarrow \infty$) における解

助走区間外 ($x \rightarrow \infty$) における(4)式の解を U_∞ とすれば、 $\partial U_\infty / \partial x \equiv 0$ であるから(4)式は、

$$sU_\infty = sU_s - \frac{2\nu}{a} \left(\frac{\partial U_\infty}{\partial r} \right)_{r=a} + \nu \left(\frac{\partial^2 U_\infty}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\infty}{\partial r} \right) \quad (5)$$

また(2)式もラプラス変換すると、

$$U_s = u_0 \left(\frac{1}{s} + \frac{B\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \quad (6)$$

また境界条件として、 $r = a$ で $U_\infty = 0$, $r = 0$ で、 $\partial U_\infty / \partial r = 0$, を考慮して、次に述べる助走区間内の場合と同様に、ラプラス変換形では解は次のように求められる。ただし $\bar{r} = r/a$

$$U_\infty(s, \bar{r}) = 2u_0(1 - \bar{r}^2) \left(\frac{1}{s} + \frac{B\omega}{s^2 + \omega^2} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4u_0}{\alpha_i^2} \left(1 + \frac{B\omega s}{s^2 + \omega^2} \right) \left(\frac{J_0(\alpha_i \bar{r})}{J_0(\alpha_i)} - 1 \right) \quad (7)$$

(7)式を逆ラプラス変換すると、時間領域の解として、

$$U_\infty(\bar{t}, \bar{r}) = 2u_0(1 - \bar{r}^2) (1 + B \sin \bar{\omega} \bar{t}) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4u_0}{\alpha_i^2} \left[\frac{J_0(\alpha_i \bar{r})}{J_0(\alpha_i)} - 1 \right] \left[\left(1 - \frac{B\bar{\omega} \alpha_i^2}{\alpha_i^4 + \bar{\omega}^2} \right) e^{-\alpha_i^2 \bar{t}} + \frac{B\bar{\omega} \alpha_i^2}{\alpha_i^4 + \bar{\omega}^2} (\cos \bar{\omega} \bar{t} + \frac{\bar{\omega}}{\alpha_i^2} \sin \bar{\omega} \bar{t}) \right] \quad (8)$$

ただし $\bar{t} = t\nu/a^2$, $\bar{\omega} = \omega a^2/\nu$

3.2 助走区間内における解

助走区間内における解を $U(x, s, r)$ とし、

$$U(x, s, r) = U_\infty(s, r) + U_1(x, s, r) \quad (9)$$

とおく。この式を(4)式に代入すれば、 U_1 について次式

が得られる。

$$sU_1 + u_0 \frac{\partial U_1}{\partial x} = -\frac{2\nu}{a} \left(\frac{\partial U_1}{\partial r} \right)_{r=a} + \nu \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial r} \right) \quad (10)$$

また境界条件は、 $r=a$ で $U=0$ 、 $r=0$ で、

$$\partial U / \partial r = 0 \quad x=0 \text{ で } U=U_1 \quad (11)$$

解を次式のように置き、変数分離法により求める。

$$U_1(x, s, r) = \psi(x, s) \cdot \phi(r) \quad (12)$$

変数分離定数を $-\lambda^2$ とすれば(10)式は、

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} + \lambda^2 \psi = \frac{2}{a} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)_{r=a} \quad (13)$$

$$\frac{d\psi}{dx} + \frac{\nu}{u_0} \left(\lambda^2 + \frac{s}{\nu} \right) \psi = 0 \quad (14)$$

$J_0(\alpha) = 0$ の根を $\alpha_i (i=1, 2, \dots)$ とすれば、(13)式の解として、付録に示すように、

$$\phi_i(r) = \sqrt{2/a} \quad (15)$$

$$\phi_i(r) = \frac{2\sqrt{2}}{a\alpha_i} \left[\frac{J_0(\bar{r}\alpha_i)}{J_0(\alpha_i)} - 1 \right] \quad (i=1, 2, \dots)$$

なる直交関数系が求まる。この ϕ_i に対応する(14)式の解 ψ_i は、ここで $\bar{x} = x\nu/a^2 u_0$ とおけば、

$$\psi_i(\bar{x}, s) = \psi_i(0, s) \exp[-(\alpha_i^2 + a^2 s/\nu)\bar{x}] \quad (16)$$

ゆえに $U_1(\bar{x}, s, \bar{r})$ として次式が求まる。

$$U_1(\bar{x}, s, \bar{r}) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(\bar{x}, s) \cdot \phi_i(\bar{r}) + \phi_0 \psi_0 \\ = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{2}}{a\alpha_i} \psi_i(0, s) \left(\frac{J_0(\bar{r}\alpha_i)}{J_0(\alpha_i)} - 1 \right) e^{-(\alpha_i^2 + \frac{a^2}{\nu}s)\bar{x}} + \phi_0 \psi_0 \quad (17)$$

ここで $\psi_i(0, s)$ は次のようにして求められる。

$$U_1(0, s, \bar{r}) = U(0, s, \bar{r}) - U_0(0, s, \bar{r}) \\ = u_0 \left(\frac{1}{s} + \frac{B\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}a\alpha_i}{\alpha_i^2 + \frac{a^2}{\nu}s} \phi_i \right] \quad (18)$$

であるゆえに、

$$\psi_0(0, s) = \int_0^a U_1(0, s, \bar{r}) \phi_0 r dr \\ = 0 \quad (19)$$

また、

$$\psi_i(0, s) = \int_0^a U_1(0, s, \bar{r}) \phi_i r dr \\ = u_0 \frac{\sqrt{2}a_i\nu}{a} \left(\frac{1}{s} + \frac{B\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \frac{1}{s + \frac{\alpha_i^2}{a^2}\nu} \quad (20)$$

これら(7)、(9)、(17)、(20)式より、助走区間内の解はラプラス変換形では次のように求められる。

$$U(\bar{x}, s, \bar{r}) = u_0 \left(\frac{1}{s} + \frac{B\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \left\{ 2(1 - \bar{r}^2) \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{J_0(\bar{r}\alpha_i)}{J_0(\alpha_i)} - 1 \right] \left[\frac{4s}{\alpha_i^2 (s + \frac{\alpha_i^2}{a^2}\nu)} \right. \\ \left. \left. + \frac{4}{\alpha_i^2} \left(1 - \frac{s}{s + \frac{\alpha_i^2}{a^2}\nu} \right) e^{-(\alpha_i^2 + \frac{a^2}{\nu}s)\bar{x}} \right] \right\} \quad (21)$$

この式をラプラス逆変換すれば、次式のようになる。
 $\bar{t} < \bar{x}$ のとき、

$$u(\bar{x}, \bar{t}, \bar{r}) = u_{\infty}(\bar{t}, \bar{r}) \quad (22)$$

$\bar{t} \geq \bar{x}$ のとき、

$$u(\bar{x}, \bar{t}, \bar{r}) = 2u_0(1 - \bar{r}^2)(1 + B\sin\bar{\omega}\bar{t}) \\ + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4u_0}{\alpha_i^2} \left[\frac{J_0(\bar{r}\alpha_i)}{J_0(\alpha_i)} - 1 \right] \left\{ (1 + B\sin\bar{\omega}(\bar{t} - \bar{x})) e^{-\alpha_i^2 \bar{x}} \right. \\ \left. + \frac{B\bar{\omega}\alpha_i^2}{\alpha_i^4 + \bar{\omega}^2} \left[\cos\bar{\omega}\bar{t} + \frac{\bar{\omega}}{\alpha_i^2} \sin\bar{\omega}\bar{t} - (\cos\bar{\omega}(\bar{t} - \bar{x}) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\bar{\omega}}{\alpha_i^2} \sin\bar{\omega}(\bar{t} - \bar{x})) e^{-\alpha_i^2 \bar{x}} \right] \right\} \quad (23)$$

結局(22)、(23)式の形に助走区間内振動流に対する近似解が得られる。上式は過渡応答を含んでいるが、入口からの距離が $\bar{x}$ の点では、流量を正弦波にみせはじめから、 $\bar{t} = \bar{x}$ となる時点で過渡応答は減衰して定常振動状態に入ることを示している⁵⁾。本報では、特に十分時間が経過した定常振動状態にある振動流にのみ注目しているため、以後は(23)式に考察の対象をかきえる。

4. 近似解析解と実験結果および数値解との比較

Fig. 2 に $R_s = 480$, 10Hz ($S = 2.78$), $B = 0.26$ の場合の近似解析解と実験結果を同時に示した。データの整理方法は前報¹⁾と同様である。基準時刻としては入口付近 ($\bar{x} = 0.025$) の管軸流速の位相を用いた¹⁾。このとき一周を4等分してそれぞれの時刻の実験値を丸印、三角印で時間が進む順に○△●▲をもって示した。また○と●とが図中で重なる場合には●の記号で示した。横軸にはそれぞれ無次元流速 $\bar{u}$ 、時間平均流速からの流速変動分 $\Delta \bar{u}$ をとっている。この図から、近似解析解は、流速分布、変動分共に実験結果と比較的よく一致していることがわかる。また、数値解は前報¹⁾で実験値とよい一致をみていたので、次に近似解析解と数値解を比較し、実験では得られなかった管壁付近の様子も含めて検討する。

Fig. 3 には $R_s = 480$, 0.15Hz ($S = 0.042$), $B = 0.238$ の場合の近似解析解と、数値解の流速分布と変動分を示す。ここで数値解は一点鎖線で示したが、時間関係を明らかにする意味で、管中心流速に実験結

果と同様の時間関係を示す丸、三角記号を付した、流速分布では入口付近で近似解の方が多少発達が遅い傾向がみられる。これは近似解析において半径方向の速度成分を無視したことと、対流項を入口流速で線形化した影響と考えられる。しかし、その差はわずかであり、近似解析解は実用上十分な精度を持っているとい

える。また変動分についても両者はよく一致しているが、助走区間内では数値解で多少中心部が凹状になる傾向が、近似解析解ではみられない。しかし管壁付近での形状はよく一致している。

またFig.4に10Hzの場合で振幅比 B を、0.26と0.5と大きく変えた場合の数値解と近似解析解を示す。

Fig. 2 Oscillatory velocity profiles and the variational components (10Hz)
— : calculated, $\circ \triangle \square$: Experimental results each quarter period.

Fig. 3 Oscillatory velocity profiles and the variational components (0.15Hz)

Fig. 4 Oscillatory velocity profiles and the variational components for two kind of the amplitude ratio B (10Hz)

変動分については、入口からの距離 $\bar{x}$ による差が、この場合にはほとんどないので1つにまとめて示した。振幅比が異なる場合でも、両者に大きなずれは見られず、この程度 ($B=0.5$) の振幅までは、前報¹⁾で検討した結果が裏付けられ、数値解における流速分布が振幅依存性を持つことなく、近似解析解が十分な有用性を持っていることがわかる。

5. 助走区間における非定常粘性抵抗係数

実験結果および数値解との比較により、現在対象としている助走区間を含む円管内振動流の流速分布に対し、本解析が近似解として実用上十分なものであることが確かめられた。そこで、この近似解析解を用いて、助走区間を含む円管に対する、いわゆる周波数依存の非定常粘性抵抗係数を導びき、それを用いて、助走区間内振動流に対する粘性に基づく圧力勾配と流量の関係を示す。

助走区間外に対する周波数依存の粘性抵抗係数に関してはW. Zielke³⁾の研究があるが、助走区間内に対する非定常粘性抵抗係数の研究は皆無といってよく、十分に明らかにされていない。

さて、流量変化に伴う圧力勾配と流量の関係は、(3)式をラプラス変換し、両辺流量 $Q(j\omega)$ で割ることにより、周波数領域で(24)式のように与えられる。

$$-\frac{\partial P(j\omega)}{\partial x} = \frac{j\omega\rho}{\pi a^2} + \frac{-2\mu}{aQ(j\omega)} \left(\frac{\partial U(j\omega, x)}{\partial r} \right)_{r=a} \quad (24)$$

この式の右辺第1項は慣性による項であり、右辺第2項を助走区間内非定常粘性抵抗係数と呼ぶことにし、 $D(j\omega, \bar{x})$ と表わすことにする。この第2項に、(21)式で与えられる助走区間を含む近似解析解を代入することにより、 $D(j\omega, \bar{x})$ は次式のように求められる。ただし、この式の有効範囲は振幅比 $B \leq 0.5$ とする。

$$\begin{aligned} D(j\omega, \bar{x}) &= -\frac{2\mu}{\pi a^2} \left[\frac{1}{U(j\omega)} \cdot \frac{\partial U(\bar{x}, j\omega, \bar{r})}{\partial r} \right]_{\bar{r}=1} \\ &= -\frac{8\mu}{\pi a^2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^*(z-z^* + (z+z^*)e^{-2\bar{x}})}{zz^*} \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、 $z = \alpha_i^2 + j\omega$ 、 $z^* = \alpha_i^2 - j\omega$

(25)式を用いて、周波数 $\bar{f} (= \omega/2\pi)$ をパラメータとした入口からの距離 $\bar{x}$ に対する非定常粘性係数 $D(j\omega, \bar{x})$ のゲインと位相をFig. 5のボード線図に、また距離 $\bar{x}$

をパラメータとした周波数 $\bar{f}$ に対するそれをFig. 6に示す。

Fig. 5において、まず定常流($\bar{f}=0$)の場合には、 D のゲインは管入口付近($\bar{x} < 0.03$)では、ほぼ $\sqrt{\bar{x}}$ に反比例し、また助走区間外に向う($\bar{x} \geq 0.03$)とゲインは、次第に一定値 $D_p(8\mu/\pi a^4)$ となり、従来のポアズイユ流における値を示す。Fig. 4, Fig. 5の縦軸は、この値 D_p で正規化してある。上で述べたことから、定常流の場合における、管壁での速度勾配は、助走区間内ではほぼ $1/\sqrt{\bar{x}}$ に比例すると考えられる。この管壁で

の速度勾配がほぼ一定(誤差5%以内)となる $\bar{x}=0.09$ は、Nikradseらの定めた助走距離 $0.13aR_0^4$ ($\bar{x}=0.26$)の値と比較して、かなり小さい。このことは、管壁での速度勾配は流速分布から定められた助走区間長さに比べて、かなり入口に近いところで一定になり、以後同じ勾配を保つことを示している。

Fig. 5には同時に、 $\bar{f}=10$, $\bar{f}=100$ の場合を示したが、振動流においては、 $D(j\bar{\omega}, \bar{x})$ は複素数となり、粘性抵抗係数は単なる比例定数でなく、位相ずれを伴う。一般には、流量変動に対し、管壁での流速勾配の変化

Fig. 5 Unsteady viscous friction coefficient $D(\bar{x}, j\bar{\omega})$

Fig. 6 Unsteady viscous friction coefficient $D(\bar{x}, j\bar{\omega})$

は位相が進む (Fig. 3 参照) ため、その粘性抵抗は流量振幅が最大に達しないうちに最大値をとる。また周波数が高くなると、助走区間外での粘性抵抗係数のゲインは、周波数に依存して大きくなる。位相についても $\bar{f}$ が大きいと位相が進みはじめる $\bar{x}$ の値が小さくなることがわかる。

Fig. 6 により、周波数 $\bar{f}$ に対する非定常粘性抵抗係数の依存性をみると、 $\bar{x}=0.5$ の助走区間外では、 $\bar{f} > 3$ で粘性抵抗係数 D のゲインは、ほぼ $\sqrt{\bar{f}}$ に比例して増加することがわかる。位相も低周波から進みはじめ、 $\bar{f}$ が 100 以上では、位相進みはほぼ一定 (42.6°) となる。また助走区間内の点 $\bar{x}=0.002, 0.05$ について同時に示したが、助走区間外の場合と比較すると、高周波域ではほぼ $\sqrt{\bar{f}}$ に比例して増大し、その大きさも助走区間外の場合とよく一致している。

しかし低周波では、助走区間内の点により大きく異なり、その点の $\bar{x}$ で定常流の値を保ち、 $\sqrt{\bar{f}}$ に比例しはじめる $\bar{f}$ の値が $\bar{x}$ が減少するに従い、増加していくことがわかる。位相についても、 $\bar{x}$ が小さいほど進みはじめる周波数 $\bar{f}$ が高くなる傾向が見られる。この位相進みは、助走区間外の場合と同様、入口からの距離 $\bar{x}$ に依存するある周波数以上ではほぼ一定となる。

これらのことから、助走区間内の振動流に対しても、十分周波数が高い領域では、助走区間外振動流に対する非定常粘性抵抗係数を用いることが可能であることの確証が得られる。しかし低周波の領域では、この助

走区間内外の差を十分考慮しなければならない。その境界は (25) 式から、位相に関して 1 度の誤差を $D(j\bar{\omega}, \infty)$ に対し許せば、Fig. 7 のように与えられ、斜線 (高周波) の領域では、助走区間内外とも、変動分に関しては、ほぼ同様の挙動を示すと考えられる。

Fig. 5, Fig. 6 に示したのは、入口からの距離 $\bar{x}$ の各点での粘性抵抗係数であるが、実用上は、管入口からある $\bar{x}$ までの管路長にわたる D の値を平均化した、管路長平均粘性抵抗係数 $\hat{D}$ というべきものが問題になると考えられる。ここで $\hat{D}$ を次のように定義する。

$$\hat{D}(j\bar{\omega}, \bar{x}) = \frac{1}{\bar{x}} \int_0^{\bar{x}} D(j\bar{\omega}, \bar{x}) d\bar{x}$$

Fig. 7 The high frequency region

 Fig. 8 Mean unsteady viscous friction coefficient $\hat{D}(\bar{x}, j\bar{\omega})$

Fig. 9 Mean unsteady viscous friction coefficient $\hat{D}(\bar{x}, \bar{f})$

$$= \frac{8\mu}{\pi a^2} \left[1 + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z\bar{x}(z-z^*) + (z-z^*)(1-e^{-2\bar{x}})}{z^2 \bar{x}} \right] \quad (26)$$

Fig. 5, Fig. 6に対応させて, Fig. 8, Fig. 9に, $\hat{D}$ に対する(26)式の計算結果を示す。 $\hat{D}$ についても D に対するのと同様の傾向が認められるが, $\hat{D}$ については, 定常流でのゲインが一定(誤差5%以内)となるのは, ほぼ $\bar{x}=0.3$ となり, 少なくともこの点までは, 助走区間部の影響が及んでいると考えられる。

6. 結 論

本研究で得られた新しい知見を要約すると, 次のようになる。

(1) 前報¹⁾で検討した近似法を用いて, 円管内助走区間部における振動流に対する流速分布の近似解を求め, それが前報¹⁾で求めた実験値および数値解に比較的よく一致し, 少なくとも振幅比 $B < 0.5$ の範囲では, 本解析が近似解として実用上十分であることが確かめられた。

(2) (1)で求めた近似解を用いて, 円管に対する助走区間部を含む $\bar{x}$, $\bar{f}$ 依存の非定常粘性抵抗係数を導びき, それを用いて, 粘性に基づく圧力勾配と流量の関係を明らかにした。その結果, 非定常粘性抵抗係数のゲインは, 高周波域ではほぼ $\sqrt{\bar{f}}$ に比例し, また助走区間内ではほぼ $1/\sqrt{\bar{x}}$ に比例する。また, 高周波域では, 助走区間内の振動流に対する粘性抵抗係数に対して, 助走区間外に対するものを用いて差しつかえないという確証が得られた。

終わりに当り, 本研究に対し終始貴重な御助言をく

ださった東京工業大学池田洋教授に心から感謝の意を表するとともに, 本研究に対し文部省科学研究費(一般研究)の一部を使用させていただいたことを付記し, 謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 中野, 横田: 円管内の助走区間における振動流(第1報) 油圧と空気圧, 10-1, 64/71(1979).
- 2) Atabek, H. B. et al: Oscillatory Flow near the Entry of a Circular tube, ZAMP, XII, 185/201 (1961)
- 3) Zielke, W.: Frequency Dependent Friction in Transient Pipe Flow, J. Basic Eng. 90-1, 109/115 (1968)
- 4) 中野: 油空圧技術者のための流体力学入門(8), 油圧と空気圧, 8-2 72/78(1977).
- 5) 中野, 宮田: 管内非定常流れに関する研究(第2報), 油圧と空気圧, 8-1 60/66(1977).

「付 録」 (15)式の誘導について

(13)式(Bessel形方程式)の解として,

$$\phi(r) = A I_0(\lambda r) + \frac{2}{a \lambda^2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)_{r=a} \quad \text{..... (a-1)}$$

ここで A は定数, 両辺を r について微分することにより,

$$\left(\frac{d\phi}{dr} \right)_{r=a} = -A \lambda I_1(\lambda a) \quad \text{..... (a-2)}$$

よって,

$$\phi(r) = A [I_0(\lambda r) - \frac{2}{a \lambda} I_1(\lambda a)] \quad \text{..... (a-3)}$$

また境界条件 $\phi(a) = 0$ より

$$\phi(a) = -A I_2(\lambda a) = 0 \quad \text{..... (a-4)}$$

ゆえに境界条件 $\phi(a) = 0$ に対する固有値 λ は

(56ページへつづく)

は多くの場合実験と非常によく一致する。なお、吐出し圧力脈動も既知の理論で算出可能である。

以上の結果、騒音発生原因となっている加振力は、製品寸法から理論的に算出することが可能になったので、これに関連する騒音低減対策も机上で検討することができるようになった。

参 考 文 献

- 1) Gosele, R: Zum Mechanismus der Geräuscentstehung der Hochdruckpumpen, Konstruktion, 29-

H9, 347-354, ('77).

- 2) Muller, H. W ほか2名: Möglichkeiten der Geräuschminderung bei Axialkolbenpumpen, Öhydr. u. Pneum. 20-Nr.1, 27-33, ('76)
 3) Seelmann, H.: Geräuschuntersuchungen an Axialkolbenpumpen, VDI-Z, 116-Nr.1, 31-34, ('74).
 4) Kuipers, G., Jonkers, C. O.: Kompressionsverluste in Axialkolbenpumpen, Öhydr. u. Pneum. 17-Nr.8, 221-223, ('73)
 5) 市川, 山口: 油圧管路の周波数特性, 機誌, 71-599, 92-98, (昭43).
 6) 佐野: ピストンポンプに作用する加振力, 機研論, 第236回, 37-40, (昭51).

(38ページよりつづく)

SMAC法により数値的に解いている。図2に数値解の1例を高速度撮影写真と比較して示す。

4. あとがき

紙面の制約により、研究分野を油空圧関係に限り、

2研究室の紹介に終ったが、流体に関連した研究を行っている研究室が、さらに5研究室在ることを付記する。

(48ページよりつづく)

$\lambda_i = \alpha_i / a$ (ただし α_i は $J_0(\alpha) = 0$ の根)
 この λ_i に対応して、次に示す性質を持つ完備な正規直交関数系が求まる。

$$\int_0^a \phi_i^2(r) r dr = 1 \quad (a-5)$$

$$\int_0^a \phi_i \phi_j r dr = 0 \quad (i \neq j) \quad (a-6)$$

$$\int_0^a \phi_i^2 r dr = 1 \quad (a-7)$$

(a-5)より

$$A = \frac{\sqrt{2}}{a J_1(\alpha_i)} = \frac{2\sqrt{2}}{\alpha_i a J_1(\alpha_i)} \quad (a-8)$$

ゆえに

$$\phi_i(r) = \frac{\sqrt{2}}{a} \quad (a-9)$$

$$\phi_i(r) = \frac{2\sqrt{2}}{\alpha_i a} \left[\frac{J_0\left(\frac{\alpha_i}{a} r\right) - J_0(\alpha_i)}{J_1(\alpha_i)} \right] \quad (i=1, 2, \dots)$$

アメリカ機械学会(ASME)100年 フルイディクス20年記念集会のお知らせ

アメリカ機械学会100年の今年はフルイディクス誕生20年にもあたる。この両方を記念して11月同学会シカゴ集会中に記念国際集会を開くこととなり、特に日本からの協力参加を求めて来ている。

日 時 1980年11月16~21日の間の2日間
 場 所 シカゴ市
 テーマ Fluidics in its Twentieth Year -
 A Viable Technology on its own

論文申し込み 申し込みは4月1日、論文提出は
 5月1日迄 下記へ

Dr. Tadeusz M. Drzewiecki
 Fluidics 20th Anniversary Chairman
 Harry Diamond Laboratories
 2800 Powder Mill Road
 Adelphi, Maryland 20783, USA

詳細は計測自動制御学会に御問合わせ下さい。